

Хасслер Уитти

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ  
ТЕОРИЯ  
ИНТЕГРИРОВАНИЯ







И \* Л

*Издательство*  
*иностранной*  
*литературы*

\*

**GEOMETRIC  
INTEGRATION THEORY**

*By*  
*Hassler Whitney*

Princeton, New Jersey  
Princeton University Press

1957

Хасслер Уитни

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ  
ТЕОРИЯ  
ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО  
И. А. ВАЙНШТЕЙНА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
В. Г. БОЛТЯНСКОГО

1960

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва

В книге излагается геометрическая теория интегрирования по ориентированным многообразиям в многомерных пространствах. Автор стремится прояснить лежащие в основе этой теории геометрические и аналитические факты и дать полные и ясные доказательства основных теорем.

Книга рассчитана на математиков — специалистов по функциональному анализу, топологии и др.; может служить также ценным пособием для студентов старших курсов и аспирантов-математиков, специализирующихся в соответствующих областях.

*Редакция литературы  
по математическим наукам*

## Предисловие

В различных областях математики и ее приложений, в частности в дифференциальной геометрии и в физике, часто приходится интегрировать некоторую величину по  $r$ -мерному многообразию  $M$  в  $n$ -мерном пространстве  $E^n$ , например по поверхности в обычном трехмерном пространстве. Если многообразие  $M$  (или некоторую его часть) рассматривать как образ куска  $r$ -мерного пространства  $E^r$ , то интегрирование по  $M$  сводится к интегрированию в  $E^r$ , где применяется стандартная теория. Однако если величина, которую мы интегрируем, определена в области  $R$ , содержащей  $M$ , то важно знать, каким образом интеграл по  $M$  зависит от положения многообразия  $M$  в  $E^n$ . Таким образом, интеграл по  $M$  мы должны рассматривать как функцию от положения многообразия  $M$  в  $E^n$ . Главная цель этой книги состоит в изучении этой функции в широких геометрических и аналитических предположениях.

Начиная с гл. V, мы пользуемся аксиоматическим подходом. Требуя лишь, чтобы  $r$ -мерное интегрирование в  $n$ -мерном пространстве обладало простейшими естественными свойствами, мы приходим к теории, которая в точности оказывается теорией интегрирования дифференциальных форм весьма общего характера. Тем самым отчетливей выявляется роль дифференциальных форм в теории интегрирования, и в то же время значительно возрастает размах этой теории.

Рассматриваемый нами вопрос требует понимания геометрических свойств „направления“  $r$ -мерного элемента в  $n$ -мерном пространстве и, конечно, основ анализа функций нескольких переменных. Классическая трактовка, использующая системы координат, приводит иногда к очень длинным формулам, которые частично зависят от выбора системы координат и не проясняют лежащие в основании геометрические идеи. Поэтому в первой части книги мы даем полное описание этого материала в элементарном изложении. В настоящее время постепенно входит в употребление геометрический подход; мы надеемся, что первые главы помогут сделать эти методы доступными широкому кругу читателей.

Общее представление о книге можно получить из вводной главы; мы показываем, как простейшие предположения приводят к основным применяемым методам, и иллюстрируем эти методы, в частности, на трехмерном случае. Чтобы получить более полный очерк результатов, можно прочитать вводные страницы к тем или иным главам. Подготовительный материал, находящийся в некоторой степени за пределами нашего исследования, но используемый в различных частях книги, собран в приложениях.

Книга распадается на три части. Первая часть, посвященная классической теории, приводит нас к теории интеграла Римана; мы включаем в эту часть также изучение гладких (т. е. дифференцируемых) многообразий. Первые главы должны быть доступны начинающему аспиранту. Во второй части, где излагается общая теория, дается аксиоматический подход. Эта часть рассчитана на более зрелого читателя. В последней части мы продолжаем излагать общую теорию, используя интеграл Лебега.

За исключением тех мест книги, где рассматриваются гладкие многообразия, мы всегда остаемся в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E^n$ . Применяя как орудие нормированные пространства, мы используем метрику пространства  $E^n$ , однако основные геометрические идеи и теоремы не зависят от этой метрики. Изучение гладких многообразий в гл. IV лежит за пределами основной идейной линии этой книги; этот материал включен ввиду его большого интереса и приложений. Мы доказываем теорему де Рама элементарными средствами (наше доказательство очень похоже на первоначальное доказательство де Рама). При таком изложении эта теорема тесно связана с теоремой, выводящей когомологические свойства комплекса из абстрактной теории интегрирования; см. § 12 гл. VII.

Другие изложения, имеющие некоторое отношение к первой части нашей книги, читатель может найти в упоминаемых ниже книгах Бурбаки (в связи с гл. I), Лихнеровича (в связи с гл. I, II и III) и де Рама (в связи с гл. IV).

Дадим теперь краткое описание нашего подхода к общей задаче  $r$ -мерного интегрирования в  $n$ -мерном пространстве. „Интеграл“ есть нечто, определенное на  $r$ -мерных ориентированных клетках и на линейных комбинациях клеток; таким образом, он оказывается функцией полиэдральных  $r$ -мерных цепей. Эта функция линейна, и поэтому мы называем ее „коцепью“. В линейном пространстве полиэдральных цепей мы определяем две нормы: „бемольную“ норму  $|A|^b$  и „диззную“ норму  $|A|^{\#}$ . Коцепи, являющиеся ограниченными функциями в одной из этих норм, называются соответственно „бемольными“ или „диззными“. Прямое доказательство устанавливает, что произвольная диззная коцепь соответ-

ствуется некоторой дифференциальной форме — в том смысле, что значение этой коцепи на любой полиэдральной цепи равно интегралу от соответствующей формы по цепи. Таким образом, теория некоторого класса дифференциальных форм выводится из простейших предположений относительно интеграла. Аналогичная теорема в бемольном случае принадлежит Уолфу.

В случае  $n$ -мерного интегрирования в  $n$ -мерном пространстве „бемольная“ теория эквивалентна лебеговской теории ограниченных измеримых функций. Для получения всех локально суммируемых функций следовало бы определить пространство коцепей более общим образом, чем это возможно с помощью нормы. Мы не знаем никаких условий, просто выражаемых в  $r$ -мерном случае, которые во всех случаях приводили бы к дифференциальным формам, а в  $n$ -мерном случае — ко всем измеримым локально суммируемым функциям. На вводных страницах гл. V мы указываем условия, приводящие к произвольным непрерывным формам. См. также вводные страницы гл. VIII.

Области интегрирования при  $r > 0$  всегда ориентированы; мы

имеем  $\int_{-A} \omega = - \int_A \omega$ , или в терминах коцепей  $X \cdot (-A) = -X \cdot A$ .

В теориях, где свойства ориентации не играют никакой роли, мы предпочитаем рассматривать интегрирование как нульмерное; см. последний параграф введения. Так как пространства полиэдральных цепей снабжены нормами, то мы можем „интегрировать“ по любому элементу пополнений этих пространств, т. е. по любой „бемольной цепи“ или „дизной цепи“. Один из типов бемольной цепи задается ориентированным (кривым) куском  $r$ -мерного многообразия в  $E^n$ . Мы покажем это при весьма общих условиях в гл. X. Другой тип бемольной цепи определяется с помощью непрерывной суммируемой функции в  $E^n$ , значениями которой являются  $r$ -векторы, см. § 7 гл. VI (а также § 25 введения). В этом случае интеграл, кажушийся  $n$ -мерным, можно интерпретировать как  $r$ -мерный интеграл.

Дифференциальные формы, возникающие из бемольных коцепей, называются „бемольными“ формами. Они являются измеримыми функциями, удовлетворяющими двум условиям ограниченности. Пользуясь свойствами бемольных коцепей, мы выводим обычные свойства форм: существуют как внешний дифференциал  $d\omega$  (хотя он может оказаться не определяемым посредством дифференцирования), так и образ  $f^*\omega$  формы  $\omega$ , если  $f$  есть липшицевское отображение. Поэтому с помощью бемольных форм можно (как и в теореме де Рама) изучать когомологии с действительными коэффициентами в полиэдрах (и в липшицевских пространствах,

см. ниже). В частности  $\cup$ -произведение бемольных форм антикоммутативно и подчиняется другим обычным соотношениям для произведений коцепей.

Определяется „масса“ бемольных и дизельных цепей. В последней главе мы изучаем строение дизельных цепей конечной массы. Можно найти „часть  $A_Q$  цепи  $A$ “ в любом борелевском множестве  $Q$ . Обобщая понятие  $r$ -вектора  $r$ -мерной ориентированной клетки, можно определить  $r$ -вектор  $\{B\}$  любой  $r$ -мерной цепи  $B$ . Если теперь задана цепь  $A$ , то  $\Phi(Q) = \{A_Q\}$  будет аддитивной функцией борелевского множества в  $E^n$ , значениями которой являются  $r$ -векторы. Мы показываем, что эта функция множества характеризует цепь  $A$ . Теория этих цепей становится теперь теорией этих функций множества.

В теории обобщенных функций и потоков в многообразии (принадлежащей Л. Шварцу и Ж. де Раму, см. цитируемую ниже книгу де Рама) отправляются от простого пространства форм (коцепей) и получают потоки (в число которых входят гладкие особые цепи) как линейные функции форм с некоторыми условиями непрерывности. Мы поступаем как раз наоборот: отправляясь от цепей, мы получаем коцепи как линейные функции. Ввиду этого получаемые нами пространства коцепей и цепей совершенно отличны от указанных выше пространств форм и потоков; подробное изучение наших цепей и коцепей имеет мало общего с обычной теорией потоков.

С другой стороны, отправляясь от гладких особых цепей в римановом многообразии и вводя последовательности полунорм, можно получить непосредственным предельным переходом различные пространства потоков и обобщенных функций. Этот метод, сулящий некоторые преимущества по сравнению с обычным, был предложен Джеймсом Илсом младшим в статье „Geometric aspects of currents and distributions“, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **41** (1955), 493—496.

Источком этой книги послужило изучение интегрирования в „липшицевских пространствах“; см. Algebraic topology and integration theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **33** (1947), 1—6. Теория интегрирования в евклидовом пространстве в то время была в основном ограничена случаем дизельных коцепей (они назывались „тензорными коцепями“). Открытие Дж. Х. Уолфом в диссертации „Тензорные поля, связанные с липшицевскими коцепями“, Гарвард, 1948, того, что бемольные коцепи (тогда называвшиеся липшицевскими коцепями) соответствуют дифференциальным формам, повело к фундаментальному изменению точки зрения. Изучение интегрирования в евклидовых пространствах вышло на первый план; так как было обнаружено, что теория коцепей может быть

построена с помощью норм цепей, то эти нормы стали основным аппаратом. По соображениям экономии места, липшицевские пространства были в конечном счете исключены из книги; автор предполагает изложить теорию для этого случая в отдельном сочинении. Обзор современного состояния этой области (включая результаты относительно липшицевских пространств) можно найти в докладе: *r-dimensional integration in n-space*, Proc. International Congress of Mathematicians, Providence, 1952. Изучение интеграла Римана геометрическим методом, сходное с тем, которое дано в первых главах этой книги, было проведено Полем Олумом в его диссертации, Гарвард, 1940.

Пересечение сфер действия теории интегрирования и алгебраической топологии иногда затрудняло выбор обозначений. Так как операции внешнего дифференцирования форм и взятия кограницы коцепей в этой работе сливаются, то для них следует пользоваться одним символом; в конечном счете мы выбрали знак  $d$  из анализа, а не знак  $\delta$  из топологии. Мы пользуемся символом  $\nabla$  вместо  $d$  для обозначения обычного дифференциала, чтобы избежать смешения с указанным символом  $d$ . Для произведений в грасмановской алгебре выбраны символы  $\vee$  и  $\wedge$ , в точности соответствующие обычным символам  $\cup$  и  $\cap$  в топологии; см. гл. IX.

Мы будем ссылаться на следующие книги, упоминая при этом лишь фамилию автора:

Банах<sup>1)</sup>: Banach S., *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.

Бурбаки: Bourbaki N., *Éléments de mathématique*, Livre II, Algèbre, Chapitre III, Hermann, Paris, 1948.

Халмош<sup>2)</sup>: Halmos P., *Measure Theory*, Van Nostrand, 1950.

Лихнерович: Lichnerowicz A., *Algèbre et analyse linéaires*, Masson, Paris, 1947.

Де Рам<sup>3)</sup>: de Rham G., *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

Сакс<sup>4)</sup>: Saks S., *Theory of the Integral*, Warszawa, 1937.

<sup>1)</sup> Есть перевод на украинский язык: Банах С., *Курс функціонального аналізу*, Київ, 1948.— *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Есть русский перевод: Халмош П., *Теория меры*, ИЛ, М., 1953. В дальнейшем ссылки будут делаться на это издание.— *Прим. перев.*

<sup>3)</sup> Есть русский перевод: де Рам Ж., *Дифференцируемые многообразия*, ИЛ, М., 1956. В дальнейшем ссылки будут делаться на это издание.— *Прим. перев.*

<sup>4)</sup> Есть русский перевод: Сакс С., *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949. В дальнейшем ссылки будут делаться на это издание.— *Прим. пере.*

Запись (V,10.4) означает ссылку на равенство (4) в § 10 гл. V; (П.I,7) означает § 7 приложения I.

Автор желает выразить признательность Дж. Х. Уолфу за разрешение включить в книгу результаты его диссертации. Автор обязан Норману З. Уолфсону за большую помощь в подготовке рукописи и Джеймсу Илсу за сотрудничество в проверке гл. XI и за помощь при подготовке рукописи и при чтении корректур.

ХАССЛЕР УИТНИ

Май 1956 г.

Принстон, Нью-Джерси  
*Institute for Advanced Study*

## Введение

Цель этой подготовительной главы состоит, во-первых, в том, чтобы мотивировать введение методов и аппаратов, появляющихся в книге, и, во-вторых, в том, чтобы проиллюстрировать некоторые из общих рассуждений на частных случаях, особенно на случае трех измерений. Введение и основной текст книги независимы одно от другого; однако значение полной теории станет более ясным, если вместе с остальными частями книги будет прочитано и введение.

В части А (довольно абстрактной по своему характеру) мы задаемся вопросом, как должна была бы выглядеть теория  $r$ -мерного интегрирования в  $n$ -мерном пространстве. „Интеграл“  $X \cdot \sigma$  определяется, скажем, для  $r$ -мерной ориентированной клетки  $\sigma$  и меняет знак, если изменяется ориентация. Мы можем теперь, по определению, положить  $X \cdot (\alpha\sigma) = a(X \cdot \sigma)$  для действительных чисел  $a$  и  $X \cdot (A + B) = X \cdot A + X \cdot B$ ; считая, что подразделение клеток не влияет на интеграл, мы имеем теперь линейную функцию, определенную на „полиэдральных  $r$ -мерных цепях“. Чтобы придать этой линейной функции аналитические свойства, мы вводим несколько гипотез непрерывности. Затем мы изучаем локальную природу интегрирования. Вблизи любой точки в любом  $r$ -мерном направлении интеграл по клетке приближенно пропорционален  $r$ -мерному объему клетки (при наиболее сильной гипотезе непрерывности); этот факт приводит к построению некоторой функции  $D_X(p)$ , заданной на множестве „ $r$ -векторов“  $\{\sigma\}$  ориентированных  $r$ -мерных клеток  $\sigma$ . Эти  $r$ -векторы должны обладать некоторыми простыми свойствами, которые в свою очередь приводят непосредственно к построению грассмановской алгебры. В результате функция  $D_X$  становится дифференциальной  $r$ -формой, интеграл  $\int D_X$  от которой по любой клетке  $\sigma$  равен исходному интегралу  $X \cdot \sigma$ .

В части В мы начинаем с элементов грассмановской алгебры, к которой мы пришли выше, и, исходя из геометрической точки зрения, получаем некоторые основные факты дифференциального и интегрального исчисления. Мы рассматриваем векторный анализ в случае пространства трех измерений, дифференциалы, якобианы, преобразования „кратных интегралов“, многообразия и теоремы Стокса и де Рама.

Цель части С состоит в том, чтобы познакомить читателя с некоторыми из общих методов, встречающихся в последующих частях книги. В последних двух параграфах мы попутно касаемся нескольких частных видов интегрирования, которые можно рассматривать как  $r$ -мерные для различных  $r$ .

### А. Общая задача интегрирования

**1. Интеграл как функция области.** Для построения какой-либо теории интегрирования следует, конечно, иметь различные возможные „области интегрирования“. Какого бы рода ни был процесс интегрирования (с действительными значениями), каждое „интегрируемое“  $X$ , когда оно применяется к допустимой области, дает некоторое действительное число. Таким образом, при фиксированном  $X$  мы имеем действительную функцию области  $A$ ; ее значение на  $A$  мы обозначаем через  $X \cdot A$ . Мы будем рассматривать интегрирование в евклидовом пространстве.

Если мы намереваемся назвать интегрирование  $r$ -мерным, то, несомненно, в число допустимых областей мы должны включить простейшие  $r$ -мерные фигуры. Каждая  $r$ -мерная клетка  $\sigma$ , составляющая замкнутую ограниченную часть  $r$ -мерной плоскости, ограниченную конечным числом кусков  $(r-1)$ -мерных плоскостей, является такой фигурой. Примем нашу первую гипотезу:

*Гипотеза ( $H_1$ ). Интеграл по клетке  $\sigma$  зависит от ее ориентации; перемена ориентации меняет знак интеграла.*

Обсудим значение этой гипотезы и доводы в ее пользу. Прямой отрезок  $\sigma^1$  имеет два конца:  $p$  и  $q$ ; две ориентации отрезка  $\sigma^1$  — это два направления вдоль  $\sigma^1$ : от  $p$  к  $q$  и от  $q$  к  $p$ ; мы можем обозначить эти две ориентированные клетки соответственно через  $pq = -qr$  и через  $qr = -pq$ . Их можно определять выбором вектора  $q-p$  (от  $p$  к  $q$ ) или же  $p-q$  (от  $q$  к  $p$ ). Треугольник  $p_0p_1p_2$  мы можем ориентировать, выбрав на нем упорядоченную пару независимых векторов, например пару  $(p_1 - p_0, p_2 - p_0)$ . Перестановка этих векторов или перемена направления одного из них должна изменять ориентацию треугольника. Подобным же образом  $r$ -мерную клетку  $\sigma$  ориентируют, выбирая упорядоченное множество, состоящее из  $r$  независимых векторов, расположенных в этой клетке. Нульмерная клетка, т. е. одна точка, не имеет свойств ориентации.

Треугольник  $\sigma = p_0p_1p_2$ , ориентированный, как указано выше, имеет границу  $\partial\sigma$ , состоящую из ориентированных отрезков  $p_0p_1$ ,  $p_1p_2$  и  $p_2p_0$ . Граница  $\partial(pq)$  ориентированного отрезка  $pq$  состоит из точки  $q$ , взятой со знаком  $+$ , и точки  $p$ , взятой со знаком  $-$ . Граница  $\partial\sigma$  произвольной  $r$ -мерной клетки  $\sigma$  содержит

ее  $(r-1)$ -мерные грани, должным образом ориентированные (П. II, 5).

Для любой ориентированной клетки  $\sigma$  условимся через  $-\sigma$  обозначать противоположно ориентированную клетку; тогда гипотезу  $(H_1)$  можно записать в виде

$$(1) \quad X \cdot (-\sigma) = -X \cdot \sigma.$$

Рассмотрим несколько примеров. Пусть  $\varphi$  — действительная функция, определенная в трехмерном пространстве  $E^3$ , и пусть  $C$  — ориентированная кривая, идущая от точки  $p$  к точке  $q$ . Если мы проинтегрируем скорость изменения функции  $\varphi$  вдоль  $C$ , то мы получим число  $\varphi(q) - \varphi(p)$ . Если же ориентацию кривой изменить на обратную, то мы получим  $\varphi(p) - \varphi(q)$ . Далее рассмотрим любой одномерный интеграл  $\int_A \omega$ . Пусть  $\sigma = p_0 p_1 p_2$  — ориентированный треугольник, разбитый на два ориентированных треугольника  $\sigma' = p_0 p' p_2$ ,  $\sigma'' = p' p_1 p_2$  отрезком  $p' p_2$ , конец  $p'$  которого лежит на отрезке  $p_0 p_1$ . Тогда

$$(2) \quad \int_{\partial \sigma'} \omega + \int_{\partial \sigma''} \omega = \int_{\partial \sigma} \omega,$$

ибо

$$\int_{p_0 p'} \omega + \int_{p' p_1} \omega = \int_{p_0 p_1} \omega, \quad \int_{p' p_2} \omega + \int_{p_2 p'} \omega = 0;$$

последнее соотношение справедливо в силу того, что отрезки  $p' p_2$  и  $p_2 p'$  ориентированы противоположно. Соотношения этого типа чрезвычайно важны для геометрических свойств интеграла; они были бы невозможны, если бы свойства ориентации игнорировались.

Конечно, возможно интегрирование и по неориентированным областям, и иногда оно имеет важное значение; в этом случае допустимы гораздо более общие типы областей, но геометрические свойства в значительной степени теряются. Мы предпочитаем думать о таком интегрировании, как о нульмерном; см. ниже § 26.

Наиболее типичным требованием теории интегрирования является аддитивность, или, в настоящем изложении, *инвариантность при подразделениях* (которой мы воспользовались в приведенном выше примере).

Гипотеза  $(H_2)$ . Если  $r$ -мерная ориентированная клетка  $\sigma$  разбита на аналогичным образом ориентированные  $r$ -мерные клетки  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ , то

$$(3) \quad X \cdot \sigma = X \cdot \sigma_1 + \dots + X \cdot \sigma_m.$$

2. **Полиэдральные цепи.** Мы хотим записать границу  $\partial\sigma$  треугольника  $\sigma = p_0 p_1 p_2$  как область интегрирования. Пусть точка  $p'$ , как в § 1, лежит на отрезке  $p_0 p_1$ ; нам хотелось бы иметь возможность записывать  $\partial\sigma$  различными способами, вроде

$$\partial\sigma = p_0 p_1 + p_1 p_2 + p_2 p_0 = p_0 p' + p' p_2 - p_0 p_2 + p' p_1 + p_1 p_2 - p' p_2$$

и т. д. Это наводит на мысль определить  $r$ -мерную *полиэдральную цепь*  $A$  как линейную комбинацию  $r$ -мерных ориентированных клеток с действительными числами в качестве коэффициентов, причем должны соблюдаться условия

$$(1) \quad 1\sigma = \sigma, \quad 0\sigma = 0, \quad a(-\sigma) = (-a)\sigma = -(a\sigma)$$

и должна иметь место инвариантность при подразделении: если ориентированная клетка  $\sigma$  разбита на клетки  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ , то  $\sigma$  и  $\sigma_1 + \dots + \sigma_m$  представляют собой одну и ту же полиэдральную цепь. Определения цепей  $aA$  (для действительных чисел  $a$ ) и  $A + B$  очевидны; множество  $r$ -мерных полиэдральных цепей образует теперь линейное пространство.

Гипотезы  $(H_1)$  и  $(H_2)$  позволяют с помощью соотношения

$$(2) \quad X \cdot \sum a_i \sigma_i = \sum a_i (X \cdot \sigma_i)$$

определить  $X \cdot A$  для любой  $r$ -мерной полиэдральной цепи  $A = \sum a_i \sigma_i$ . Теперь  $X$  является *линейной функцией  $r$ -мерной полиэдральной цепи*. По этой причине мы называем  $X$   *$r$ -мерной коцепью*. То обстоятельство, что  $X$  есть коцепь, эквивалентно предположению, что определено  $X \cdot \sigma$  и при этом выполняются свойства  $(H_1)$  и  $(H_2)$ .

Граница цепи  $A = \sum a_i \sigma_i$  определяется формулой  $\partial A = \sum a_i \partial \sigma_i$ ; она является, как легко видеть, корректно определенной <sup>1)</sup>  $(r-1)$ -

<sup>1)</sup> Сделаем несколько замечаний по поводу определений автора. Обозначим через  $L_r$  линейное пространство всевозможных линейных форм (с действительными коэффициентами) от  $r$ -мерных ориентированных клеток. Далее обозначим через  $R$  подпространство пространства  $L_r$ , порожденное всеми формами видов

$$1 \cdot \sigma + 1 \cdot (-\sigma) \text{ и } 1 \cdot \sigma - (1 \cdot \sigma_1 + 1 \cdot \sigma_2 + \dots + 1 \cdot \sigma_m), \quad (*)$$

где  $\sigma$  и  $(-\sigma)$  — две противоположно ориентированные клетки, а  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$  — клетки, на которые разбита ориентированная клетка  $\sigma$ . Фактор-пространство  $C_r = L_r/R$  автор называет линейным пространством  *$r$ -мерных полиэдральных цепей*. Таким образом, каждая  $r$ -мерная полиэдральная цепь является смежным классом по подпространству  $R$  и потому, как смежный класс, содержит бесконечное множество различных элементов пространства  $L_r$  — *представителей* этой полиэдральной цепи.

Формула (2) определяет символ  $X \cdot A$  для любого элемента  $A \in L_r$ , причем  $X$  является линейным функционалом на пространстве  $L_2$ . Гипо-

мерной полиэдральной цепью. Нульмерная полиэдральная цепь есть выражение  $A^0 = \sum a_i p_i$ , где  $p_i$  — точки; мы полагаем  $\partial A^0 = 0$ .

**3. Две гипотезы непрерывности.** Для построения удовлетворительной теории интегрирования множество допустимых областей должно, например, включать в себя ориентированные кривые  $r$ -мерные клетки. Мы должны иметь возможность получать их как пределы  $r$ -мерных полиэдральных цепей, а интеграл по ним должен определяться как предел интегралов по аппроксимирующим полиэдральным цепям. Это требует некоторых гипотез непрерывности относительно интеграла. В этом параграфе мы укажем две гипотезы, при которых может быть получена удовлетворительная общая теория; если мы присоединим к ним также гипотезу из следующего параграфа, то интеграл будет иметь более простые аналитические свойства.

Пусть  $\sigma$  — ориентированный треугольник площади  $|\sigma|$ . Если мы разобьем плоскость, содержащую  $\sigma$ , на маленькие прямоугольники и обозначим через  $\tau_1, \dots, \tau_m$  те из них, которые содержатся в  $\sigma$ , то эти  $\tau_i$  заполняют большую часть  $\sigma$ , и естественно потребовать, чтобы сумма  $\sum X \cdot \tau_i$  была близка к  $X \cdot \sigma$ . Это будет вытекать из следующей гипотезы.

Гипотеза  $(H_1)$ . Для данной  $r$ -мерной коцепи  $X$  существует такое число  $N_1$ , что

$$(1) \quad |X \cdot \sigma| \leq N_1 |\sigma| \quad \text{для всех } r\text{-мерных ориентированных клеток } \sigma,$$

где  $|\sigma|$  есть  $r$ -мерный объем клетки  $\sigma$ .

Это, конечно, более сильная гипотеза, чем необходимо для осуществления указанного выше требования. Мы принимаем ее в значительной степени ради аналитических методов, описываемых ниже, в § 6.

Возьмем случай  $r=0$ . Мы можем считать, что „нульмерный объем точки“ равен 1. Любой нульмерной коцепи  $X$  соответствует

тезы  $(H_1)$  и  $(H_2)$  означают, что функционал  $X$  обращается в нуль на подпространстве  $R$ , и потому  $X$  может рассматриваться как функционал на пространстве  $C_r$ . По определению, каждый линейный функционал на пространстве цепей  $C_r$  называется  $r$ -мерной коцепью, и, таким образом,  $X$  есть  $r$ -мерная коцепь.

Наконец, граница  $\partial A$  определяется непосредственно не для  $r$ -мерных полиэдральных цепей, а для элементов пространства  $L_r$ . Каждый представитель некоторой  $r$ -мерной полиэдральной цепи имеет свою границу, но все эти границы являются представителями одной и той же  $(r-1)$ -мерной полиэдральной цепи, которую мы и считаем границей исходной  $r$ -мерной цепи. Слова, выделенные курсивом, и выражают корректность определения границы. — *Прим. ред.*

действительная функция  $\varphi$ :  $\varphi(p) = X \cdot p$  для всех точек  $p$ . Теперь гипотеза  $(H_1')$  говорит, что  $|\varphi(p)| \leq N_1$  для всех  $p$ , т. е. что функция  $\varphi$  ограничена. Такие функции являются слишком общими; мы должны наложить на них дальнейшие ограничения. Попробуем отыскать гипотезу, подсказываемую случаем  $r = 1$ .

Возьмем снова рассмотренный выше треугольник  $\sigma$ ; пусть  $\tau$  — объединение всех прямоугольников  $\tau_i$ . Хотя, вообще говоря, граница  $\partial\tau$  объединения  $\tau$  составлена из отрезков, не параллельных сторонам треугольника  $\sigma$ , мы можем эту границу рассматривать как приближение для  $\partial\sigma$ . Взяв  $r = 1$ , мы можем потребовать, чтобы  $X \cdot \partial\tau$  было близко к  $X \cdot \partial\sigma$ , т. е. чтобы  $X \cdot \partial(\sigma - \tau)$  было мало, как только мала площадь  $\sigma - \tau$ .

Гипотеза  $(H_2')$ . Для данной  $r$ -мерной коцепи  $X$  существует такое число  $N_2$ , что

$$(2) \quad |X \cdot \partial\sigma^{r+1}| \leq N_2 |\sigma^{r+1}| \quad \text{для всех } (r+1)\text{-мерных ориентированных клеток } \sigma^{r+1}.$$

Отметим, что гипотеза  $(H_2')$  удовлетворяется тривиальным образом, если  $r = n$ .

При  $r = 0$  гипотеза  $(H_2')$  утверждает, что для любого ориентированного отрезка  $pq$

$$(3) \quad |X \cdot q - X \cdot p| = |X \cdot \partial(pq)| \leq N_2 |q - p|,$$

где  $|q - p|$  — длина отрезка  $pq$ ; иными словами, функция  $\varphi(p) = X \cdot p$  удовлетворяет условию Липшица.

Любую коцепь, удовлетворяющую гипотезам  $(H_1')$  и  $(H_2')$ , мы называем *бемольной* коцепью.

**4. Еще одна гипотеза непрерывности.** Если клетка  $\sigma$  передвинулась в близкое положение  $\sigma'$ , то мы можем принять, что  $X \cdot \sigma'$  близко к  $X \cdot \sigma$ . Мы будем рассматривать только движение клетки  $\sigma$  как твердого тела, без вращения, т. е. сдвиг на некоторый вектор  $v$ . Пусть  $T_v\sigma$  обозначает новую клетку. Наша гипотеза состоит в том, что число  $X \cdot T_v\sigma$  отличается от  $X \cdot \sigma$  не более чем на взятое с постоянным множителем произведение  $r$ -мерного объема  $|\sigma|$  на величину  $|v|$  сдвига.

Гипотеза  $(H_3)$ . Для данной  $r$ -мерной коцепи  $X$  существует такое число  $N_3$ , что для любой  $r$ -мерной ориентированной клетки  $\sigma$  и любого вектора  $v$

$$|X \cdot T_v\sigma - X \cdot \sigma| \leq N_3 |\sigma| |v|.$$

В случае  $r = 0$  эта гипотеза эквивалентна гипотезе  $(H_2')$ . При  $r = n$  она не тривиальна, в то время как гипотеза  $(H_2')$  тривиальна.

Любую коцепь, удовлетворяющую всем трем гипотезам, мы называем *дизной*. Мы увидим, что дизные коцепи соответствуют дифференциальным формам. (Это имеет место также и в бемольном случае; см. гл. IX.)

**5. Несколько примеров.** Уяснить некоторые из этих гипотез нам поможет изучение установившегося течения жидкости в трехмерном ориентированном пространстве  $E^3$ . Возьмем любую двумерную ориентированную клетку  $\sigma$ . Пусть пара векторов  $(v_1, v_2)$  определяет ее ориентацию. Выберем вектор  $v_3$  так, чтобы тройка векторов  $(v_1, v_2, v_3)$  [или, что равносильно,  $(v_3, v_1, v_2)$ ] определяла заданную ориентацию пространства  $E^3$ . Тогда *положительное* направление через площадку  $\sigma$  есть направление вектора  $v_3$ . Пусть  $X \cdot \sigma$  — количество (положительное или отрицательное) жидкости, протекающей через  $\sigma$  в положительном направлении за единицу времени; это — *поток* через  $\sigma$ . Ясно, что гипотезы  $(H_1)$  и  $(H_2)$  выполняются; поэтому  $X$  является двумерной коцепью. Конечно, можно определить поток  $X \cdot S$  для произвольной ориентированной поверхности  $S$ .

Если плотность жидкости и скорость течения ограничены, то ясно, что гипотеза  $(H'_1)$  выполняется. Возьмем теперь любую трехмерную клетку  $\tau$ . Если жидкость не возникает и не исчезает, а плотность ее постоянна, то полное количество жидкости, вытекающей из  $\tau$ , которое равно  $X \cdot \partial\tau$ , должно быть равно нулю. В общем же случае  $X \cdot \partial\tau$  равно полному количеству жидкости, возникающей в  $\tau$ . Поэтому гипотеза  $(H'_2)$  равносильна предположению, что полное количество возникающей жидкости, отнесенное к единице объема, ограничено.

В том же самом течении жидкости рассмотрим *циркуляцию* вдоль ориентированной кривой  $C$ . Пусть  $p$  — некоторая точка кривой  $C$ . Если  $u(p)$  — единичный касательный вектор к кривой  $C$  в точке  $p$ , соответствующий положительному направлению вдоль  $C$ ,  $v(p)$  — вектор скорости течения жидкости в точке  $p$  и  $\rho(p)$  — плотность в точке  $p$ , то циркуляция равна

$$(1) \quad Y \cdot C = \int_C \rho v \cdot u$$

[ср. ниже (18.3)]. И на этот раз гипотезы  $(H_1)$  и  $(H_2)$  выполняются.

Гипотеза  $(H'_1)$  будет следовать из ограниченности величин  $v$  и  $\rho$ . Для данной двумерной ориентированной клетки  $\sigma$  число  $Y \cdot \partial\sigma$  есть циркуляция по контуру  $\partial\sigma$ . Беря произвольно малые клетки  $\sigma$  вблизи точки  $p$ , мы видим, что гипотеза  $(H'_2)$  будет выполняться, если вихрь  $\text{rot}(v) = \nabla \times v$  существует и конечен; ср. (21.4).

Допустим, что течение происходит в трубе. Тогда рассмотренные выше коцепи  $X$  и  $Y$  определены не во всем пространстве  $E^3$ , а только в области течения; гипотезы следует предполагать выполненными только в этой области.

**6. Случай  $r = n$ .** Для любой  $n$ -мерной коцепи  $X$ , удовлетворяющей гипотезе  $(H'_1)$  в ориентированном пространстве  $E^n$  [гипотеза  $(H'_2)$  удовлетворяется тривиально], обычная лебеговская теория утверждает существование такой ограниченной измеримой функции  $\Phi$ , что

$$(1) \quad X \cdot \sigma = \int_{\sigma} \Phi \quad \text{для всех } n\text{-мерных клеток } \sigma, \text{ ориентированных}$$

так же, как и  $E^n$

(интеграл в смысле Лебега).

Мы кратко рассмотрим более простой случай, когда удовлетворяется также и гипотеза  $(H'_3)$ . Пусть для данной точки  $p$   $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  — последовательность  $n$ -мерных клеток, ориентированных так же, как и  $E^n$ , содержащихся во все меньших и меньших окрестностях точки  $p$ . Положим

$$(2) \quad \Phi(p) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{X \cdot \sigma_i}{|\sigma_i|}.$$

Наметим доказательство существования и единственности этого предела. Пусть  $\tau_1, \tau_2, \dots$  — аналогичная последовательность кубов. Допустим, что  $i_0$  и  $k_0$  таковы, что при  $i \geq i_0$  и  $k \geq k_0$  клетки  $\sigma_i$  и  $\tau_k$  содержатся в окрестности точки  $p$  диаметра  $< \varepsilon$ . Мы можем взять  $k$  столь большим, чтобы сдвиги <sup>1)</sup> кубов  $\tau_k$  почти заполняли  $\sigma_i$ :

$$\sigma_i = \sigma' + R, \quad \sigma' = T_{v_1} \tau_k + \dots + T_{v_s} \tau_k, \quad |R| \text{ мало.}$$

В силу  $(H'_3)$

$$\left| \frac{X \cdot \sigma'}{|\sigma'|} - \frac{X \cdot \tau_k}{|\tau_k|} \right| \leq \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \left| \frac{X \cdot T_{v_j} \tau_k - X \cdot \tau_k}{|\tau_k|} \right| \leq N_3 \varepsilon,$$

и наше утверждение следует из  $(H'_1)$ .

Если снова воспользоваться гипотезой  $(H'_3)$ , то ясно, что  $\Phi$  удовлетворяет неравенству

$$(3) \quad |\Phi(p+v) - \Phi(p)| \leq N_3 |v|$$

<sup>1)</sup> Эти сдвиги автор предполагает такими, что кубы  $T_{v_1} \tau_k, \dots, T_{v_s} \tau_k$  попарно не имеют общих внутренних точек. — Прим. ред.

и что имеет место соотношение (1) (в котором используется интеграл Римана). Кроме того,

$$(4) \quad |X \cdot \sigma - |\sigma| \Phi(p_0)| = \left| \int_{\sigma} [\Phi(p) - \Phi(p_0)] dp \right| \leq N_3 \zeta |\sigma|,$$

если все точки клетки  $\sigma$  находятся от  $p_0$  на расстоянии, не превосходящем  $\zeta$ .

**7.  $r$ -вектор  $r$ -мерной ориентированной клетки.** Пусть  $X$  — диезная  $r$ -мерная коцепь в  $E^n$ . Тогда для каждой  $r$ -мерной ориентированной плоскости  $P$  в  $E^n$  мы можем рассматривать  $X \cdot \sigma$  для  $r$ -мерных клеток, лежащих в плоскости  $P$ , и поэтому найти функцию  $\Phi_P$  в  $P$ , как в § 6. Для любой точки  $p$  представляют интерес значения  $\Phi_P(p)$  для различных  $r$ -мерных ориентированных плоскостей  $P$ , проходящих через  $p$ .

Мы воспользуемся тесно связанной с этим вопросом функцией. Для данных  $\sigma$  и  $p$  пусть  $P$  есть  $r$ -мерная плоскость, проходящая через  $p$  параллельно  $\sigma$  и ориентированная так же, как и  $\sigma$ . Положим

$$(1) \quad D_X(p) \cdot \{\sigma\} = |\sigma| \Phi_P(p).$$

Мы должны придать смысл символам  $D_X(p)$ ,  $\{\sigma\}$  и их комбинации. Пусть  $\sigma_i$  определены, как в § 6; тогда формулы (1) и (6.2) дают

$$(2) \quad D_X(p) \cdot \{\sigma\} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|\sigma|}{|\sigma_i|} X \cdot \sigma_i.$$

Как функция от  $\sigma_i$  правая часть известна, коль скоро мы знаем множество  $r$ -мерных плоскостей, параллельных  $\sigma$ , ориентацию клетки  $\sigma$  и ее объем  $|\sigma|$ ; мы назовем эту тройку  $r$ -вектором  $\{\sigma\}$  клетки  $\sigma$ . Мы можем теперь определить  $D_X(p)$  как действительную функцию, определенную на множестве всех  $r$ -векторов  $r$ -мерных ориентированных клеток, которая задается соотношением (1). [Позднее функция  $D_X(p)$  будет определена на более специальных пространствах  $T_r$ .]

Заметим, что число  $D_X(p) \cdot \{\sigma\}$  не изменится, если мы изменим метрику в  $E^n$ ; это видно из соотношения (2), так как не изменятся ни  $|\sigma|/|\sigma_i|$ , ни  $X \cdot \sigma_i$ .

Для данного  $r$ -вектора  $\{\sigma\}$  и действительного числа  $a \neq 0$  пусть  $a\{\sigma\}$  обозначает  $r$ -вектор  $\{\sigma'\}$  любой ориентированной клетки  $\sigma'$ , параллельной  $\sigma$ , ориентированной так же, как и  $\sigma$ , или же противоположно  $\sigma$  (в соответствии с тем, будет  $a > 0$  или же  $a < 0$ ), такой, что  $|\sigma'| = |a| |\sigma|$ . Если  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  параллельны и, например,  $\{\sigma_2\} = a\{\sigma_1\}$ , то положим

$$\{\sigma_1\} + \{\sigma_2\} = (1 + a) \{\sigma_1\}$$

при  $a \neq -1$ . Если мы присоединим „нулевой  $r$ -вектор“ 0, то определенные таким образом  $r$ -векторы, связанные с фиксированным множеством параллельных плоскостей, образуют линейное пространство, изоморфное пространству действительных чисел. На любом таком пространстве  $r$ -векторов, как легко видеть из (2), функция  $D_X(p)$  линейна:

$$(3) \quad D_X(p) \cdot (a\{\sigma\} + b\{\sigma'\}) = aD_X(p) \cdot \{\sigma\} + bD_X(p) \cdot \{\sigma'\}.$$

**8. О  $r$ -векторах и границах  $(r+1)$ -мерных клеток.** Множество всех  $r$ -векторов  $r$ -мерных ориентированных клеток вложим следующим образом в линейное пространство  $S_r$  (бесконечной размерности при  $0 < r < n$ ). Возьмем фиксированную точку  $p_0$ . Элемент  $\alpha$  пространства  $S_r$  есть конечное множество различных  $r$ -мерных плоскостей  $P_1, \dots, P_m$ , проходящих через  $p_0$ , вместе с  $r$ -вектором  $\alpha_i$ , связанным с каждой плоскостью  $P_i$ ; мы можем также включать добавочные плоскости, если мы сопоставим им нулевые  $r$ -векторы. Элемент  $\alpha\alpha$  образуем, заменяя каждый  $r$ -вектор  $\alpha_i$  на  $\alpha\alpha_i$ . Если заданы элементы  $\alpha$  и  $\beta$ , то мы можем взять достаточный запас плоскостей  $P_1, \dots, P_m$  так, чтобы  $\alpha$  и  $\beta$  определялись соответственно  $r$ -векторами  $\beta_i$  и  $\alpha_i$  в  $P_i$  ( $i=1, \dots, m$ ); пусть элемент  $\alpha + \beta$  определяется  $r$ -векторами  $\alpha_i + \beta_i$  в  $P_i$ . Ясно, что построенное пространство  $S_r$  не зависит от выбора точки  $p_0$ . Линейные пространства, описанные в предыдущем параграфе, являются линейными подпространствами пространства  $S_r$ .

Мы можем продолжить функцию  $D_X(p)$  так, чтобы она стала линейной функцией в  $S_r$ , по определению положив

$$(1) \quad D_X(p) \cdot \alpha = \sum_{i=1}^m D_X(p) \cdot \alpha_i, \quad \text{если } \alpha \text{ определяется } r\text{-векторами } \alpha_i \\ \text{в } P_i \ (i=1, \dots, m).$$

Возьмем теперь произвольную  $(r+1)$ -мерную ориентированную клетку  $\tau$ . Ее граница есть  $r$ -мерная цепь  $\sigma_1 + \dots + \sigma_m$ . Мы хотим, чтобы сумма соответствующих  $r$ -векторов была равна 0:

$$(2) \quad \{\sigma_1\} + \dots + \{\sigma_m\} = 0, \quad \text{если } \sigma_1 + \dots + \sigma_m = \partial\tau \text{ для неко-} \\ \text{торой клетки } \tau.$$

Требование, чтобы выполнялись все такие соотношения, превращает  $S_r$  в линейное пространство  $T_r$ . Элементы пространства  $T_r$  мы будем называть  $r$ -векторами. (Точнее говоря,  $T_r$  есть факторпространство пространства  $S_r$  по линейному подпространству  $S'_r$ , порожденному всеми такими элементами  $\{\sigma_1\} + \dots + \{\sigma_m\}$ .) Превратим теперь  $D_X(p)$  в линейную функцию в пространстве  $T_r$ ,

принимая за ее значение на элементе пространства  $T_r$ , ее значение на любом соответствующем элементе пространства  $S_r$ . Чтобы показать, что это возможно, мы должны доказать следующее соотношение:

$$(3) D_X(p) \cdot \{\sigma_1\} + \dots + D_X(p) \cdot \{\sigma_m\} = 0, \text{ если } \sigma_1 + \dots + \sigma_m = \partial\tau.$$

Мы можем считать, что точка  $p$  лежит в клетке  $\tau$ . Произведем гомотетию пространства  $E^n$  с центром в точке  $p$  и коэффициентом  $\lambda > 0$ ; тогда  $\tau$  превратится в  $\tau_\lambda$ , а  $\sigma_i$  — в  $\sigma_{\lambda i}$ , и мы будем иметь

$$\partial\tau_\lambda = \sum \sigma_{\lambda i}, \quad |\tau_\lambda| = \lambda^{r+1} |\tau|, \quad |\sigma_{\lambda i}| = \lambda^r |\sigma_i|.$$

Возьмем последовательность  $\lambda_1, \lambda_2, \dots \rightarrow 0$ . Мы можем в (7.2) воспользоваться последовательностью <sup>1)</sup>  $\sigma_{\lambda_1 i}, \sigma_{\lambda_2 i}, \dots$ ; с помощью (7.1) мы находим

$$D_X(p) \cdot \{\sigma_i\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\sigma_i|}{|\sigma_{\lambda_k i}|} X \cdot \sigma_{\lambda_k i} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k^r} X \cdot \sigma_{\lambda_k i}.$$

<sup>1)</sup> Здесь рассуждения автора некорректны. В самом деле, не существует точки  $p$ , принадлежащей *всем* граням  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  клетки  $\tau$ , и потому хотя бы для одного  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) последовательность  $\sigma_{\lambda_1 i}, \sigma_{\lambda_2 i}, \dots$  будет состоять из клеток, *не проходящих* через точку  $p$ . Здесь нужно добавить следующие оценки. Обозначим через  $T_{\lambda_k i}$  параллельный перенос, переводящий клетку  $\sigma_{\lambda_k i}$  в клетку  $T_{\lambda_k i} \sigma_{\lambda_k i}$ , проходящую через точку  $p$ . Очевидно, сдвиг  $T_{\lambda_k i}$  определяется вектором, величина которого не превосходит  $a \cdot \lambda_k$  (за  $a$  можно принять диаметр клетки  $\tau$ ). Поэтому [в силу  $(H'_3)$ ]

$$|X \cdot T_{\lambda_k i} \sigma_{\lambda_k i} - X \cdot \sigma_{\lambda_k i}| \leq N_3 |\sigma_{\lambda_k i}| \cdot a \lambda_k = N_3 a |\sigma_i| \cdot \lambda_k^{r+1}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\lambda_k^r} X \cdot T_{\lambda_k i} \sigma_{\lambda_k i} - \frac{1}{\lambda_k^r} X \cdot \sigma_{\lambda_k i} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (*)$$

Последовательностью  $T_{\lambda_k i} \cdot \sigma_{\lambda_k i}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , уже действительно *можно* воспользоваться в (7.2) для определения числа  $D_X(p) \cdot \{\sigma_i\}$ , так как все клетки этой последовательности содержат точку  $p$ . Мы получаем

$$\begin{aligned} D_X(p) \cdot \{\sigma_i\} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\sigma_i|}{|T_{\lambda_k i} \sigma_{\lambda_k i}|} X \cdot T_{\lambda_k i} \sigma_{\lambda_k i} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k^r} X \cdot T_{\lambda_k i} \sigma_{\lambda_k i} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k^r} X \cdot \sigma_{\lambda_k i} \end{aligned}$$

[см. (\*)], чем и оправдываются вычисления автора. — *Прим. ред.*

Далее, на основании  $(H'_2)$  получаем

$$\left| \frac{1}{\lambda_k^r} \sum_i X \cdot \sigma_{\lambda_k i} \right| = \frac{1}{\lambda_k^r} |X \cdot \partial \tau_{\lambda_k}| \leq \frac{1}{\lambda_k^r} N_2 |\tau_{\lambda_k}| = \lambda_k N_2 |\tau|.$$

Эти соотношения дают (3).

**9. Грассмановская алгебра.** Мы найдем специальный способ записи элементов пространства  $T_r$ . Возьмем любое упорядоченное множество  $(v_1, \dots, v_r)$  независимых векторов. Пусть  $\sigma$  — параллелепипед, у которого одна из вершин находится в некоторой точке  $p$ , а векторы  $(v_1, \dots, v_r)$  служат ребрами, выходящими из  $p$ , причем  $\sigma$  ориентирован с помощью векторов  $v_i$ . Определим символ  $v_1 \vee \dots \vee v_r$ , полагая

$$(1) \quad v_1 \vee \dots \vee v_r = \{\sigma\}.$$

Теперь любой элемент из  $T_r$  может быть записан в виде суммы таких элементов.

Из свойств, рассмотренных в § 7, мы выводим, что „произведение“  $v_1 \vee \dots \vee v_r$  кососимметрично:

$$(2) \quad v_2 \vee v_1 = -v_1 \vee v_2, \quad \text{и поэтому}^1) \quad v \vee v = 0,$$

а также, что

$$(3) \quad v_1 \vee \dots \vee (av_i) \vee \dots \vee v_r = a(v_1 \vee \dots \vee v_i \vee \dots \vee v_r).$$

Докажем, что оно линейно относительно  $v_i$ :

$$(4) \quad (v_1 + v'_1) \vee v_2 \vee \dots \vee v_r = v_1 \vee v_2 \vee \dots \vee v_r + \\ + v'_1 \vee v_2 \vee \dots \vee v_r,$$

и, следовательно, линейно относительно каждого  $v_i$ .

Если  $v'_1$  лежит в  $r$ -мерной плоскости, определяемой векторами  $v_1, \dots, v_r$ , то соотношение (4) выражает простой геометрический факт относительно сложения объемов. Предположим, что этот случай места не имеет, и рассмотрим несколько значений  $r$ .

При  $r=1$  любой 1-вектор представляется некоторым вектором; 1-вектор  $\{pq\}$  ориентированного отрезка  $pq$  представляется вектором  $q-p$ . Соотношение (4) утверждает, что сложение 1-векторов (в правой части) эквивалентно сложению векторов (в левой части). Покажем это следующим образом. Выберем некоторую точку  $p_0$  и рассмотрим треугольник  $\sigma = p_0 p_1 p_2$  с вершинами

$$p_1 = p_0 + v_1, \quad p_2 = p_1 + v'_1 = p_0 + (v_1 + v'_1).$$

<sup>1)</sup> По определению: выше при определении символа  $v_1 \vee \dots \vee v_r$  предполагалось, что векторы  $v_1, \dots, v_r$  независимы. — Прим. ред.

В силу (8.2)

$$\{p_0 p_1\} + \{p_1 p_2\} + \{p_2 p_0\} = 0, \quad \text{поэтому} \quad \{p_0 p_2\} = \{p_0 p_1\} + \{p_1 p_2\}.$$

Это и есть требуемое соотношение.

При  $r = 2$  возьмем те же точки  $p_i$ , а также точки  $q_i = p_i + v_2$  ( $i = 0, 1, 2$ ). Положим  $\sigma' = q_0 q_1 q_2$ . Точки  $p_i$  и  $q_i$  являются вершинами трехмерной клетки  $\tau$ , гранями которой являются треугольники  $\sigma$  и  $\sigma'$ , а также три параллелограмма  $\sigma_{01}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{02}$ , где  $\sigma_{ij}$  содержит отрезок  $p_i p_j$ . Очевидно, имеем

$$\{\sigma\} = \{\sigma'\} = \frac{1}{2} v_1 \vee v'_1.$$

$$\{\sigma_{01}\} = v_1 \vee v_2, \quad \{\sigma_{12}\} = v'_1 \vee v_2, \quad \{\sigma_{02}\} = (v_1 + v'_1) \vee v_2.$$

Учитывая ориентации, мы видим, что

$$\partial\tau = \sigma' - \sigma + \sigma_{01} + \sigma_{12} - \sigma_{02};$$

применение соотношения (8.2) дает (4) для  $r = 2$ . Общий случай аналогичен.

Множество всех векторов в  $E^n$  образует векторное пространство  $V = V(E^n)$ . Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $V$ . Тогда любой вектор  $v$  может быть единственным образом записан в виде  $\sum v^i e_i$ ; числа  $v^i$  являются компонентами вектора  $v$ . Так как 1-векторы и векторы мы рассматриваем как одно и то же, то  $e_i$  образуют базис в  $T_1$ . Для  $r = 2$ , пользуясь соотношениями (2), (3) и (4), мы получаем

$$(5) \quad v_1 \vee v_2 = \sum_{i,j=1}^n v_1^i v_2^j (e_i \vee e_j) = \sum_{i < j} \begin{vmatrix} v_1^i & v_2^i \\ v_1^j & v_2^j \end{vmatrix} e_i \vee e_j.$$

Можно показать, что элементы  $e_{ij} = e_i \vee e_j$  ( $i < j$ ) независимы в  $T_2$ ; в силу (5) они образуют базис в  $T_2$ . Подобным же образом  $r$ -векторы  $e_{\lambda_1 \dots \lambda_r} = e_{\lambda_1} \vee \dots \vee e_{\lambda_r}$  ( $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ ) образуют базис в  $T_r$ , и любой  $r$ -вектор  $\alpha$  может быть единственным образом записан в виде

$$(6) \quad \alpha = \sum_{\lambda_1 < \dots < \lambda_r} \alpha^{\lambda_1 \dots \lambda_r} e_{\lambda_1 \dots \lambda_r}.$$

Числа  $\alpha^{\lambda_1 \dots \lambda_r}$  являются „компонентами“  $r$ -вектора  $\alpha$ .

Отсюда следует, что пространство  $T_r$  имеет размерность  $\binom{n}{r}$ . В частности, пространство  $T_n$  одномерно и имеет  $e_1 \dots e_n$  своим базисным элементом, а каждое пространство  $T_k$  при  $k > n$  содержит только нулевой элемент.

Полагая по определению

$$(7) \quad (v_1 \vee \dots \vee v_r) \vee (v_{r+1} \vee \dots \vee v_{r+s}) = v_1 \vee \dots \vee v_{r+s},$$

мы получаем билинейное умножение между пространствами  $T_r$  и  $T_s$  с произведением в  $T_{r+s}$ . Если мы присоединим пространство  $T_0 =$  пространству действительных чисел, то система пространств  $T$  с этими операциями будет представлять собой *грассмановскую алгебру* пространства  $V$ . Обозначим пространство  $T_r$  через  $V_{[r]}$ .

При  $n \leq 3$  любой  $r$ -вектор  $\alpha$  (для произвольного  $r > 0$ ) имеет вид  $\{\sigma\}$ , где  $\sigma$  — некоторая  $r$ -мерная ориентированная клетка. Это не будет иметь места при  $n \geq 4$ ; например, бивектор  $e_{12} + e_{34}$  не может быть записан в этом виде. Любой  $r$ -вектор  $\alpha$  вида  $\{\sigma\}$  называется *простым  $r$ -вектором*.

**10. Дуальная алгебра.** Множество линейных функций  $f$ , определенных на векторном пространстве  $V$ , образует векторное пространство при следующих соглашениях: функция  $af$  имеет в  $v$  значение  $af(v)$ ; функция  $f + g$  имеет в  $v$  значение  $f(v) + g(v)$ . Это — *пространство  $\bar{V}$ , сопряженное к  $V$* .

Так как  $D_X(p)$  есть линейная функция на векторном пространстве  $T_r = V_{[r]}$ , то мы можем рассматривать ее как элемент пространства, сопряженного к пространству  $V_{[r]}$ ; мы обозначим это сопряженное пространство через  $V^{[r]}$ . Его элементы мы будем называть  *$r$ -ковекторами*; элементы пространства  $\bar{V} = V^{[1]}$  являются *ковекторами*. Мы найдем специальный способ представления элементов пространства  $V^{[r]}$ .

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $V$ . Соотношение

$$(1) \quad e^i \cdot v = e^i \cdot (v^1 e_1 + \dots + v^n e_n) = v^i$$

определяет линейную функцию  $e^i$  в  $V$ , т. е. элемент пространства  $\bar{V}$ . Элементы  $e^1, \dots, e^n$ , как легко видеть, образуют в пространстве  $\bar{V}$  базис, *взаимный* к базису  $e_i$ . Любой элемент  $f$  из  $\bar{V}$  теперь может быть единственным образом записан в виде  $\sum f_i e^i$ , где  $f_i$  — компоненты элемента  $f$ . Отсюда следует, что пространства  $\bar{V}$  и  $V$  имеют одну и ту же размерность; так как  $V^{[r]}$  и  $V_{[r]}$  — сопряженные пространства, то они также имеют одну и ту же размерность.

Элементы  $e^i$  можно определить соотношениями

$$(2) \quad e^i \cdot e_j = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Определим базисные элементы  $e^{\lambda_1 \dots \lambda_r}$  в  $V^{[r]}$  той же самой формулой:

$$(3) \quad \begin{aligned} e^{\lambda_1 \dots \lambda_r} \cdot e_{\lambda_1 \dots \lambda_r} &= 1 & (\lambda_1 < \dots < \lambda_r), \\ e^{\lambda_1 \dots \lambda_r} \cdot e_{\mu_1 \dots \mu_r} &= 0 & \text{для других } \mu_i \ (\mu_1 < \dots < \mu_r). \end{aligned}$$

В качестве следствия соотношений (2) мы получаем

$$(4) \quad f(v) = f \cdot v = \sum_{i,j=1}^n f_i v^j e^i \cdot e_j = \sum_{i=1}^n f_i v^i;$$

подобным же образом, записывая

$$(5) \quad \xi = \sum_{\lambda_1 < \dots < \lambda_r} \xi_{\lambda_1 \dots \lambda_r} e^{\lambda_1 \dots \lambda_r},$$

где  $\xi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}$  — компоненты элемента  $\xi$ , мы, пользуясь (9.6), получаем

$$(6) \quad \xi(\alpha) = \xi \cdot \alpha = \sum_{\lambda_1 < \dots < \lambda_r} \xi_{\lambda_1 \dots \lambda_r} \alpha^{\lambda_1 \dots \lambda_r}.$$

Конечно, изменение базиса приводит к изменению компонент. При  $n=3$ ,  $r=2$  формулы (5), (9.6) и (6) выглядят так:

$$(7) \quad \xi = \xi_{12} e^{12} + \xi_{13} e^{13} + \xi_{23} e^{23}, \quad \alpha = \alpha^{12} e_{12} + \alpha^{13} e_{13} + \alpha^{23} e_{23},$$

$$(8) \quad \xi \cdot \alpha = \xi_{12} \alpha^{12} + \xi_{13} \alpha^{13} + \xi_{23} \alpha^{23}.$$

Мы хотим определить выражения вида  $f^1 \vee \dots \vee f^r$ , где  $f^i$  принадлежат пространству  $\bar{V}$ , а результат принадлежит  $V^{[r]}$ . Мы хотим также, чтобы это умножение было кососимметрично и линейно относительно каждой переменной и чтобы выполнялись равенства  $e^{\lambda_1} \vee \dots \vee e^{\lambda_r} = e^{\lambda_1 \dots \lambda_r}$ . Этим наше умножение определяется. Например, для  $r=2$

$$(9) \quad f \vee g = \sum_{i,j=1}^n f_i g_j e^i \vee e^j = \sum_{i < j} \begin{vmatrix} f_i & f_j \\ g_i & g_j \end{vmatrix} e^{ij}.$$

Значение  $(f^1 \vee \dots \vee f^r) \cdot (v_1 \vee \dots \vee v_r)$  есть детерминант с элементами  $f^i \cdot v_j$ . Например, для  $r=2$

$$(10) \quad (f \vee g) \cdot (v \vee w) = \begin{vmatrix} f \cdot v & f \cdot w \\ g \cdot v & g \cdot w \end{vmatrix}.$$

Чтобы это показать, заметим, что обе части соотношения (10) кососимметричны и линейны относительно величин  $v$ ,  $w$ ; поэтому достаточно доказать это соотношение в частном случае  $v = e_k$ ,  $w = e_l$ ,  $k < l$ . Но в этом случае оно сразу следует из (9) и (3).

Отметим, что если для получения величины  $(f \vee g) \cdot (v \vee w)$  мы воспользуемся равенствами (9) и (9.5), то сравнение полученного результата с (10) даст нам тождество Лагранжа:

$$(11) \quad \left| \begin{array}{cc} \sum f_i v^i & \sum f_i w^i \\ \sum g_i v^i & \sum g_i w^i \end{array} \right| = \sum_{i < j} \left| \begin{array}{cc} f_i & f_j \\ g_i & g_j \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} v^i & v^j \\ w^i & w^j \end{array} \right|.$$

**11. Интегрирование дифференциальных форм.** Дифференциальная  $r$ -форма  $\omega$  в  $E^n$  есть функция, значениями  $\omega(p)$  которой являются  $r$ -ковекторы. Поэтому для любой точки  $p$  и  $r$ -вектора  $\alpha$   $\omega(p) \cdot \alpha$  есть действительное число. Если форма  $\omega$  непрерывна, то мы можем следующим образом определить интеграл от нее по любой  $r$ -мерной ориентированной клетке  $\sigma$  в  $E^n$ . Возьмем некоторое мелкое подразделение клетки  $\sigma$  на  $r$ -мерные ориентированные клетки  $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ ; выберем по точке  $p_i$  в каждой клетке  $\sigma_i$ ; составим сумму

$$(1) \quad \sum \omega(p_i) \cdot \{\sigma_i\}$$

и возьмем предел этой суммы, пользуясь последовательностью подразделений с диаметрами клеток, стремящимися к нулю. При этом не требуется, чтобы пространство  $E^n$  было метрическим или ориентированным.

Для любой  $r$ -мерной дизъюнктивной коцепи  $X$  функция  $D_X$  является непрерывной дифференциальной формой и

$$(2) \quad X \cdot \sigma = \int_{\sigma} D_X = \lim \sum D_X(p_i) \cdot \{\sigma_i\}.$$

В самом деле, если  $P$  — несущая плоскость клетки  $\sigma$ , ориентированная так же, как и  $\sigma$ , то, выбрав произвольную метрику в  $E^n$ , мы сможем применить формулу (7.2). См. (V, 10).

### ***V. Некоторые классические вопросы***

**12. Грассмановская алгебра в метрическом  $n$ -мерном ориентированном пространстве.** В метрическом пространстве  $E^n$  определено скалярное произведение  $u \cdot v$  векторов. Возьмем произвольный вектор  $u$ . Функция  $\varphi_u(v) = u \cdot v$  (мы пишем также  $\varphi_u \cdot v$ ) вектора  $v$  линейна; поэтому  $\varphi_u$  является определенным элементом пространства  $\bar{V}$ , сопряженного к  $V$ . Этим, как легко показать, определяется изоморфизм между  $V$  и  $\bar{V}$ . Таким образом, любая линейная функция  $\psi$  на пространстве  $V$  может быть записана в виде  $\psi(v) = u \cdot v$ , причем вектор  $u$  определяется однозначно.

Так как пространства  $V_{[r]}^*$  и  $V^{[r]}$  при каждом  $r$  являются сопряженными, то определенный выбор метрики в  $V_{[r]}$  [см. (I, 12.1)] устанавливает определенный изоморфизм между  $V_{[r]}$  и  $V^{[r]}$ .

Предположим теперь, что пространство  $E^n$ , кроме того, ориентировано. Тогда существует определенный „единичный  $n$ -вектор“  $\alpha_0$ , который равен  $\{1\}$  для любой  $n$ -мерной клетки единичного объема, ориентированной так же, как и  $E^n$ . Для любого ортонормального базиса  $(e_1, \dots, e_n)$  (состоящего из попарно перпендикулярных единичных векторов, определяющих данную ориентацию пространства  $E^n$ ) мы, очевидно, имеем

$$(1) \quad \alpha_0 = e_1 \dots e_n = e_1 \vee \dots \vee e_n.$$

Существует также определенный „единичный  $n$ -ковектор“  $\omega_0$ , для которого

$$(2) \quad \omega_0 = e^1 \dots e^n = e^1 \vee \dots \vee e^n, \quad \omega_0 \cdot \alpha_0 = 1.$$

Пусть задан произвольный  $r$ -вектор  $\alpha$ ; положим

$$(3) \quad \Phi(\beta) = \omega_0 \cdot [\alpha \vee \beta] \text{ для всех } (n-r)\text{-векторов } \beta.$$

Тогда  $\Phi$  есть линейная функция в  $V_{[n-r]}$ , т. е. является определенным элементом пространства  $V^{[n-r]}$ . Таким образом, мы получаем определенный изоморфизм между  $V_{[r]}$  и  $V^{[n-r]}$ .

**13. То же самое,  $n = 3$ .** Применение результатов предыдущего параграфа показывает, что в метрическом ориентированном пространстве  $E^3$  все пространства  $V_{[r]}$  и  $V^{[r]}$  изоморфны некоторым определенным образом или пространству  $V_{[1]} = V$  или же пространству  $V_{[0]} =$  пространству действительных чисел. Изоморфизм между  $V = V_{[1]}$  и  $\bar{V} = V^{[1]}$  задается скалярным произведением; рассмотрим изоморфизмы между  $V$  и  $V^{[2]}$  и между  $V$  и  $V_{[2]}$ .

Возьмем произвольный вектор  $v$ ; положим

$$(1) \quad \Psi_v(\alpha) = \omega_0 \cdot (v \vee \alpha) \text{ для всех бивекторов } \alpha.$$

Так как  $\Psi_v$  — линейная функция от  $\alpha$ , то  $\Psi_v$  является биковектором.

Возьмем, далее, любой бивектор  $\alpha$ ; положим

$$(2) \quad \Theta_\alpha \cdot w = \omega_0 \cdot (\alpha \vee w) \text{ для всех векторов } w.$$

Так как эта функция от  $w$  линейна, то она задается скалярным произведением вектора  $w$  на определенный вектор  $\Theta_\alpha$ .

Воспользуемся этим вектором, чтобы определить *векторное произведение* векторов:

$$(3) \quad u \times v = \Theta_u \vee v.$$

Таким образом,  $u \times v$  определяется соотношением

$$(4) \quad (u \times v) \cdot w = \omega_0 \cdot (u \vee v \vee w) \text{ для всех векторов } w.$$

Так как все операции в правой части равенства (4) линейны, то  $u \times v$  является билинейной функцией от  $u$  и  $v$ . Так как далее  $v \vee u = -u \vee v$  и  $u \vee u = 0$ , то мы имеем

$$(5) \quad v \times u = -u \times v, \quad u \times u = 0.$$

Пусть  $(e_1, e_2, e_3)$  — ортонормальный базис, задающий выбранную в  $E^3$  ориентацию. Заменим в (4) каждый из векторов  $u, v, w$  каким-либо из векторов  $e_1, e_2, e_3$ . В качестве одного из примеров получим

$$(6) \quad (e_1 \times e_3) \cdot e_2 = \omega_0 \cdot (e_1 \vee e_3 \vee e_2) = -\omega_0 \cdot \alpha_0 = -1.$$

Рассматривая все соотношения этого вида, найдем

$$(7) \quad (e_1 \times e_2) = e_3, \quad e_1 \times e_3 = -e_2, \quad e_2 \times e_3 = e_1.$$

Преобразуя разложение  $u \times v = \sum_{i,j} u^i v^j e_i \times e_j$ , получаем

$$(8) \quad u \times v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3.$$

Найдем геометрическую интерпретацию векторного произведения. Имея векторы  $u$  и  $v$ , мы таким образом выберем ортонормальный базис  $(e_1, e_2, e_3)$ , соответствующий ориентации пространства  $E^3$ , чтобы вектор  $u$  шел в  $e_1$ -направлении, а вектор  $v$  находился в плоскости векторов  $e_1$  и  $e_2$  и был направлен в ту же сторону от  $e_1$ , что и  $e_2$ . Пусть, скажем,

$$u = ae_1, \quad v = b'e_1 + be_2; \quad \text{тогда } a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

Применение формул (7) дает  $u \times v = abe_3$ . Таким образом, если  $u$  и  $v$  независимы (в этом случае  $a$  и  $b \neq 0$ ), то  $u \times v$  есть вектор, перпендикулярный и к  $u$ , и к  $v$  и направленный так, чтобы тройка  $(u, v, u \times v)$  соответствовала ориентации пространства  $E^3$ . В противном же случае  $u \times v = 0$ . Пусть  $\sigma$  — параллелограмм, одной из вершин которого является точка  $p$ , а сторонами служат векторы  $u$  и  $v$ . Тогда  $|\sigma| = ab$ , и потому длина вектора  $u \times v$  равна

$$(9) \quad |u \times v| = |\sigma|.$$

Найдем компоненты биковектора  $\Psi_v$  в (1) в ортонормальной системе координат. Пользуясь соотношениями (10.5) и (10.3), мы, например, имеем

$$(\Psi_v)_{13} = \Psi_v(e_{13}) = \omega_0 \cdot (\sum v^i e_i \vee e_{13}) = \omega_0 \cdot v^2 e_2 \vee e_1 \vee e_3 = -v^2.$$

Мы находим

$$(10) \quad \Psi_v = v^3 e^{12} - v^2 e^{13} + v^1 e^{23}.$$

Аналогично для вектора  $\Theta_\alpha$  в (2)

$$(11) \quad \Theta_\alpha = \alpha^{23} e_1 - \alpha^{13} e_2 + \alpha^{12} e_3.$$

**14. Дифференциал отображения.** Пусть  $f$  — гладкое отображение пространства  $E^n$  (или некоторого открытого множества в  $E^n$ ) в  $E^m$ , т. е. отображение, которое в системах координат пространств  $E^n$  и  $E^m$  задается функциями, имеющими непрерывные частные производные первого порядка. *Дифференциал*  $\nabla f$  отображения  $f$  является понятием, которое может быть использовано вместо этих частных производных и которое вводится следующим образом. Возьмем произвольную точку  $p$  и произвольный вектор  $v$  в  $E^n$ ; тогда  $p + tv$  будет точкой в  $E^n$  для каждого действительного числа  $t > 0$ . Положим

$$(1) \quad \nabla_v f(p) = \nabla f(p, v) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} [f(p + tv) - f(p)].$$

Это — вектор в  $E^m$ , касательный к кривой, которая является образом при отображении  $f$  прямой, проходящей через  $p$  в направлении вектора  $v$ . Для каждой точки  $p$  мы имеем отображение  $\nabla f(p)$ , переводящее векторы пространства  $E^n$  в векторы пространства  $E^m$ ; нетрудно показать, что это отображение линейно.

Если  $m = 1$  и  $E^m$  есть пространство  $\mathcal{M}$  действительных чисел, то мы имеем действительную функцию  $\varphi$ , определенную в пространстве  $E^n$ . Пусть  $(x^1, \dots, x^n)$  — координаты в  $E^n$ , а  $(e_1, \dots, e_n)$  — соответствующие векторы, идущие в направлении осей. Тогда в точке  $p$  мы, очевидно, имеем

$$(2) \quad \nabla_{e_i} \varphi(p) = \frac{\partial \varphi(p)}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

В этом случае  $\nabla_v \varphi(p)$  есть действительная линейная функция вектора  $v$ , и, таким образом,  $\nabla \varphi(p)$  есть ковектор. Поэтому  $\nabla \varphi$  есть дифференциальная 1-форма в  $E^n$ ; она называется *градиентом* функции  $\varphi$ .

Возвратимся к общему случаю. Пусть в  $E^n$  заданы точка  $p$  и векторы  $v_1, \dots, v_r$ . Формула

$$(3) \quad \nabla f(p, v_1 \vee \dots \vee v_r) = \nabla f(p, v_1) \vee \dots \vee \nabla f(p, v_r)$$

определяет линейное отображение пространства  $r$ -векторов про-

пространства  $E^n$  в пространство  $r$ -векторов пространства  $E^m$ ; это отображение мы также обозначим через  $\nabla f(p)$ .

Пусть теперь  $\omega$  — произвольная  $r$ -форма в  $E^m$ . Возьмем в  $E^m$  любую точку  $q = f(p)$ . Тогда  $\omega(q) \cdot \alpha'$  есть линейная функция  $r$ -вектора  $\alpha'$  в  $E^m$ ; поэтому  $\omega(q) \cdot \nabla f(p, \alpha)$  есть линейная функция  $r$ -вектора  $\alpha$  в  $E^n$  и, таким образом,  $r$ -ковектор в  $E^n$ , который мы обозначим через  $(f^*\omega)(p)$ . Теперь  $f^*\omega$  есть  $r$ -форма в  $E^n$ , определение которой дается соотношением

$$(4) \quad (f^*\omega)(p) \cdot \alpha = \omega(f(p)) \cdot \nabla f(p, \alpha) \text{ для всех } r\text{-векторов } \alpha \text{ в } E^n.$$

В силу (3) для любых дифференциальных форм  $\omega$  и  $\xi$  в  $E^m$  имеем

$$(5) \quad f^*(\omega \vee \xi) = f^*\omega \vee f^*\xi.$$

**15. Якобианы.** Пусть  $f$  — гладкое отображение пространства  $E^n$  (предполагаемого метрическим и ориентированным) в  $E^m$ . Тогда образ при  $\nabla f(p)$  единичного  $n$ -вектора  $\alpha_0$  пространства  $E^n$  есть  $n$ -вектор в  $E^m$ , который мы назовем *якобианом*  $J_f(p)$  отображения  $f$  в точке  $p$ . Пусть, например,  $n = 2$ ,  $m = 3$  и  $(e_1, e_2)$  — ортонормальный базис в  $E^2$ . Образами этих векторов при отображении  $\nabla f(p)$  будут

$$(1) \quad \omega_1(p) = \nabla f(p, e_1), \quad \omega_2(p) = \nabla f(p, e_2),$$

а якобиан в точке  $p$  есть бивектор

$$(2) \quad J_f(p) = \nabla f(p, \alpha_0) = \nabla f(p, e_1 \vee e_2) = \omega_1(p) \vee \omega_2(p).$$

Если  $J_f(p) \neq 0$ , то векторы  $\omega_1(p)$  и  $\omega_2(p)$  независимы, из чего, очевидно, следует, что отображение  $f$  в некоторой окрестности точки  $p$  взаимно однозначно; в этом случае образом окрестности точки  $p$  является гладкий кусок  $S$  некоторой поверхности в  $E^3$ .

Допустим, что  $f$  отображает пространство  $E^n$  в себя. Тогда  $J_f(p)$  является некоторым кратным  $a\alpha_0$   $n$ -вектора  $\alpha_0$ ; число  $a$  мы назовем *алгебраическим якобианом*  $\bar{J}_f(p)$ . Таким образом,

$$(3) \quad J_f(p) = \bar{J}_f(p) \alpha_0, \quad \omega_0 \cdot J_f(p) = \bar{J}_f(p),$$

где  $\omega_0$  — единичный  $n$ -ковектор пространства  $E^n$ . „Якобианом“ обычно называют именно число  $\bar{J}_f(p)$ ; заметим, что  $\bar{J}_f(p)$  не зависит ни от метрики, ни от ориентации пространства  $E^n$ .

Рассмотрим снова случай  $n = 2$ ,  $m = 3$ . Пользуясь ортонормальными координатами  $(s, t)$  в  $E^2$  и  $(x, y, z)$  в  $E^3$ , выпишем

компоненты векторов  $\nabla_{e_i} f(p) = \frac{\partial f(p)}{\partial s}$  и т. д. как тройки чисел. Мы имеем

$$(4) \quad \frac{\partial f(p)}{\partial s} = \left( \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s} \right), \quad \frac{\partial f(p)}{\partial t} = \left( \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right).$$

Найдем „детерминанты-якобианы“

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

Тогда в силу (9.5)

$$(5) \quad J_f(p) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} e_{12} + \frac{\partial(x, z)}{\partial(s, t)} e_{13} + \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)} e_{23}.$$

Определим „вектор-якобиан“  $\tilde{J}_f(p)$  в точке  $p$  как вектор, соответствующий бивектору  $J_f(p)$ ; см. (13.2). В силу (2) и (13.3) мы можем (пользуясь ортонормальными координатами) записать его в виде

$$(6) \quad \tilde{J}_f(p) = \frac{\partial f(p)}{\partial s} \times \frac{\partial f(p)}{\partial t} = w_1(p) \times w_2(p).$$

В силу (13.11) или (13.8)

$$(7) \quad \tilde{J}_f(p) = \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)}, -\frac{\partial(x, z)}{\partial(s, t)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right).$$

**16. Преобразование интеграла.** Пусть  $\omega$  — дифференциальная биформа, равномерно непрерывная на ограниченном открытом множестве  $R$  ориентированной плоскости  $E^2$ . Рассмотрим некоторое гладкое отображение  $f$  ограниченного открытого множества  $R_0$  пространства  $E'^2$  на  $R$  с якобианом  $J_f$ , отличным от нуля во всех точках<sup>1)</sup>. Мы хотим выразить  $\int_R \omega$  как интеграл по  $R_0$ .

Разобьем  $E'^2$  на маленькие прямоугольники, и пусть  $\sigma_1, \dots, \sigma_s$  — те из них, которые лежат в  $R_0$ . Образ  $\tau_i = f(\sigma_i)$  прямоугольника  $\sigma_i$  является маленьким „криволинейным параллелограммом“ в  $R$ . Пусть  $p_i$  — некоторая вершина прямоугольника  $\sigma_i$ , и пусть

<sup>1)</sup> Из этого следует, что отображение  $f$  локально гомеоморфно. Но надо дополнительно предполагать, что отображение  $f: R_0 \rightarrow R$  взаимно однозначно (и, следовательно, гомеоморфно). Без этого сумму (1) нельзя считать аппроксимирующей интеграл  $\int_R \omega$ . — Прим. ред.

$v_{i1}, v_{i2}$  — векторы, идущие по примыкающим к  $p_i$  сторонам прямоугольника  $\sigma_i$ , так что

$$\{\sigma_i\} = v_{i1} \vee v_{i2}.$$

Теперь

$$w_{i1} = \nabla f(p_i, v_{i1}), \quad w_{i2} = \nabla f(p_i, v_{i2})$$

— векторы-стороны параллелограмма  $\tau'_i$ , который хорошо аппроксимирует  $\tau_i$ , если прямоугольник  $\sigma_i$  мал. В силу § 11 сумма

$$(1) \quad \sum \omega(q_i) \cdot \{\tau'_i\}, \quad q_i = f(p_i),$$

очевидно, хорошо аппроксимирует интеграл  $\int_R \omega$ . В силу (14.3)

$$\{\tau'_i\} = w_{i1} \vee w_{i2} = \nabla f(p_i, v_{i1} \vee v_{i2}) = \nabla f(p_i, \{\sigma_i\}),$$

а в силу (14.4) сумма

$$\sum \omega(q_i) \cdot \{\tau'_i\} = \sum \omega(f(p_i)) \cdot \nabla f(p_i, \{\sigma_i\}) = \sum (f^* \omega)(p_i) \cdot \{\sigma_i\}$$

хорошо аппроксимирует интеграл <sup>1)</sup>  $\int_{R_0} f^* \omega$ . Таким образом, мы

видим, что

$$(2) \quad \int_R \omega = \int_{R_0} f^* \omega.$$

[Подробное доказательство приведено в (III, 8).]

Из этой формулы, взяв  $E'^2 = E^2$ , мы выведем обычную формулу, содержащую якобианы. Пусть  $\alpha_0$  — единичный бивектор в  $E^2$ ; тогда

$$\{\tau'_i\} = \nabla f(p_i, \{\sigma_i\}) = |\sigma_i| \nabla f(p_i, \alpha_0) = |\sigma_i| J_f(p_i).$$

Пусть  $\bar{\omega}$  — действительная функция, соответствующая биформе  $\omega$ ; иными словами, пусть

$$(3) \quad \omega(q) = \bar{\omega}(q) \omega_0, \quad \bar{\omega}(q) = \omega(q) \cdot \alpha_0,$$

где  $\omega_0$  — единичный бивектор в  $E^2$ . Тогда в силу (15.3)

$$\bar{\omega}(q_i) |\tau'_i| = \omega(q_i) \cdot \{\tau'_i\} = \bar{\omega}(q_i) \omega_0 \cdot |\sigma_i| J_f(p_i) = \bar{\omega}(q_i) \bar{J}_f(p_i) |\sigma_i|.$$

---

<sup>1)</sup> Из этого вывода видно, что ориентация плоскости  $E'^2$  должна быть выбрана так, чтобы отображение  $f: R_0 \rightarrow R$  сохраняло ориентацию. Действительно, бивектор  $\{\sigma_i\}$  переходит в бивектор  $\{\tau'_i\}$ , и именно эти бивекторы используются при интегрировании. — Прим. ред.

Суммируя и переходя к пределу, мы получаем

$$(4) \quad \int_R \bar{\omega} = \int_{R_0} \bar{\omega}(f(p)) \bar{J}_f(p) dp$$

(в обоих случаях используется интеграл Римана).

Такие же формулы имеют место для любого числа измерений. Заметим, что ни одна из частей равенства (2) не зависит от выбора метрики.

**17. Гладкие многообразия.** В качестве типичного примера мы возьмем некоторый кусок  $S$  гладкой поверхности в  $E^3$ . В каждой точке  $p \in S$  существует касательная плоскость  $T(p)$ . Некоторая окрестность  $U$  точки  $p$  в  $T(p)$  взаимно однозначно проектируется на  $S$ . Система координат в  $T(p)$  при проектировании переходит в систему координат в  $S$ ; эта система координат представляет собой гладкое отображение части пространства  $\mathbb{R}^2$  пар действительных чисел в  $S$ . Там, где две такие системы координат перекрываются, они связаны гладким отображением части пространства  $\mathbb{R}^2$  в себя с не обращающимся в нуль якобианом. Это подсказывает нам общее определение гладкого многообразия, использующее такие системы координат, без ссылки на какое бы то ни было объемлющее пространство, как в (II, 10).

Пусть  $S$  — кусок поверхности, как и выше, и  $v$  — вектор в  $T(p)$ . Точки  $p_t = p + tv$  в  $T(p)$  проектируются в точки  $q_t$  на  $S$  (при не слишком большом  $t$ ). Эти точки  $q_t$  образуют на  $S$  „параметризованную кривую“  $C$ , которая, можно считать, определяет соответствующий вектор „поверхности  $S$ “ в точке  $p$ . Вместо точек  $p_t$  мы могли бы воспользоваться любой функцией  $p'_t$  в  $T(p)$ , удовлетворяющей условию  $p'_0 = p$  и имеющей тот же самый касательный вектор при  $t = 0$ :  $(\partial p'_t / \partial t)_{t=0} = v$ . Эти точки проектировались бы на  $S$  в некоторую параметризованную кривую  $C'$ , эквивалентную  $C$ . Мы можем воспользоваться определениями векторов  $av$  и  $v + w$  в  $T(p)$ , чтобы дать соответствующие определения на  $S$  в точке  $p$ . Векторы на  $S$  в точке  $p$  теперь образуют векторное пространство  $V(p)$ . С помощью этого векторного пространства мы можем определить  $r$ -векторы и  $r$ -ковекторы на  $S$  в точке  $p$ ; поэтому мы можем определить на  $S$  дифференциальные формы. В произвольном гладком многообразии (которое не предполагается лежащим в евклидовом пространстве) мы можем определить векторы в точке с помощью параметризованных кривых, а сложение векторов — с помощью систем координат.

Чтобы определить  $r$ -мерное интегрирование в  $n$ -мерном многообразии  $M$ , нужно прежде всего выбрать простые  $r$ -мерные области интегрирования;  $r$ -мерные (прямолинейные) клетки там определить нельзя. В качестве таких областей можно выбрать ориентированные куски  $r$ -мерных подмногообразий многообразия  $M$ . Перед нами возникает теперь задача определения интеграла от  $r$ -формы  $\omega$  по ориентированному куску  $r$ -мерного многообразия.

Пусть сначала  $n = 1$ ; в этом случае мы имеем абстрактно определенную ориентированную кривую  $C$ . Она, конечно, эквивалентна отрезку действительной оси. Теперь определяется интеграл  $\int_C \omega$  для 1-формы  $\omega$ . Допустим, что  $C$  лежит в  $E^3$  и форма  $\omega$  определена в окрестности кривой  $C$ . Пусть  $p_0, p_1, \dots, p_m$  — разбиение кривой  $C$  на маленькие дуги. Тогда векторы  $p_{i+1} - p_i$  почти касаются кривой  $C$  и сумма

$$(1) \quad \sum_{i=0}^{m-1} \omega(p_i) \cdot \{p_i p_{i+1}\} = \sum_{i=0}^{m-1} \omega(p_i) \cdot (p_{i+1} - p_i)$$

аппроксимирует интеграл  $\int_C \omega$ .

Возьмем снова ориентированный кусок  $S$  некоторой поверхности в  $E^3$ . Считая, что  $S$  — небольшой кусок, мы можем разбить его на маленькие криволинейные куски  $\tau_1, \dots, \tau_s$ , например, взяв образы  $f(\tau_1), \dots, f(\tau_s)$  прямоугольников в некоторой системе координат (ср. области  $\tau_i$  в § 16). Мы можем, далее, составить сумму

$$(2) \quad \sum \omega(q_i) \cdot (\omega_{j_1} \vee \omega_{j_2}),$$

где  $\omega_{j_1}, \omega_{j_2}$  — касательные векторы в вершине  $q_i$  куска  $\tau_i$ , и воспользоваться этой суммой для аппроксимации интеграла  $\int_S \omega$ ;

ср. (16.1). На основании (16.2) мы видим, что можем равносильно определить  $\int_S \omega$  или  $\int_{S_0} f^* \omega$ , если  $S = f(S_0)$ , где  $S_0$  — часть евклидовой плоскости.

Последнее определение не зависит от того факта, что поверхность  $S$  лежит в  $E^3$ . Если же  $S$  лежит в  $E^3$  и форма  $\omega$  определена всюду в некоторой окрестности поверхности  $S$  в пространстве  $E^3$ , то для определения интеграла мы могли бы воспользоваться полиэдральными аппроксимациями; см. гл. X.

**18. Частные виды интегралов в трехмерном пространстве.** Здесь мы имеем  $r$ -мерное интегрирование для  $r = 0, 1, 2$  и 3.

Пусть  $E^3$  — метрическое и ориентированное пространство. Тогда произвольный  $r$ -ковектор в  $E^3$  соответствует либо действительному числу, либо вектору (см. § 13). Это дает нам специальные виды интегралов, которые мы и рассмотрим.

Случай  $r=0$ . Нульмерная клетка есть некоторая точка  $p$  (без свойств ориентации). Далее, любой 0-ковектор есть действительное число; поэтому всякая 0-форма является действительной функцией. Интеграл от 0-формы  $\varphi$  по нульмерной клетке  $p$  есть число  $\varphi(p)$ . Нульмерная полиэдральная цепь есть выражение  $A = \sum a_i p_i$ , а интеграл от  $\varphi$  по  $A$  равен

$$(1) \quad \int_A \varphi = \sum a_i \varphi(p_i).$$

В частности, если  $\sigma$  — одномерная ориентированная клетка  $pq$ , то

$$(2) \quad \partial(pq) = 1q + (-1)p, \quad \int_{\partial(pq)} \varphi = \varphi(q) - \varphi(p).$$

Случай  $r=1$ . Сумма, аппроксимирующая интеграл  $\int_C \omega^1$ , где  $C$  — ориентированная кривая, а  $\omega^1$  — некоторая 1-форма, была указана в (17.1). Заменим форму  $\omega^1$  следующей вектор-функцией  $v$  в  $E^3$ . Для каждой точки  $p$   $v(p)$  есть такой вектор, что скалярное произведение  $v(p) \cdot w$  равно  $\omega^1(p) \cdot w$  для всех векторов  $w$ ; см. § 12. В обычной терминологии касательный вектор вдоль  $C$  называется „линейным элементом“  $ds$ , а интеграл обычно записывается в виде [мы пользуемся (17.1)]

$$(3) \quad \int_S \omega^1 = \int_S v \cdot ds = \lim \sum v(p_i) \cdot (p_{i+1} - p_i).$$

Это — „циркуляция“ вектора  $v$  вдоль кривой  $C$ .

Случай  $r=2$ . В этом случае сумма, аппроксимирующая интеграл  $\int_S \omega^2$ , была указана в (17.2). Биформа  $\omega^2$  следующим образом соответствует некоторой вектор-функции  $v$ . Для каждой точки  $p$   $\omega^2(p) = \Psi_{v(p)}$ , как в (13.1). Это соотношение дает

$$\omega^2(p) \cdot \alpha = \omega_0[v(p) \vee \alpha] \quad \text{для всех бивекторов } \alpha.$$

Отсюда в силу (13.4)

$$(4) \quad \omega^2(q_i) \cdot (w_{i1} \vee w_{i2}) = \omega_0 \cdot [w_{i1} \vee w_{i2} \vee v(q_i)] = (w_{i1} \times w_{i2}) \cdot v(q_i);$$

в обозначениях (17.2) сумма этих величин аппроксимирует интеграл  $\int_S \omega^2$ . Вектор

$$(5) \quad \mathbf{N}_i = \omega_{i1} \times \omega_{i2}$$

называется „элементом поверхности“ в точке  $q_i$ , и, по аналогии с (3), интеграл записывается в виде

$$(6) \quad \int_S \omega^2 = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{N} = \lim \sum \mathbf{v}(q_i) \cdot \mathbf{N}_i.$$

Это — „поток“ вектора  $\mathbf{v}$  через поверхность  $S$  (см. § 5).

Случай  $r=3$ . Интеграл  $\int_R \omega^3$  определяется для областей  $R$  в ориентированном пространстве  $E^3$  и для 3-формы  $\omega^3$ . Пусть  $\omega_0$  — единичный 3-ковектор. Тогда  $\omega^3(p) = \bar{\omega}(p) \omega_0$ , где  $\bar{\omega}$  — действительная функция, как в (16.3), и

$$(7) \quad \int_R \omega^3 = \int_R \bar{\omega}.$$

Последний интеграл является интегралом Римана. Если мы разобьем  $R$  на маленькие клетки  $\sigma_i$ , ориентированные так же, как и  $E^3$ , и выберем в каждой клетке  $\sigma_i$  точку  $p_i$ , то

$$(8) \quad \sum \omega^3(p_i) \cdot \{\sigma_i\} = \sum \bar{\omega}(p_i) \cdot |\sigma_i|$$

есть сумма, аппроксимирующая интеграл.

**19. Теорема Стокса.** Пусть  $\omega$  — гладкая  $r$ -форма в  $E^n$ . Тогда общая теорема Стокса утверждает, что в  $E^n$  существует такая  $(r+1)$ -форма  $\omega' = d\omega$ , что для любого ориентированного куска  $M$  гладкого многообразия размерности  $r+1$  в  $E^n$  с границей  $\partial M$

$$(1) \quad \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Из общих рассуждений мы увидим, что форма  $\omega'$  должна существовать; мы найдем ее вид в следующем параграфе. Обычная формула в  $E^3$  приводится в § 21.

Определим  $r$ -мерную коцепь  $X$  в  $E^n$  соотношением

$$(2) \quad X \cdot \sigma = \int_{\sigma} \omega \quad \text{для всех } r\text{-мерных ориентированных клеток } \sigma.$$

Определим, далее,  $(r+1)$ -мерную кощепь  $Y = dX$  формулой

$$(3) \quad Y \cdot \tau = X \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \tau} = \int_{\partial \tau} \omega \quad \text{для всех } (r+1)\text{-мерных ориентированных клеток } \tau;$$

ср. (1.2). Можно доказать, что  $X$  удовлетворяет гипотезе  $(H'_2)$ , или, иначе говоря, что  $Y$  удовлетворяет гипотезе  $(H'_1)$ ; см. (V, 10). Тот факт, что  $Y$  удовлетворяет гипотезе  $(H'_2)$ , тривиален: для любой  $(r+2)$ -мерной ориентированной клетки  $\tau'$

$$4) \quad Y \cdot \partial \tau' = X \cdot \partial \partial \tau' = X \cdot 0 = 0.$$

Таким образом,  $Y$  является  $(r+1)$ -мерной бемольной кощепью. Мы называем ее *кограницей*  $dX$  кощепи  $X$ . Если мы предположим, что частные производные от  $\omega$  удовлетворяют условию Липшица, то мы сможем показать, что кощепь  $Y$  является дизъюнктивной. Тогда существует (§ 11) такая соответствующая  $(r+1)$ -форма  $\omega' = D_Y$ , что

$$\int_{\tau} \omega' = Y \cdot \tau = \int_{\partial \tau} \omega,$$

и мы получаем формулу (1) для клеток, а поэтому и для  $M$ . [Конечно, форма  $\omega'$  существует при значительно более общих условиях; см., например, (III, 16) и (IX, 12).]

**20. Внешний дифференциал.** Для данной гладкой  $r$ -формы  $\omega$  в пространстве  $E^n$   $(r+1)$ -форма  $\omega' = d\omega$  из § 19 называется *внешним дифференциалом* формы  $\omega$ . Пользуясь аффинной системой координат  $(x^1, \dots, x^n)$  в  $E^n$ , мы хотим выразить компоненты формы  $\omega'$  через компоненты формы  $\omega$ .

Возьмем сначала  $r=0$ . Пусть задана точка  $p$ ; положим (при некотором  $i=1, 2, \dots, n$ )  $p_t = p + te_i$  и рассмотрим отрезок  $pp_t$  ( $t > 0$ ).

Так как

$$\int_0^t \omega'_i dx^i = \int_{pp_t} \omega' = \int_{\partial(pp_t)} \omega = \omega(p_t) - \omega(p) = \int_0^t \frac{\partial \omega}{\partial x^i} dx^i,$$

то мы должны иметь

$$(1) \quad r=0: \quad \omega'_i = \frac{\partial \omega}{\partial x^i}.$$

Возьмем далее  $r=1$ . Пусть заданы  $p, i, j$ ; мы будем писать  $x, y$  вместо  $x^i$  и  $x^j$  и отбросим остальные координаты. Возьмем

любые  $h, k > 0$ ; пусть  $\sigma$  — ориентированный прямоугольник с вершинами

$$p = (x, y), \quad p' = (x + h, y), \quad p'' = (x + h, y + k), \quad p''' = (x, y + k).$$

Так как  $\int_{p'}^{p''} \omega = \int_y^{y+k} \omega_j(x + h, t) dt$  и т. д., то мы имеем

$$(2) \quad \int_{\partial\sigma} \omega = \int_y^{y+k} [\omega_j(x + h, t) - \omega_j(x, t)] dt - \\ - \int_x^{x+h} [\omega_i(s, y + k) - \omega_i(s, y)] ds.$$

Теперь

$$\omega_j(x + h, t) - \omega_j(x, t) = \int_x^{x+h} \frac{\partial}{\partial x} \omega_j(s, t) ds,$$

и аналогично для второй подинтегральной функции. Поэтому мы должны иметь

$$(3) \quad \int_{\sigma} \omega' = \int_{\partial\sigma} \omega = \int_x^{x+h} \int_y^{y+k} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \omega_j(s, t) - \frac{\partial}{\partial y} \omega_i(s, t) \right] dt ds.$$

Взяв  $h$  и  $k$  произвольно малыми, мы получаем отсюда

$$(4) \quad r = 1: \quad \omega'_{ij} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}.$$

Тем же методом можно воспользоваться в общем случае. В частности,

$$(5) \quad r = 2: \quad \omega'_{ijk} = \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k}.$$

Существуют аналогичные формулы, связывающие непосредственно  $\omega$  и  $\omega'$ . Например,

$$(6) \quad r = 1: \quad d\omega(p) \cdot (v \vee w) = \nabla_v [\omega(p) \cdot w] - \nabla_w [\omega(p) \cdot v].$$

Упомянем некоторые общие свойства. Для любой  $r$ -формы  $\omega$  и  $s$ -формы  $\xi$

$$(7) \quad d\omega = 0, \quad d(\omega \vee \xi) = d\omega \vee \xi + (-1)^r \omega \vee d\xi.$$

Если  $f$  — гладкое отображение одного евклидова пространства в другое и  $\omega$  — некоторая  $r$ -форма во втором из них, то

$$(8) \quad df^* \omega = f^* d\omega,$$

Если  $\omega$  — некоторая  $r$ -форма, определенная на многообразии, то мы можем определить  $d\omega$  с помощью системы координат; ввиду (8) это определение не зависит от системы координат, которой мы воспользовались. Указанные выше свойства, за исключением свойства (6), остаются справедливыми.

**21. Некоторые специальные формулы в метрическом ориентированном пространстве  $E^3$ .** Приведем примеры внешнего дифференциала и теоремы Стокса.

Случай  $r=0$ . В этом случае внешний дифференциал есть просто дифференциал, т. е. градиент,  $d\varphi = \vec{\nabla}\varphi$ . (Эта формула неверна при  $r > 0$ .) С помощью „набла“-оператора

$$\vec{\nabla} = e_1 \frac{\partial}{\partial x} + e_2 \frac{\partial}{\partial y} + e_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

вектор-функция, соответствующая форме  $d\varphi$  (см. § 18), записывается в виде

$$(1) \quad \vec{\nabla}\varphi = \text{grad}(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} e_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y} e_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z} e_3.$$

Для ориентированной кривой  $C$ , идущей от точки  $p$  до точки  $q$ , формула (19.1) в обозначениях § 18 дает

$$(2) \quad \int_C \vec{\nabla}\varphi \, ds = \int_C \text{grad}(\varphi) \cdot ds = \int_C d\varphi = \varphi(q) - \varphi(p).$$

В случае, когда  $C$  — отрезок действительной оси, это — „основная теорема интегрального исчисления“.

Случай  $r=1$ . Если в  $E^3$  задана гладкая вектор-функция  $v$ , то существует соответствующая 1-форма  $\omega$ ; ее внешний дифференциал  $\omega' = d\omega$  представляет собой функцию, значениями которой являются биковекторы, и этой функции соответствует вектор-функция  $v'$ , называемая *вихрем* вектор-функции  $v$ . Ввиду (10.2)  $\omega_i = v^i$ , а на основании (13.10)

$$(3) \quad \omega'_{12} = v'^3, \quad \omega'_{13} = -v'^2, \quad \omega'_{23} = v'^1.$$

Поэтому в силу (20.4)

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times v = \text{rot}(v) = \left( \frac{\partial v^3}{\partial y} - \frac{\partial v^2}{\partial z} \right) e_1 + \left( -\frac{\partial v^3}{\partial x} + \frac{\partial v^1}{\partial z} \right) e_2 + \left( \frac{\partial v^2}{\partial x} - \frac{\partial v^1}{\partial y} \right) e_3.$$

Для ориентированного куска  $S$  поверхности с граничной кривой  $C$  формула (19.1) дает

$$(5) \quad \int_S (\vec{\nabla} \times v) \cdot d\mathbf{N} = \int_S \text{rot}(v) \cdot d\mathbf{N} = \int_C v \cdot ds.$$

Именно эта формула обычно называется „формулой Стокса“.

Случай  $r=2$ . Если задана гладкая вектор-функция  $v$ , то существует соответствующая биформа  $\omega$ , и  $d\omega = \omega'$  есть 3-форма, соответствующая, как в (16.3), некоторой действительной функции  $\bar{\omega}'$ , называемой *дивергенцией* вектор-функции  $v$ . Связь между  $v$  и  $\omega$  дается формулами (3); кроме того,  $\bar{\omega}' = \omega'_{123}$ . Поэтому в силу (20.5)

$$(6) \quad \vec{\nabla} \cdot v = \text{div}(v) = \frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial v^3}{\partial z}.$$

Для области  $R$  (ориентированной так же, как и  $E^3$ ) с границей  $S$  формула (19.1) дает

$$(7) \quad \int_R \vec{\nabla} \cdot v \, dR = \int_R \text{div}(v) \, dR = \int_S v \cdot d\mathbf{N},$$

где  $dR$  — элемент объема.

Взяв в (5) или (7) какие-нибудь определенные вектор-функции, мы получим конкретные стандартные формулы. Напомним, что все эти формулы являются частными случаями формулы (19.1), справедливой независимо от метрики пространства.

Формула  $d\omega = 0$  в случаях  $r=0$  и  $r=1$  дает

$$(8) \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = \text{rot}(\text{grad}(\varphi)) = 0,$$

$$(9) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \varphi) = \text{div}(\text{rot}(\varphi)) = 0.$$

Эти формулы легко проверить непосредственно.

Мы можем начать с действительной функции  $\varphi$ , найти ее градиент, затем интерпретировать его как вектор-функцию и найти ее дивергенцию, представляющую собой снова действительную функцию; это — *лапласиан* функции  $\varphi$ . В силу (1) и (6) он равен

$$(10) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

По своему определению правая часть не зависит от выбора ортонормальной системы координат.

**22. Теорема существования.** В выпуклом подмножестве пространства  $E^3$  любая вектор-функция является градиентом, если только ее вихрь равен нулю (в этом случае она обычно называется точным дифференциалом); любая вектор-функция является вихрем,

если только ее дивергенция равна нулю; и любая действительная функция является дивергенцией. (Функции предполагаются гладкими.) Все это — частные случаи общей теоремы о том, что гладкая  $r$ -форма  $\omega$  ( $r \geq 1$ ) в выпуклом подмножестве пространства  $E^n$  равна  $d\xi$  для некоторой  $(r-1)$ -формы  $\xi$  в том и только в том случае, если  $d\omega = 0$ . Заметим, что для 0-формы  $\varphi$  (действительной функции)  $d\varphi = 0$  в том и только в том случае, если  $\varphi$  постоянна. Теорема теряет силу для более общих подмножеств пространства  $E^n$  и для многообразий; см. следующий параграф.

Приведем для различных значений  $n$  и  $r$  формулы, которые мы будем обозначать символом  $(n; r)$ , выражающие компоненты одной из возможных  $(r-1)$ -форм  $\xi$  через компоненты  $r$ -формы  $\omega$ , заданной в кубе пространства  $E^n$ , содержащем начало координат. Для  $n = r = 1$  положим

$$(1; 1) \quad \xi(x) = \int_0^x \omega_1(t) dt;$$

тогда  $(d\xi)_1(x) = \frac{d\xi(x)}{dx} = \omega_1(x)$ , и поэтому  $d\xi = \omega$ .

Для  $n = 2, r = 1$  мы осуществим ту же идею с помощью интегрирования вдоль пути от  $(0, 0)$  до  $(0, y)$  и затем от  $(0, y)$  до  $(x, y)$ :

$$(2; 1) \quad \xi(x, y) = \int_0^y \omega_2(0, t) dt + \int_0^x \omega_1(s, y) ds.$$

Тогда  $\partial \xi(x, y) / \partial x = \omega_1(x, y)$ , и так как  $\partial \omega_2 / \partial x - \partial \omega_1 / \partial y = 0$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi(x, y)}{\partial y} &= \omega_2(0, y) + \int_0^x \frac{\partial \omega_1(s, y)}{\partial y} ds = \\ &= \omega_2(0, y) + [\omega_2(x, y) - \omega_2(0, y)] = \omega_2(x, y). \end{aligned}$$

Выпишем еще несколько случаев:

$$(2; 2) \quad \xi_1(x, y) = 0, \quad \xi_2(x, y) = \int_0^x \omega_{12}(s, y) ds;$$

$$\begin{aligned} (3; 1) \quad \xi(x, y, z) &= \int_0^z \omega_3(0, 0, u) du + \\ &+ \int_0^y \omega_2(0, t, z) dt + \int_0^x \omega_1(s, y, z) ds; \end{aligned}$$

$$(3; 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1(x, y, z) = 0, \quad \xi_2(x, y, z) = \int_0^x \omega_{12}(s, y, z) ds, \\ \xi_3(x, y, z) = \int_0^y \omega_{23}(0, t, z) dt + \int_0^x \omega_{13}(s, y, z) ds; \end{array} \right.$$

$$(3; 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_{12}(x, y, z) = \xi_{13}(x, y, z) = 0, \\ \xi_{23}(x, y, z) = \int_0^x \omega_{123}(s, y, z) ds. \end{array} \right.$$

Общее доказательство существования  $(r-1)$ -формы  $\xi$  будет дано в (IV, 25).

**23. Теорема де Рама.** Теорема де Рама связывает дифференциальные формы в многообразии с гомологическими и когомологическими свойствами этого многообразия; см. теорему (IV, 29A). Мы кратко обсудим эту теорему для случая тора и размерности 1.

Точки тора  $M$  описываются заданием пары угловых координат  $(\theta, \psi)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ , где  $\theta = 0$  отождествляется с  $\theta = 2\pi$ , и точно такое же отождествление производится для  $\psi$ . Таким образом, мы имеем

$$(1) \quad (0, \psi) = (2\pi, \psi), \quad (\theta, 0) = (\theta, 2\pi).$$

Когда  $\theta$  меняется от 0 до  $2\pi$ , точки  $(\theta, 0)$  описывают ориентированную замкнутую кривую  $C_1$ ; подобным же образом точки  $(0, \psi)$  описывают кривую  $C_2$ . Пусть теперь  $C$  — любая ориентированная замкнутая кривая. Элементарное рассуждение показывает, что кривую  $C$  можно продеформировать в ориентированную замкнутую кривую  $C'$ , которая  $\mu_1$  раз обходит кривую  $C_1$ , а затем  $\mu_2$  раз кривую  $C_2$ , где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — некоторые целые числа. При  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  кривая  $C'$  представляет собой точку.

Дифференциальную форму  $\omega$  мы будем называть *замкнутой*, если  $d\omega = 0$ , и *производной*, если  $\omega = d\xi$  для некоторой формы  $\xi$ . Так как  $d d\xi = 0$ , то любая производная форма замкнута. Назовем  $\omega$  и  $\omega'$  *когомологичными*, если форма  $\omega - \omega'$  является производной. Каждая замкнутая  $r$ -форма вместе со всеми когомологичными ей формами образует *класс  $r$ -мерных дифференциальных когомологий* (с действительными коэффициентами) в  $M$ ; множество всех таких классов образует *пространство  $r$ -мерных дифференциальных когомологий*  $H^r$ . По теореме де Рама оно изоморфно

пространству  $r$ -мерных алгебраических когомологий<sup>1)</sup> с действительными коэффициентами.

Основными периодами замкнутой 1-формы  $\omega$  на торе называются числа

$$(2) \quad P_1(\omega) = \int_{C_1} \omega, \quad P_2(\omega) = \int_{C_2} \omega.$$

Для любой формы  $\omega'$ , когомологичной  $\omega$ , формула Стокса дает

$$P_i(\omega') - P_i(\omega) = \int_{C_i} (\omega' - \omega) = \int_{C_i} d\xi = \int_{\partial C_i} \xi = 0,$$

так как кривая  $C_i$  замкнута. Поэтому мы можем говорить об основных периодах класса дифференциальных когомологий. Мы покажем, что существует единственный класс, имеющий в качестве периодов любую данную пару чисел. Это и есть первоначальная формулировка теоремы де Рама в рассматриваемой ситуации.

Определим замкнутые 1-формы

$$(3) \quad \omega_1^* = d\theta, \quad \omega_2^* = d\psi.$$

Хотя функции  $\theta$  и  $\psi$  ввиду (1) не являются на  $M$  однозначными, однако ясно, что формы  $\omega_1^*$  и  $\omega_2^*$  однозначны. Основные периоды форм  $\omega_1^*$  и  $\omega_2^*$  равны  $(2\pi, 0)$  и  $(0, 2\pi)$  соответственно; поэтому

$$(4) \quad P_1(a\omega_1^* + b\omega_2^*) = 2\pi a, \quad P_2(a\omega_1^* + b\omega_2^*) = 2\pi b.$$

Таким образом, существуют замкнутые формы с произвольными заданными основными периодами.

Заметим далее, что если ориентированная замкнутая кривая  $C$  продеформирована, как выше, в кривую  $C'$ , то для любой замкнутой 1-формы  $\omega$

$$(5) \quad \int_C \omega = \int_{C'} \omega = \mu_1 P_1(\omega) + \mu_2 P_2(\omega).$$

В самом деле, мы можем найти последовательность кривых  $C_0 = C, C_1, \dots, C_m = C'$ , обладающую следующими свойствами: для каждого  $i$  существует такая ориентированная двумерная клетка  $\sigma_i$  с границей  $\partial\sigma_i = B_i - A_i$ , что кривая  $C_{i+1}$  содержит дугу  $B_i$ ,

<sup>1)</sup> См. (П. II, 8). — Прим. ред.

$C_i$  содержит дугу  $A_i$ , а в остальной своей части кривые  $C_i$  и  $C_{i+1}$  совпадают. В таком случае

$$\int_{C_{i+1}} \omega - \int_{C_i} \omega = \int_{\partial \sigma_i} \omega = \int_{\sigma_i} d\omega = 0,$$

и первое равенство в (5) доказано; второе же очевидно.

Мы должны еще показать, что если  $\omega$  и  $\omega'$  — замкнутые формы с одними и теми же основными периодами, то их разность  $\eta = \omega' - \omega$  является производной,  $\eta = d\varphi$ . Мы можем определить форму  $\varphi$  по формуле (2; 1) § 22:

$$(6) \quad \varphi(\theta, \psi) = \int_0^\psi \eta_2(0, t) dt + \int_0^\eta \eta_1(s, \psi) ds.$$

Пользуясь формулой (6), нетрудно показать, что  $\varphi$  определяется однозначно:

$$\varphi(\theta, 2\pi) - \varphi(\theta, 0) = \int_0^{2\pi} \eta_2(0, t) dt = \int_{C_1} \eta = 0.$$

Аналогично  $\varphi(2\pi, \psi) = \varphi(0, \psi)$ . Тот же факт, что  $d\varphi = \eta$ , доказывается, как в § 22.

Заметим, что для любой ориентированной замкнутой кривой  $C$  соответствующие ей числа  $\mu_1, \mu_2$  мы можем найти с помощью форм  $\omega_1^*, \omega_2^*$ . Пусть кривая  $C'$  определяется, как и раньше. Тогда

$$(7) \quad \int_C \omega_i^* = \int_{C'} \omega_i^* = \mu_1 P_1(\omega_i^*) + \mu_2 P_2(\omega_i^*) = 2\pi\mu_i.$$

Теорема де Рама связывает также произведения форм с произведениями классов алгебраических когомологий или пересечениями циклов. Мы укажем одну формулу такого вида. Очевидно,  $\omega_1^* \vee \omega_2^*$  есть единичная 2-ковектор-функция в  $M$ ; поэтому

$$(8) \quad \int_M \omega_1^* \vee \omega_2^* = 4\pi^2.$$

Отсюда для любых замкнутых форм  $\omega_1, \omega_2$  легко следует, что

$$(9) \quad \int_M \omega_1 \vee \omega_2 = 4\pi^2 [P_1(\omega_1) P_2(\omega_2) - P_2(\omega_1) P_1(\omega_2)];$$

мы пользуемся здесь тем фактом, что форма  $\omega_i$  когомологична форме

$$\omega_i' = a_i \omega_1^* + b_i \omega_2^*.$$

### С. Набросок общей теории

**24. Нормированные пространства цепей и коцепей.** Пусть в  $E^n$  дана  $r$ -мерная бемольная коцепь  $X$  (§ 3), и пусть  $|X|$  и  $|dX|$  — наименьшие числа  $N_1$  и  $N_2$ , для которых соответственно удовлетворяются неравенства (3.1) и (3.2). Тогда функция бемольной коцепи

$$(1) \quad |X|^b = \sup \{ |X|, |dX| \}$$

является нормой, *бемольной нормой*, а линейное пространство  $r$ -мерных бемольных коцепей с этой нормой становится банаховым пространством  $C^{br}$ .

Пусть *масса* полиэдральной  $r$ -мерной цепи  $A = \sum a_i \sigma_i$  определяется как число

$$(2) \quad |A| = \sum |a_i| |\sigma_i| \quad (\text{если клетки } \sigma_i \text{ не перекрываются}).$$

Тогда из определения числа  $|X|$  следует  $|X \cdot A| \leq |X| |A|$ ; точно так же

$$|X \cdot \partial D| \leq |dX| |D| \quad \text{для всех } (r+1)\text{-мерных полиэдральных цепей } D.$$

Пусть даны  $X$  и  $A$ ; возьмем любую  $(r+1)$ -мерную полиэдральную цепь  $D$ . Тогда

$$\begin{aligned} |X \cdot A| &= |X \cdot (A - \partial D) + X \cdot \partial D| \leq \\ &\leq |X| |A - \partial D| + |dX| |D| \leq |X|^b (|A - \partial D| + |D|). \end{aligned}$$

Это неравенство наводит на мысль определить *бемольную норму*  $r$ -мерной полиэдральной цепи  $A$  соотношением

$$(3) \quad |A|^b = \inf \{ |A - \partial D| + |D| \} \quad \text{по всем } (r+1)\text{-мерным полиэдральным цепям } D.$$

Это — норма в пространстве  $r$ -мерных полиэдральных цепей, и притом наименьшая из таких норм, что для всех бемольных коцепей  $X$

$$(4) \quad |X \cdot A| \leq |X|^b |A|^b.$$

Возьмем для примера одномерную ориентированную клетку  $\sigma$ , и пусть  $\sigma' = T_v \sigma$  обозначает ту же клетку, сдвинутую на вектор  $v$ . Тогда  $\sigma$  и  $\sigma'$  являются двумя сторонами (длины  $|\sigma|$ ) параллелограмма  $\tau$ ; другие две стороны  $A, B$  имеют длину  $|v|$ , и мы получаем  $|\tau| \leq |\sigma| |v|$ . Поэтому

$$(5) \quad |T_v \sigma - \sigma|^b \leq |T_v \sigma - \sigma - \partial \tau| + |\tau| \leq (2 + |\sigma|) |v|.$$

Так как

$$|X \cdot (T_v \sigma - \sigma)| \leq |X|^b |T_v \sigma - \sigma|^b \leq (2 + |\sigma|) |X|^b |v|,$$

то, если вектор  $v$  мал, число  $X \cdot T_v \sigma$  будет близко к  $X \cdot \sigma$ .

Каждая  $r$ -мерная бемольная коцепь  $X$  имеет *кограницу*  $dX$ , которая является  $(r+1)$ -мерной бемольной коцепью, определяемой условием

$$(6) \quad dX \cdot B = X \cdot \partial B \quad \text{для всех } (r+1)\text{-мерных полиэдральных цепей } B.$$

Это соотношение является абстрактным эквивалентом формулы Стокса (19.1).

Пространство  $r$ -мерных полиэдральных цепей с бемольной нормой не является полным; если мы пополним его, то получим пространство  $C_r^b$   $r$ -мерных бемольных цепей. Теперь  $C^{br}$  является пространством, сопряженным к  $C_r^b$ .

Подобным же образом мы можем определить *дизные нормы*  $|X|^\#$  коцепей и дизные нормы  $|A|^\#$   $r$ -мерных полиэдральных цепей. Пополнение пространства  $r$ -мерных цепей с дизной нормой приводит к пространству  $C_r^\#$   $r$ -мерных дизных цепей, содержащему пространство  $C_r^b$ .

Теперь теория интегрирования может быть построена следующим образом. Определяем норму (например, дизную или бемольную) в линейном пространстве  $r$ -мерных полиэдральных цепей; тогда „интегрируемое“ (коцепь)  $X$  есть ограниченная линейная функция на этом пространстве; она удовлетворяет условиям непрерывности, зависящим от выбранной нормы. Интеграл  $X \cdot A = \int_A D_X$  определяется теперь не только по  $r$ -мерным полиэдральным цепям, но также и по всем элементам пополненного пространства цепей; при надлежащем выборе нормы это пространство будет содержать кривые куски  $r$ -мерных многообразий и т. д. Такова программа, которую выполняем, начиная с гл. V.

**25. Непрерывные цепи.** Возвратимся на некоторое время к тору  $M$  из § 23. Пусть  $C_{1\psi}$  — ориентированная замкнутая кривая, описываемая точкой  $(\theta, \psi)$ , когда  $\theta$  меняется от 0 до  $2\pi$ . Так как кривая  $C_{1\psi}$  может быть продеформирована в  $C_1$ , то для любой замкнутой 1-формы  $\omega$  на  $M$  мы имеем

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} [\omega(\theta, \psi) \cdot e_1] d\theta = \int_0^{2\pi} \omega_1(\theta, \psi) d\theta = \int_{C_{1\psi}} \omega = P_1(\omega),$$

где  $e_1$  — единичный вектор, идущий в  $\theta$ -направлении. Интегрируя по  $\psi$  и деля на  $2\pi$ , получаем

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_M \omega \cdot e_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [\omega(\theta, \psi) \cdot e_1] d\theta d\psi = P_1(\omega).$$

С помощью этой формулы  $P_1(\omega)$  выражается через интеграл Римана от  $\omega \cdot e_1$  по всему  $M$ . Мы имеем здесь одномерный интеграл  $P_1(\omega)$  под видом двумерного интеграла.

Зададим теперь вопрос: нельзя ли, *отбросив ограничение, состоящее в том, что форма  $\omega$  замкнута*, истолковать левую часть формулы (2) как одномерный интеграл? Мы можем это сделать следующим образом. Прежде всего, кривые  $C_{1\psi}$  можно рассматривать как простые одномерные фигуры и по определению положить

$$X \cdot C_{1\psi} = \int_{C_{1\psi}} \omega = F(\psi).$$

Теперь возьмем мелкое подразделение  $\mathfrak{S}$  отрезка  $[0, 2\pi]$ , задаваемое точками  $\psi_0 = 0, \psi_1, \dots, \psi_m = 2\pi$ . Определим для  $\mathfrak{S}$  одномерную цепь (аналогичную одномерной полиэдральной цепи)

$$(3) \quad A_{\mathfrak{S}} = \sum_{i=0}^{m-1} (\psi_{i+1} - \psi_i) C_{1\psi_i}.$$

Тогда

$$X \cdot A_{\mathfrak{S}} = \sum (\psi_{i+1} - \psi_i) X \cdot C_{1\psi_i} = \sum F(\psi_i) (\psi_{i+1} - \psi_i).$$

Взяв последовательность  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$  подразделений, степени мелкости которых  $\rightarrow 0$ , мы получим

$$(4) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} X \cdot A_{\mathfrak{S}_k} = \int_0^{2\pi} F(\psi) d\psi;$$

это и есть нужный нам интеграл по  $M$ . Мы покажем ниже, что относительно бемольной нормы (§ 24) последовательность цепей  $A_{\mathfrak{S}_1}, A_{\mathfrak{S}_2}, \dots$  является фундаментальной; поэтому она имеет некоторый предел  $A$ :

$$(5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty}^b A_{\mathfrak{S}_k} = A.$$

Таким образом,  $X \cdot A = \int_0^{2\pi} F(\psi) d\psi$ , так что интеграл в (2) является просто значением коцепи  $X$  на одномерной цепи  $A$ .

Чтобы проиллюстрировать сходимость в (5), возьмем вместо тора  $M$  квадрат  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$  в  $\mathbb{R}^2$  (см. § 17). Теперь кривые  $C_{1\psi_i}$  станут отрезками  $\sigma_i$ . Допустим, что  $\mathcal{S}_i$  есть подразделение разбиения  $\mathcal{S}_k$ . Тогда каждый член  $(\psi_{i+1} - \psi_i) \sigma_i$  в  $A_{\varepsilon_k}$  заменится в  $A_{\varepsilon_i}$  некоторой суммой членов  $(\psi_{i,j+1} - \psi_{ij}) \sigma_{ij}$ . Если  $\psi_{i+1} - \psi_i < \varepsilon$  (для всех  $i$ ), то неравенство (24.5) дает

$$\left| \sum_j (\psi_{i,j+1} - \psi_{ij}) \sigma_{ij} - (\psi_{i+1} - \psi_i) \sigma_i \right|^b = \left| \sum_j (\psi_{i,j+1} - \psi_{ij}) (\sigma_{ij} - \sigma_i) \right|^b \leq \\ \leq \sum_j (\psi_{i,j+1} - \psi_{ij}) |\sigma_{ij} - \sigma_i|^b \leq (\psi_{i+1} - \psi_i) (2 + 2\pi) \varepsilon.$$

Следовательно,

$$(6) \quad |A_{\varepsilon_i} - A_{\varepsilon_k}|^b \leq \sum_i (\psi_{i+1} - \psi_i) (2 + 2\pi) \varepsilon = 2\pi (2 + 2\pi) \varepsilon,$$

и существование предела (5) для этого (а потому и для рассмотренного выше) случая доказано.

Заметим, что бемольную цепь  $A$  в (2) определяет вектор  $e_1$ . Вообще, в  $n$ -мерном римановом многообразии  $M$  мы можем иметь непрерывную функцию точки  $\alpha(p)$ , значениями которой являются  $r$ -векторы; функция  $\alpha$  определяет  $r$ -мерную бемольную цепь  $A$ , называемую  *$r$ -мерной непрерывной цепью*. Произвольная  $r$ -форма  $\omega = D_X$  соответствует некоторой бемольной (фактически дизной) коцепи  $X$  [см. (11.2)], и при этом

$$(7) \quad X \cdot A = \int_M \omega \cdot \alpha,$$

где мы пользуемся интегралом Римана.

Допустим, что функция  $\alpha$  гладкая. Тогда можно показать [см. (VI.9)], что граница  $\partial A$  соответствующей цепи  $A$  определяется функцией  $\alpha'$ , составленной из частных производных функции  $\alpha$ .

**26. О нульмерном интегрировании.** Мы можем разбить виды интегрирования на два типа: (а) те, в которых используются свойства ориентации области, и (б) те, в которых эти свойства не используются. В случае (а) непременно существует некоторое связанное с интегралом число  $r$ , указывающее размерность. Это может иметь место даже и в случае (б), но существенные геометрические свойства при этом не учитываются; мы покажем ниже, как представить такой интеграл в виде нульмерного интеграла.

Когда область интегрирования может поворачиваться в пространстве (таким образом, что части области будут двигаться

в направлениях, не параллельных ее первоначальному положению), то, вероятно, необходимы свойства ориентации; это подтверждается рассмотрением потока в § 5.

Там, где движения этого типа не используются, ориентация вообще может игнорироваться. Так [см. (18.7)], интеграл  $\int_R \omega$

от 3-формы  $\omega$  в ориентированном пространстве  $E^3$  по некоторой области  $R$ , ориентированной так же, как и  $E^3$ , может быть записан и как интеграл Римана  $\int_R \bar{\omega}$  от соответствующей действительной

функции  $\bar{\omega}$  (в предположении, что пространство  $E^3$  является метрическим); в последнем интеграле свойства ориентации не используются. Однако в формуле преобразования (16.2) или (16.4) на ориентацию следует обращать внимание.

Типичным примером интеграла типа (b) является интеграл, с помощью которого вычисляется полная масса в случае непрерывного распределения масс. Мы можем иметь массу, распределенную по кривой или по поверхности в  $E^3$ ; но для определения массы этой кривой или поверхности нет необходимости, чтобы они были ориентированы. Более общим интегралом того же вида является интеграл от действительной функции  $\varphi$  в метрическом пространстве  $S$ , в котором задана (положительная) функция-мера  $\mu$ . Мы можем рассматривать  $\varphi$  как некоторую 0-форму; тогда  $X \cdot p = \varphi(p)$  есть нульмерная коцепь в  $S$ . Покажем, каким образом любое компактное измеримое подмножество  $Q$  пространства  $S$  можно рассматривать в качестве нульмерной „бемольной“ цепи  $A_Q$ , для которой

$$(1) \quad \int_Q \varphi d\mu = X \cdot A_Q;$$

при этом мы предполагаем функцию  $\varphi$  непрерывной, так что может быть использовано определение риманова типа.

Для каждого разбиения  $\mathfrak{S}$  множества  $Q$  на измеримые множества  $Q_1, \dots, Q_m$ , выбрав в каждом  $Q_i$  по точке  $p_i$ , мы получаем нульмерную цепь

$$(2) \quad A_{\mathfrak{S}} = \sum \mu(Q_i) p_i.$$

Для последовательности таких разбиений, степени мелкости которых  $\rightarrow 0$ , предел соответствующих цепей есть некоторая „бемольная“ цепь  $A$ . Доказательство опирается на следующий факт: допустим, что каждое  $Q_i$  имеет диаметр  $< \epsilon$ , и  $\mathfrak{S}'$  является подразделением разбиения  $\mathfrak{S}$ ; пусть, скажем,  $Q_i$  разбивается на множества  $Q_{ij}$ , и пусть в  $Q_{ij}$  взята точка  $p_{ij}$ . Тогда, рассматривая

$p_i p_{ij}$  как абстрактную одномерную клетку и замечая, что, согласно (24.3),  $|\partial(pq)|^b$  не превосходит расстояния от  $p$  до  $q$ , имеем

$$\begin{aligned} |A_{\varepsilon'} - A_{\varepsilon}|^b &= \left| \sum_{i,j} \mu(Q_{ij}) (p_{ij} - p_i) \right|^b = \left| \sum_{i,j} \mu(Q_{ij}) \partial(p_i p_{ij}) \right|^b \leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{i,j} \mu(Q_{ij}) = \varepsilon \mu(Q). \end{aligned}$$

Обычное доказательство теперь убеждает нас, что нульмерная бемольная цепь  $A$  существует. Так как

$$X \cdot A_{\varepsilon} = \sum_i \mu(Q_i) X \cdot p_i = \sum_i \varphi(p_i) \mu(Q_i),$$

то ясно, что равенство (1) выполняется.

Заметим, что если мы положим

$$\varphi A_{\varepsilon} = \sum \varphi(p_i) \mu(Q_i) p_i,$$

то бемольный предел даст нульмерную цепь  $\varphi A_Q$ ; существует „единичная“ нульмерная коцепь  $X_0$ , определяемая условием  $X_0 \cdot p = 1$  (для всех  $p$ ), с соответствующей действительной функцией  $D_{X_0}(p) = 1$ ,

и при этом  $X_0 \cdot \varphi A = \int_Q \varphi d\mu$ . Операции этого типа изучаются в (VII, 1).

*Ч а с т ь п е р в а я*

---

## КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ



# *1. Грассмановская алгебра*

Мы построим здесь алгебраический фундамент теории  $r$ -мерного интегрирования в  $n$ -мерном пространстве; он будет использован в гл. III для определения интеграла от дифференциальной формы. Почему эта алгебра появляется в теории интегрирования, будет видно из гл. V; см. также часть A введения. Наш подход является геометрическим; когда вводятся системы координат, мы получаем обычные формулы, содержащие компоненты.

Интеграл Римана, будучи  $n$ -мерным интегралом в  $n$ -мерном пространстве, не требует применения грассмановской алгебры. Однако теорема о преобразовании интеграла и особенно теорема Стокса лучше всего могут быть поняты с ее помощью; поэтому мы применяем эту алгебру в гл. III с самого начала. С точки зрения указанной главы важными являются § 1, 2, 3, 5, 8, 9 и части § 10 и 12 настоящей главы. В общей теории (начинающейся с гл. V) основную роль играют нормы, указанные в § 13. Произведения, вводимые в § 6 и 7, хотя, конечно, и составляют весьма существенную часть нашей темы, нужны только в специальных частях теории.

Другие изложения грассмановской алгебры см., например, в книгах Бурбаки и Лихнеровича.

Рассматриваемая теория относится к некоторому векторному пространству  $V$ . Абстрактно определяются „произведения“ векторов (§ 1); таким путем образуются  $r$ -векторы пространства  $V$ . Аналогичные произведения в пространстве  $\bar{V}$ , сопряженном к  $V$  (П.1, 3), приводят к  $r$ -ковекторам, которые, действуя на  $r$ -векторы, дают числа. Эти объекты известны в тензорном анализе как контравариантные и ковариантные альтернирующие тензоры. В действительности  $r$ -ковекторы появляются в теории интегрирования (V, 10) в виде альтернирующих полилинейных функций; эти функции рассматриваются в § 4. Изучая в § 5 системы координат, мы находим свойства компонент, часто используемые для характеристики этих объектов.

Внешние и внутренние произведения соответствуют произведениям в алгебраической топологии; см. (IV, 29), (IX, 14), (IX, 16) и (X, 11).

„Простые“  $r$ -векторы имеют непосредственную геометрическую интерпретацию; см. § 9, а также § 7 введения. Именно этой

интерпретацией мы пользуемся при определении интеграла в гл. III. В последней части главы рассматриваются свойства линейных отображений, двойственность и понятие модуля отображения.

**1. Поливекторы.** Пусть  $V$  — векторное пространство. Определим сначала *2-векторы*, или *бивекторы*, пространства  $V$ . *Бивектор* есть выражение вида

$$(1) \quad \alpha = a_1(u_1 \vee v_1) + \dots + a_k(u_k \vee v_k)$$

с любым числом слагаемых, записанных в произвольном порядке, где  $a_i$  — действительные числа, а  $u_i$  и  $v_i$  — векторы из  $V$ . Сумму  $\alpha + \beta$  мы образуем, приписывая одно выражение после другого и соединяя их знаком плюс; мы образуем  $a\alpha$ , заменяя каждый коэффициент  $a_i$  на  $aa_i$ . Выражения (1) должны удовлетворять соотношениям:

$$(2) \quad a(u \vee v) + b(u \vee v) = (a + b)(u \vee v), \quad 1(u \vee v) = u \vee v;$$

$$(3) \quad (u + u') \vee v = u \vee v + u' \vee v, \quad u \vee (v + v') = u \vee v + u \vee v';$$

$$(4) \quad au \vee v = u \vee (av) = a(u \vee v);$$

$$(5) \quad u \vee u = 0.$$

Пользуясь этими правилами, получаем

$$\begin{aligned} u \vee v + v \vee u &= u \vee u + u \vee v + v \vee u + v \vee v = \\ &= (u + v) \vee (u \vee v) = 0; \end{aligned}$$

следовательно,

$$(6) \quad v \vee u = -u \vee v.$$

Далее, *r-вектор* есть выражение вида

$$(7) \quad a_1(v_{11} \vee \dots \vee v_{1r}) + \dots + a_k(v_{k1} \vee \dots \vee v_{kr})$$

с теми же самыми свойствами. По отношению к каждой переменной выполняется дистрибутивный закон; член, в котором дважды встречается какой-нибудь вектор, равен нулю. При  $r=0$  мы имеем действительные числа (скаляры); при  $r=1$  — векторы. *r-векторы* образуют векторное пространство, которое мы обозначаем через  $V_{[r]}$ .

Мы говорим, что *r-вектор* имеет *степень r*, хотя, пожалуй, слово „размерность“ было бы более подходящим термином.

Пространство  $V_{[r]}$  мы можем следующим образом описать в точных терминах. Пусть  $L'$  — линейное пространство действительных функций  $F$ , определенных на  $r$ -кратном декартовом произведении  $V^{(r)} = V \times \dots \times V$ , обращающихся в нуль всюду, кроме

конечного числа точек из  $V^{(r)}$ . Если функция  $F$  имеет в точке  $v_{i1} \times \dots \times v_{ir}$  значение  $a_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) и равна нулю во всех остальных точках, то мы пишем

$$(8) \quad F = a_1(v_{11} \dots v_{1r}) + \dots + a_k(v_{k1} \dots v_{kr});$$

слагаемые можно переставлять, и можно пользоваться правилом, подобным (2). Мы пишем 0 вместо 0 ( $v_1 \dots v_r$ ) и  $v_1 \dots v_r$  вместо 1 ( $v_1 \dots v_r$ ).

Пусть в этих обозначениях  $L'_0$  — подмножество пространства  $L'$ , состоящее из всех функций  $F$ , которые можно записать в одной из следующих форм (буквы  $A, B$  и  $C$  обозначают произвольные выражения вида  $v_1 \dots v_s$ , быть может, пустые):

$$(9) \quad A(v + v')B - AvB - Av'B;$$

$$(10) \quad A(av)B - a(AvB);$$

$$(11) \quad AvBvC.$$

Пусть  $L'_1$  — подпространство пространства  $L'$ , порожденное множеством  $L'_0$ , т. е. множество всех линейных комбинаций таких функций. Тогда  $V_{[r]}$  есть фактор-пространство (П.1, 5)

$$(12) \quad V_{[r]} = L' \bmod L'_1;$$

через  $a(v_1 \vee \dots \vee v_r)$  обозначается элемент пространства  $V_{[r]}$ , соответствующий элементу  $a(v_1 \dots v_r) \in L'$ .

Доказательство равенства (6) показывает, что перестановка двух векторов в любом выражении  $v_1 \vee \dots \vee v_r$  изменяет знак члена; применяя это свойство произвольное число раз, мы находим, что если  $(\lambda_1 \dots \lambda_r)$  — некоторая перестановка индексов  $(1, \dots, r)$ , то (обозначения см. в П.1)

$$(13) \quad v_{\lambda_1} \vee \dots \vee v_{\lambda_r} = \varepsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_r} v_1 \vee \dots \vee v_r.$$

Если не все индексы  $\lambda_i$  различны, то выражения, стоящие в обеих частях равенства, равны нулю.

**2. Поликовекторы.** Исходя из пространства  $\bar{V}$ , сопряженного к  $V$  (П.1, 3), построим пространство

$$(1) \quad V^{[r]} = \bar{V}_{[r]}$$

поликовекторов точно таким же образом, как мы построили пространство  $V_{[r]}$ , исходя из  $V$ . Мы говорим, что  $r$ -ковектор имеет

степень  $r^1$ ). Пусть выражения  $\sum a_i f^{i1} \vee \dots \vee f^{ir}$  обозначают  $r$ -ковекторы.

Определим скалярное произведение  $r$ -ковекторов и  $r$ -векторов как такую билинейную операцию, что

$$(2) \quad (f^1 \vee \dots \vee f^r) \cdot (v_1 \vee \dots \vee v_r) = \\ = \sum_{\lambda} \varepsilon^{\lambda_1 \dots \lambda_r} f^1(v_{\lambda_1}) \dots f^r(v_{\lambda_r}) = \begin{vmatrix} f^1(v_1) & \dots & f^1(v_r) \\ \vdots & & \vdots \\ f^r(v_1) & \dots & f^r(v_r) \end{vmatrix}.$$

В случае  $r=0$  мы получаем умножение действительных чисел; при  $r=1$  — действие ковектора на вектор; при  $r=2$  имеем  $(f \vee g) \cdot (u \vee v) = f(u)g(v) - f(v)g(u)$ .

Соотношение (2) определяет, конечно, все скалярные произведения. Так как элементы пространств  $V^{[r]}$  и  $V_{[r]}$  могут быть записаны многими различными способами, то мы должны показать, что это определение не зависит от способа записи элементов. Мы можем доказать это следующим образом. Пусть  $V^{[r]} = M^r \bmod M_1^r$ , как в (1.12). Пусть  $M^r$  действует на пространстве  $L^r$  по правилу

$$\left( \sum_i a^i f^{i1} \dots f^{ir} \right) \cdot \left( \sum_j b_j v_{j1} \dots v_{jr} \right) = \\ = \sum_{i,j} a^i b_j \sum_{\lambda} \varepsilon^{\lambda} f^{i1}(v_{j\lambda_1}) \dots f^{ir}(v_{j\lambda_r});$$

очевидно, это произведение корректно определено и является билинейным. Если мы покажем, что как произведения элементов из  $M_0^r$  на элементы из  $L^r$ , так и произведения элементов из  $M^r$  на элементы из  $L_0^r$  равны нулю, то отсюда будет следовать, что соответствующим образом определяется билинейная операция между  $V^{[r]}$  и  $V_{[r]}$ , в точности являющаяся скалярным произведением, о котором мы говорили выше. Мы наметим доказательство первого факта в случае  $r=2$ ; общее доказательство будет тогда ясно. Прежде всего,

$$(f + f')g \cdot uv = (f + f')(u)g(v) - (f + f')(v)g(u) = \\ = [f(u) + f'(u)]g(v) - [f(v) + f'(v)]g(u),$$

и мы находим  $[(f + f')g - fg - f'g] \cdot uv = 0$ . Так как  $(af)(u) = af(u)$ , то подобным же образом показываем, что произведение

<sup>1)</sup> В дальнейшем степени поливекторов и поликовекторов автор иногда обозначает символом  $\deg$  (начальные буквы слова *degree* — степень). — *Прим. перев.*

любого элемента из  $M'_0$ , представимого в виде (1.10), и любого элемента из  $L'$  равно нулю. Наконец,

$$ff \cdot uv = f(u)f(v) - f(v)f(u) = 0.$$

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  и  $e^1, \dots, e^n$  — взаимные базисы, соответственно в  $V$  и в  $\bar{V}$  (П.1.3). Для любого множества индексов  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  напомним

$$(3) \quad \begin{cases} e_\lambda = e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_r} = e_{\lambda_1} \vee \dots \vee e_{\lambda_r}, \\ e^\lambda = e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_r} = e^{\lambda_1} \vee \dots \vee e^{\lambda_r}. \end{cases}$$

Тогда для любых  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  и  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$

$$(4) \quad e^\lambda \cdot e_\mu = \delta_{\mu}^\lambda.$$

В самом деле, если не все  $\lambda_i$  различны, то  $e^\lambda = 0$ , и то же самое верно для  $e_\mu$ . Если  $\mu$  не является перестановкой элементов из  $\lambda$ , то найдется  $\lambda_i$ , которое не входит в  $\mu$ ; тогда  $e^{\lambda_i}(e_{\mu_j}) = 0$  для всех  $j$  и потому  $e^\lambda \cdot e_\mu = 0$ . Из (2) непосредственно вытекает, что  $e^\lambda \cdot e_\lambda = 1$ . Если  $\mu$  является перестановкой элементов из  $\lambda$ , то, пользуясь формулой (1.13), мы сводим доказательство к случаю  $\mu = \lambda$ .

Вообще мы будем пользоваться только такими символами  $e_\lambda$  и  $e^\lambda$ , для которых  $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ . Применяя формулу (4), получаем (определение суммы  $\sum_{(\mu)}$  см. в П.1)

$$\left. \begin{aligned} (5) \quad e^\lambda \cdot \sum_{(\mu)} \alpha^\mu e_\mu &= \alpha^\lambda, \\ (6) \quad \sum_{(\mu)} \omega_\mu e^\mu \cdot e_\lambda &= \omega_\lambda \end{aligned} \right\} (\lambda_1 < \dots < \lambda_r).$$

Ясно, что наше скалярное произведение можно охарактеризовать как кососимметрическую билинейную операцию, удовлетворяющую условию (4). (Ср. § 10 введения.)

**3. Свойства пространств  $V_{[r]}$  и  $V^{[r]}$ .** Отметим, что по формуле (2.2) каждый  $r$ -ковектор  $\xi$  определяет линейную функцию  $H_\xi$  в пространстве  $V_{[r]}$ . Докажем теорему.

**Теорема 3А.** Пусть  $V$  — пространство размерности  $n$ . Тогда при  $0 \leq r \leq n$  пространства  $V_{[r]}$  и  $V^{[r]}$  имеют размерность  $\binom{n}{r}$ ; при  $r > n$  все  $r$ -векторы и  $r$ -ковекторы являются нулевыми. Введенная выше операция скалярного произведения позволяет отождествить пространство  $V^{[r]}$  с пространством,

сопряженным к  $V_{[r]}$ . Если взаимные базисы в  $V$  и  $\bar{V}$  взяты как в § 2, то элементы

$$e_\lambda, e^\lambda \quad (\lambda_1 < \dots < \lambda_r)$$

образуют взаимные базисы соответственно в  $V_{[r]}$  и  $V^{[r]}$ .

Прежде всего, если задан любой  $r$ -вектор  $\alpha = \sum_i a_i v_{i1} \vee \dots \vee v_{ir}$ , то, записывая  $v_{ij} = \sum_k v_{ij}^k e_k$ , перемножая и пользуясь соотношением (1.13), мы видим, что  $r$ -вектор  $\alpha$  является линейной комбинацией  $r$ -векторов  $e_\lambda$  из (1); мы видим также, что если  $r > n$ , то  $\alpha = 0$ . Чтобы показать, что  $r$ -векторы  $e_\lambda$  независимы, допустим, что имеется соотношение  $\sum_{(\lambda)} \alpha^\lambda e_\lambda = 0$ . Применяя (2.5), видим, что  $\alpha^\lambda = 0$  для каждого  $\lambda$ . Поэтому  $r$ -векторы  $e_\lambda$  из (1) образуют базис пространства  $V_{[r]}$ . Подобным же образом  $r$ -ковекторы  $e^\lambda$  из (1) образуют базис пространства  $V^{[r]}$ . Поэтому и утверждение относительно размерностей справедливо. Если  $\underline{e}_\lambda$  и  $\bar{e}_\lambda$  — взаимные базисы в  $V_{[r]}$  и в  $(\bar{V}_{[r]})$ , то, ставя элементу  $\underline{e}_\lambda$  в соответствие  $r$ -ковектор  $e^\lambda$ , мы, очевидно, получаем изоморфизм между  $(\bar{V}_{[r]})$  и  $V^{[r]}$ , определяемый рассмотренной выше функцией  $H$ .

**4. Альтернирующие  $r$ -линейные функции.** Доказываемой ниже теоремой мы воспользуемся в (II, 8) и в (V, 9). Пусть  $L_{\text{alt}}^r(V)$  — векторное пространство альтернирующих  $r$ -линейных функций  $F$ , определенных на пространстве  $V$ . Иными словами,  $F$  есть такая функция  $r$  переменных, линейная по каждому из них, что

$$(1) \quad F(v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_r}) = \varepsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_r} F(v_1, \dots, v_r).$$

Для  $r$ -линейных функций равенство (1) выполняется в том и только в том случае, если  $F$  обращается в нуль, как только дважды встречается какой-нибудь вектор; ср. § 1.

**Теорема 4А.** Для каждой такой функции  $F$  пусть  $\Psi F$  — соответствующая линейная функция в  $V_{[r]}$ , определенная соотношением

$$(2) \quad (\Psi F) \left( \sum_i a_i v_{i1} \vee \dots \vee v_{ir} \right) = \sum_i a_i F(v_{i1}, \dots, v_{ir}).$$

Тогда  $\Psi$  есть изоморфизм пространства  $L_{\text{alt}}^r(V)$  на пространство  $(\bar{V}_{[r]})$ . Поэтому (см. теорему 3А)

$$(3) \quad V^{[r]} = (\bar{V}_{[r]}) \approx (\bar{V}_{[r]}) \approx L_{\text{alt}}^r(V).$$

Прежде всего для данной функции  $F$  пусть  $\Phi F$  — линейная функция на  $L'$  (см. § 1), определенная условием (2), где в левой части вместо  $\Psi$  нужно поставить  $\Phi$ , а вместо суммы  $\sum a_i v_{i1} \vee \dots \vee v_{ir}$  — сумму  $\sum a_i v_{i1} \dots v_{ir}$ ; ясно, что это определение корректно. Непосредственно проверяется, что  $\Phi F$  обращается в нуль на всех элементах подпространства  $L'_0$ ; поэтому  $\Phi F$  определяет линейную функцию  $\Psi F$  на пространстве  $V_{[r]}$ .

Пользуясь базисом  $e_1, \dots, e_n$  в  $V$ , положим

$$(4) \quad f^\lambda(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_r}) = \delta_\mu^\lambda \quad (\lambda_1 < \dots < \lambda_r);$$

существует единственный элемент  $f^\lambda \in L'_{\text{alt}}(V)$ , принимающий эти значения. *Компонентами* функции  $F \in L'_{\text{alt}}(V)$  назовем числа  $F_\lambda = F(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_r})$  ( $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ ). Мы имеем

$$(5) \quad F = \sum_{(\lambda)} F_\lambda f^\lambda.$$

В самом деле, возьмем любое множество индексов  $\mu$ ,  $\mu_1 < \dots < \mu_r$ . Тогда

$$\left( \sum_{(\lambda)} F_\lambda f^\lambda \right) (e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_r}) = \sum_{(\lambda)} F_\lambda \delta_\mu^\lambda = F_\mu = F(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_r}),$$

и так как обе функции  $\sum_{(\lambda)} F_\lambda f^\lambda$  и  $F$  являются  $r$ -линейными и альтернирующими, то отсюда следует (5).

Таким образом, элементы  $f^\lambda$  порождают пространство  $L'_{\text{alt}}(V)$ . Чтобы показать, что они независимы, допустим, что  $G = \sum_{(\lambda)} a_\lambda f^\lambda = 0$ .

Тогда

$$0 = G(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_r}) = \sum_{(\lambda)} a_\lambda \delta_\mu^\lambda = a_\mu \quad (\mu_1 < \dots < \mu_r).$$

Следовательно, элементы  $f^\lambda$  образуют базис в  $L'_{\text{alt}}(V)$ .

Обозначая теперь элементы взаимного базиса через  $\bar{e}_\lambda$  (§ 3), имеем

$$(\Psi f^\lambda)(e_\mu) = f^\lambda(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_r}) = \delta_\mu^\lambda = e^\lambda \cdot e_\mu = \bar{e}_\lambda(e_\mu).$$

Поэтому  $\Psi$  переводит элементы  $f^\lambda$  базиса пространства  $L'_{\text{alt}}(V)$  в элементы  $\bar{e}_\lambda$  базиса пространства  $(\bar{V}_{[r]})$ , что и доказывает (3).

**5. Применение систем координат.** Пусть дан базис  $e_1, \dots, e_n$  в пространстве  $V$  и соответствующие базисные элементы  $e_\lambda, e^\lambda$  в пространствах  $V_{[r]}$  и  $V^{[r]}$  (§ 2). Определим *компоненты*  $\alpha^\lambda$  про-

извольного  $r$ -вектора  $\alpha$  и компоненты  $\omega_\lambda$  произвольного  $r$ -ковектора  $\omega$  соотношениями

$$(1) \quad \alpha = \sum_{(\lambda)} a^\lambda e_\lambda, \quad \omega = \sum_{(\lambda)} \omega_\lambda e^\lambda$$

(см. теорему 3А). Тогда  $\alpha^\lambda$  и  $\omega_\lambda$  могут быть найдены из соотношений (2.5) и (2.6):

$$(2) \quad \alpha^\lambda = e^\lambda \cdot \alpha, \quad \omega_\lambda = \omega \cdot e_\lambda \quad (\lambda_1 < \dots < \lambda_r).$$

Мы можем, воспользовавшись равенствами (2), определить  $\alpha^\lambda$  и  $\omega_\lambda$  для всех  $\lambda$ , не требуя, чтобы  $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ . Из (1) и (2.4) находим

$$(3) \quad \omega \cdot \alpha = \sum_{(\lambda)} \omega_\lambda \alpha^\lambda.$$

Если заданы векторы  $v_1, \dots, v_r$  и ковекторы  $f^1, \dots, f^r$ , причем  $v_i = \sum_j v_i^j e_j$  и т. д., то компоненты векторов  $v_i$  и ковекторов  $f^i$  образуют матрицы, из элементов которых мы составляем детерминанты

$$(4) \quad D^\lambda(v_1, \dots, v_r) = \begin{vmatrix} v_1^{\lambda_1} & \dots & v_1^{\lambda_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_r^{\lambda_1} & \dots & v_r^{\lambda_r} \end{vmatrix}, \quad D_\lambda(f^1, \dots, f^r) = \begin{vmatrix} f_{\lambda_1}^1 & \dots & f_{\lambda_r}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{\lambda_1}^r & \dots & f_{\lambda_r}^r \end{vmatrix}$$

Так как  $e^{\lambda_i}(v_j) = v_j^{\lambda_i}$ ,  $f^i(e_{\lambda_j}) = f_{\lambda_j}^i$ , то формулы (2) и (2.2) дают

$$(5) \quad \begin{cases} (v_1 \vee \dots \vee v_r)^\lambda = D^\lambda(v_1, \dots, v_r), \\ (f^1 \vee \dots \vee f^r)_\lambda = D_\lambda(f^1, \dots, f^r). \end{cases}$$

Поэтому в силу (3)

$$(6) \quad (f^1 \vee \dots \vee f^r) \cdot (v_1 \vee \dots \vee v_r) = \sum_{(\lambda)} D_\lambda(f^1, \dots, f^r) D^\lambda(v_1, \dots, v_r).$$

Приравнявая правые части соотношений (6) и (2.2), мы получаем *общее тождество Лагранжа* (напомним, что  $f(v) = f \cdot v = \sum_i f^i v_i$ ).

Рассмотрим теперь *преобразование координат*. Пусть  $e'_1, \dots, e'_n$  — новый базис, связанный со старыми формулами (П.1, 1.1); взаимные базисы связаны формулами (П.1, 3.6). Определим детерминанты

$$(7) \quad D^\lambda_\mu = \sum_v \delta^\lambda_v a^v_{\mu_1} \dots a^v_{\mu_r} = \begin{vmatrix} a^{\lambda_1}_{\mu_1} & \dots & a^{\lambda_r}_{\mu_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a^{\lambda_1}_{\mu_r} & \dots & a^{\lambda_r}_{\mu_r} \end{vmatrix}$$

и аналогично детерминанты  $D_{\mu}^{\lambda}$  с элементами  $a_j^i$ . Соответствующее преобразование компонент  $r$ -векторов и  $r$ -ковекторов задается соотношениями

$$(8) \quad \alpha'^{\lambda} = \sum_{(\mu)} D_{\mu}^{\lambda} \alpha^{\mu}, \quad \omega'_{\lambda} = \sum_{(\mu)} D_{\lambda}^{\mu} \omega_{\mu}.$$

Докажем первое соотношение. Пусть  $e'_v$  обозначает  $r$ -вектор  $e'_{v_1} \vee \dots \vee e'_{v_r}$ . Если дан  $r$ -вектор  $\alpha = \sum_{(\mu)} \alpha^{\mu} e_{\mu}$ , то, пользуясь формулой (П.1, 1.1), находим

$$\alpha = \sum_v \sum_{(\mu)} a_{\mu_1}^{v_1} \dots a_{\mu_r}^{v_r} \alpha^{\mu} e'_v.$$

В первой сумме соберем те члены, индексы которых являются перестановками какой-либо системы  $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ ; эта сумма станет тогда двойной суммой  $\sum_{(\lambda)} \sum_v$ , где  $\sum_v$  есть сумма по всем перестановкам  $v$  рассматриваемой системы  $\lambda$ . Вспоминая определение символа  $\delta_v^{\lambda}$  и пользуясь равенством (1.13), получаем

$$\alpha = \sum_{(\lambda)} \sum_v \sum_{(\mu)} \delta_v^{\lambda} a_{\mu_1}^{v_1} \dots a_{\mu_r}^{v_r} \alpha^{\mu} e'_v = \sum_{(\lambda)} \sum_{(\mu)} D_{\mu}^{\lambda} \alpha^{\mu} e'_{\lambda},$$

откуда следует требуемое соотношение.

**6. Внешние произведения.** Определим *внешнее произведение  $r$ -векторов и  $s$ -векторов* формулой

$$(1) (v_1 \vee \dots \vee v_r) \vee (w_1 \vee \dots \vee w_s) = v_1 \vee \dots \vee v_r \vee w_1 \vee \dots \vee w_s,$$

продолжая ее на все  $r$ -векторы и  $s$ -векторы линейно. Нужно показать, что результат не зависит от способа записи элементов пространств  $V_{[r]}$  и  $V_{[s]}$ . Доказательство похоже на соответствующее доказательство в § 2 и поэтому опускается.

Ассоциативный закон  $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$  очевиден. Пользуясь равенством (1.13), находим коммутативный закон

$$(2) \quad \beta \vee \alpha = (-1)^{rs} \alpha \vee \beta \quad (\alpha \in V_{[r]}, \beta \in V_{[s]}).$$

Отсюда в качестве следствия получаем  $\alpha \vee \alpha = 0$ , если  $r$  нечетно. Но это может не иметь места, если  $r$  четно. Например, в обозначениях § 2

$$(e_{12} + e_{34}) \vee (e_{12} + e_{34}) = 2e_{1234}.$$

*Внешнее произведение поликовекторов* определяется в точности так же; выполняются те же законы.

В частности, произведения  $v \vee w$  и  $f \vee g$  имеют тот же смысл, что и ранее, и выражения  $v_1 \vee \dots \vee v_r$  и  $f^1 \vee \dots \vee f^r$  можно теперь рассматривать как внешние произведения. Пусть  $a$  — некоторое число; положим также

$$(3) \quad a \vee \alpha = \alpha \vee a = a\alpha, \quad a \vee \omega = \omega \vee a = a\omega.$$

Изучим теперь компоненты, взяв в пространстве  $V$  базис  $e_1, \dots, e_n$ . Пусть  $\lambda$  и  $\mu$  — не имеющие общих элементов множества, каждое из которых состоит из попарно различных натуральных чисел (не превосходящих  $n$ ); пусть  $\nu$  — объединение этих множеств, упорядоченное каким-либо образом. Тогда соотношение (1.13) сразу дает

$$(4) \quad e_\lambda \vee e_\mu = \delta_{\lambda\mu}^\nu e_\nu.$$

Например,  $e_{24} \vee e_{13} = -e_{1234}$ . Докажем, что

$$(5) \quad (\alpha \vee \beta)^\nu = \sum_{(\lambda)(\mu)} \delta_{\lambda\mu}^\nu \alpha^\lambda \beta^\mu.$$

В самом деле, если  $\alpha \vee \beta = \gamma$ , то

$$\alpha \vee \beta = \sum_{(\lambda)} \alpha^\lambda e_\lambda \vee \sum_{(\mu)} \beta^\mu e_\mu = \sum_{(\lambda)(\mu)} \alpha^\lambda \beta^\mu e_\lambda \vee e_\mu = \sum_{(\nu)} \gamma^\nu e_\nu;$$

соберем те члены в  $\sum_{(\lambda)(\mu)}$ , в которых  $\lambda$  и  $\mu$ , взятые вместе, образуют перестановку одного и того же  $\nu$ , и тогда формула (5) будет следовать из (4). Аналогично для поликовекторов

$$(6) \quad (\omega \vee \xi)_\nu = \sum_{(\lambda)(\mu)} \delta_{\lambda\mu}^\nu \omega_\lambda \xi_\mu.$$

Например, если  $\omega$  и  $\xi$  — некоторые биковекторы, то

$$(\omega \vee \xi)_{1234} = \omega_{12}\xi_{34} - \omega_{13}\xi_{24} + \omega_{14}\xi_{23} + \omega_{23}\xi_{14} - \omega_{24}\xi_{13} + \omega_{34}\xi_{12}.$$

Если  $\omega$  — ковектор, а  $\xi$  —  $r$ -ковектор, то мы находим

$$(7) \quad (\omega \vee \xi)_{\lambda_1 \dots \lambda_{r+1}} = \sum_{k, (\mu)} \delta_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{r+1}}^{k \mu_1 \dots \mu_r} \omega_k \xi_{\mu_1 \dots \mu_r} = \\ = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \omega_{\lambda_i} \xi_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1} \lambda_{i+1} \dots \lambda_{r+1}}.$$

Прямая сумма  $\tilde{V}$  пространств  $V_{[0]}$  (действительных чисел),  $V_{[1]}$  (т. е.  $V$ ),  $V_{[2]}$ , ...,  $V_{[n]}$  представляет собой векторное пространство размерности  $2^n$  с базисными элементами  $e_\lambda$  вместе с числом 1. Рассматриваемое вместе с внешним умножением пространство  $\tilde{V}$  является кольцом, единицей которого служит число 1; обычно

оно называется *грассмановской алгеброй* пространства  $V$ . Элементы  $e_1, \dots, e_n$  вместе с числом 1 порождают эту алгебру, т. е. любой элемент алгебры является линейной комбинацией произведений этих элементов.

Более общая система получится, если присоединить также пространства  $V^{[r]}$  и рассмотреть внутренние произведения, определяемые в следующем параграфе.

**7. Внутренние произведения.** Определим два произведения (которые будут изредка использоваться в последующих главах):

$(r\text{-ковектор}) \wedge (s\text{-вектор}) = (s - r)\text{-вектору, если } r \leq s,$

$(r\text{-ковектор}) \wedge (s\text{-вектор}) = (r - s)\text{-ковектору, если } r \geq s;$

при  $r = s$  оба эти произведения сводятся к скалярному произведению. Условимся указывать степени верхними индексами. Тогда эти произведения определяются соотношениями:

$$(1) \quad \xi^{s-r} \cdot (\omega^r \wedge \alpha^s) = (\xi^{s-r} \vee \omega^r) \cdot \alpha^s, \text{ если } r \leq s,$$

$$(2) \quad (\omega^r \wedge \alpha^s) \cdot \beta^{r-s} = \omega^r \cdot (\alpha^s \vee \beta^{r-s}), \text{ если } r \geq s.$$

Правая часть равенства (1) при фиксированных  $\omega^r$  и  $\alpha^s$  является линейной функцией  $(s - r)$ -ковектора  $\xi^{s-r}$ . Следовательно, в силу теоремы 3А и леммы (П.1, 3а) существует единственный  $(s - r)$ -вектор  $\beta^{s-r}$ , обладающий тем свойством, что  $(\xi^{s-r} \vee \omega^r) \cdot \alpha^s = \xi^{s-r} \cdot \beta^{s-r}$  для всех  $\xi^{s-r}$ . Положим  $\omega^r \wedge \alpha^s = \beta^{s-r}$ , тогда равенство (1) выполняется. Таким же образом соотношение (2) определяет произведение  $\omega^r \wedge \alpha^s$  при  $r \geq s$ . Оба эти произведения, очевидно, билинейны.

Если  $r = s$ , то, полагая в (1)  $\xi^0 = 1$ , получаем

$$(3) \quad \omega^r \wedge \alpha^r = 1 \cdot (\omega^r \wedge \alpha^r) = (1 \vee \omega^r) \cdot \alpha^r = \omega^r \cdot \alpha^r;$$

то же самое соотношение вытекает и из (2).

Положим в (1)  $r = 0$ . Тогда  $\omega^0$  есть некоторое число  $a$  и

$$\xi^s \cdot (a \wedge \alpha^s) = (\xi^s \vee a) \cdot \alpha^s = (a \xi^s) \cdot \alpha^s = \xi^s \cdot (a \alpha^s);$$

аналогичным образом, воспользовавшись соотношением (2), имеем

$$(4) \quad a \wedge \alpha = a\alpha, \quad \omega \wedge a = a\omega.$$

Применяя равенство (1) несколько раз, получаем

$$\begin{aligned} \eta^{t-r-s} \cdot [\xi^r \wedge (\omega^s \wedge \alpha^t)] &= (\eta \vee \xi) \cdot (\omega \wedge \alpha) = [(\eta \vee \xi) \vee \omega] \cdot \alpha = \\ &= [\eta \vee (\xi \vee \omega)] \cdot \alpha = \eta \cdot [(\xi \vee \omega) \wedge \alpha]; \end{aligned}$$

аналогичное соотношение следует из (2). Поэтому

$$(5) \quad \xi^r \wedge (\omega^s \wedge \alpha^t) = (\xi^r \vee \omega^s) \wedge \alpha^t \quad (r + s \leq t),$$

$$(6) \quad (\omega^r \wedge \alpha^s) \wedge \beta^t = \omega^r \wedge (\alpha^s \vee \beta^t) \quad (s + t \leq r).$$

Установим формулы для компонент произведения  $\omega \wedge \alpha$ , где  $\omega \in V^{[r]}$ ,  $\alpha \in V_{[s]}$ :

$$(7) \quad (\omega \wedge \alpha)^\lambda = \sum_{(\lambda)(\nu)} \delta_{\lambda}^{\mu\nu} \omega_\nu \alpha^\lambda = \sum_{(\nu)} \omega_\nu \alpha^{\mu\nu} \quad (r \leq s),$$

$$(8) \quad (\omega \wedge \alpha)_\nu = \sum_{(\lambda)(\mu)} \delta_{\mu\nu}^{\lambda} \omega_\lambda \alpha^\mu = \sum_{(\mu)} \omega_{\mu\nu} \alpha^\mu \quad (r \geq s).$$

Докажем первое из равенств (7). Возьмем произвольный  $(s-r)$ -ковектор  $\xi \in V^{[s-r]}$ . Пользуясь формулами (5.3) и (6.6), получаем

$$\xi \cdot (\omega \wedge \alpha) = (\xi \vee \omega) \cdot \alpha = \sum_{(\lambda)} (\xi \vee \omega)_\lambda \alpha^\lambda = \sum_{(\lambda)(\mu)(\nu)} \delta_{\lambda}^{\mu\nu} \xi_\mu \omega_\nu \alpha^\lambda.$$

Возьмем фиксированное множество индексов  $\mu$  и положим  $\xi = e^\mu$ . Тогда выписанное соотношение ввиду (2.5) дает первое из равенств (7). Второе получается непосредственно, а доказательство равенств (8) аналогично.

Для  $r$ -ковектора  $\omega$  и  $s$ -вектора  $\alpha$

$$(9) \quad \omega \wedge (v_1 \vee \dots \vee v_s) = \\ = \sum_{(\lambda)(\mu)} \varepsilon_{\lambda\mu} [\omega \cdot (v_{\mu_1} \vee \dots \vee v_{\mu_r})] v_{\lambda_1} \vee \dots \vee v_{\lambda_{s-r}} \quad (r \leq s),$$

$$(10) \quad (f^1 \vee \dots \vee f^r) \wedge \alpha = \\ = \sum_{(\lambda)(\mu)} \varepsilon_{\mu\lambda} [(f^{\mu_1} \vee \dots \vee f^{\mu_s}) \cdot \alpha] f^{\lambda_1} \vee \dots \vee f^{\lambda_{r-s}} \quad (r \geq s).$$

Заметим, что для каждого  $\lambda$  здесь встречается только одно  $\mu$ . Например, при  $r=2$

$$\omega \wedge (v_1 \vee v_2 \vee v_3) = [\omega \cdot (v_2 \vee v_3)] v_1 - [\omega \cdot (v_1 \vee v_3)] v_2 + [\omega \cdot (v_1 \vee v_2)] v_3.$$

Чтобы доказать (9), допустим, что  $\omega = f^{s-r+1} \vee \dots \vee f^s$ , и, выбрав любые  $f^1, \dots, f^{s-r}$ , положим  $\xi = f^1 \vee \dots \vee f^{s-r}$ . Возьмем скалярное произведение  $(s-r)$ -ковектора  $\xi$  с каждой из частей равенства (9). Левая часть тогда даст произведение  $(f^1 \vee \dots \vee f^s) \cdot (v_1 \vee \dots \vee v_s)$ , равное детерминанту  $D = |f^i(v_j)|$ ; правая же часть, очевидно, даст разложение детерминанта  $D$  по формуле Лапласа. Так как ковекторы  $f^i$  были произвольны, то отсюда следует (9). Доказательство равенства (10) аналогично.

**8.  $n$ -векторы в  $n$ -мерном пространстве.** Если пространство  $V$  имеет размерность  $n$ , то, в силу теоремы 3А, пространство  $V_{[n]}$  имеет размерность 1. Поэтому если  $\alpha_0$  — отличный от нуля  $n$ -вектор, то любой  $n$ -вектор равен  $a\alpha_0$  для некоторого действительного числа  $a$ . Множества всех  $n$ -векторов  $a\alpha_0$ , с  $a > 0$  и  $a < 0$  мы называем двумя *ориентациями* пространства  $V$ .

Если в пространстве  $V$  задан базис, то формулы (5.1) принимают вид

$$(1) \quad \alpha = \alpha^1 \dots \alpha^n e_1 \dots e_n, \quad \omega = \omega_1 \dots \omega_n e^1 \dots e^n;$$

в силу теоремы 3А  $e_1 \dots e_n \neq 0$ ,  $e^1 \dots e^n \neq 0$ . Формулы преобразования (5.8) принимают вид

$$(2) \quad \alpha'^1 \dots \alpha'^n = D \alpha^1 \dots \alpha^n, \quad \omega'_1 \dots \omega'_n = D' \omega_1 \dots \omega_n, \quad D = |a_j^i|, \quad D' = \frac{1}{D}.$$

Пусть  $(u_1, \dots, u_n)$  и  $(v_1, \dots, v_n)$  — независимые <sup>1)</sup> множества векторов; пусть, скажем,  $v_i = \sum_j v_j^i u_j$ . Тогда, преобразовывая произведение  $v_1 \vee \dots \vee v_n$  и пользуясь соотношением (1.13), получаем

$$(3) \quad v_1 \vee \dots \vee v_n = D u_1 \vee \dots \vee u_n, \text{ если } v_i = \sum_j v_j^i u_j, \quad D = |v_j^i|.$$

[Это следует также непосредственно из (2), если  $v_i$  и  $u_i$  рассматривать соответственно как старый и новый базис и положить  $\alpha = v_1 \vee \dots \vee v_n$ .] Таким образом, эти два множества векторов определяют совпадающие или противоположные ориентации пространства  $V$  в зависимости от того  $D > 0$  или же  $D < 0$ .

Следующий факт является элементарным: если  $D > 0$ , то систему векторов  $u_i$  можно продеформировать в систему  $v_i$ , сохраняя векторы независимыми. Иными словами, существуют такие непрерывные функции  $u_1(t), \dots, u_n(t)$ , что  $u_i(0) = u_i$ ,  $u_i(1) = v_i$  и векторы  $u_i(t)$  независимы при любом  $t$ . Например, пользуясь метрикой в пространстве  $V$  (П.1, 9), мы можем сначала продеформировать оба множества в ортонормальные множества; затем, с помощью вращений, можно перевести  $u_1$  в  $v_1$ ,  $u_2$  в  $v_2$  и т. д. В конце концов, когда  $u_{n-1}$  перейдет в  $v_{n-1}$ , мы должны получить  $u_n = \pm v_n$ ; так как детерминант  $D$  в (3) остается положительным, то мы имеем  $u_n = v_n$ .

**9. Простые поливекторы.** Некоторый  $r$ -вектор  $\alpha$  называется *простым*, или *разложимым*, если он может быть записан в виде  $\alpha = v_1 \vee \dots \vee v_r$ ; в случае  $r$ -ковекторов определение аналогично.

<sup>1)</sup> Упорядоченные. — Прим. ред.

При  $r=0, 1$  или  $n$  любой  $r$ -вектор в  $n$ -мерном пространстве, очевидно, является простым. Ниже, в § 11 и 12 мы увидим, что это верно и при  $r=n-1$ , а также для  $r$ -ковекторов при тех же значениях  $r$ . В  $\mathfrak{U}^4$ , например, 4-вектор  $e_{12}+e_{34}$  не является простым, как это следует из (13.9), (13.13) и (12.7)

Мы дадим геометрическую интерпретацию простых  $r$ -векторов.

**Лемма 9а.**  $v_1 \vee \dots \vee v_r = 0$  в том и только в том случае, если векторы  $v_i$  зависимы.

Если векторы  $v_i$  зависимы, то какой-нибудь из них является линейной комбинацией остальных; пусть, скажем,  $v_r = a_1 v_1 + \dots + a_{r-1} v_{r-1}$ .

Подставляя это значение в  $v_1 \vee \dots \vee v_r$  и пользуясь тем, что  $v_i \vee v_i = 0$ , получаем  $v_1 \vee \dots \vee v_r = 0$ . Допустим теперь, что  $v_i$  независимы. Тогда они составляют часть базиса  $v_1, \dots, v_n$ . В силу теоремы 3А  $r$ -вектор  $v_1 \vee \dots \vee v_r$  является в этом случае элементом базиса пространства  $V_{[r]}$  и, следовательно, отличен от нуля.

Пусть для  $r$ -вектора  $\alpha$   $V(\alpha)$  обозначает множество всех векторов  $u$ , для которых  $\alpha \vee u = 0$ ; множество  $V(\alpha)$  является подпространством пространства  $V$ .

**Лемма 9б.** Если  $\alpha = v_1 \vee \dots \vee v_r \neq 0$ , то  $V(\alpha)$  есть подпространство пространства  $V$ , порожденное векторами  $v_1, \dots, v_r$ .

В силу предыдущей леммы векторы  $v_1, \dots, v_r$  независимы; кроме того,  $u \in V(\alpha)$  в том и только в том случае, если векторы  $v_1, \dots, v_r, u$  зависимы, т. е. если  $u$  является линейной комбинацией векторов  $v_i$ .

Если в пространстве  $V$  нет метрики, мы не можем определять объемы; однако мы можем определить отношение  $\rho(R, R')$  „объемов“ ограниченных открытых множеств  $R, R'$  как число, обладающее следующими свойствами. Пусть заданы базис  $e_1, \dots, e_n$  и число  $\epsilon > 0$ ; тогда существует число  $\delta > 0$ , для которого справедливо следующее: пользуясь векторами  $e_i$  как базисными векторами прямоугольной системы координат, разобьем  $V$  на равные кубы с ребром  $h$ , где  $h \leq \delta$ ; если  $N$  и  $N'$  — число кубов, содержащихся соответственно в  $R$  и в  $R'$ , то  $|\rho(R, R') - N/N'| < \epsilon$ . В частности, мы можем говорить о равенстве или неравенстве объемов двух открытых множеств  $R, R'$ .

Под *ориентированным объемом*  $\tilde{R}$  в  $V$  мы понимаем пару, состоящую из класса открытых множеств равного объема в  $V$  (в класс входят все множества этого объема) и ориентации про-

пространства  $V$ . Если  $\tilde{R}$  и  $\tilde{R}'$  — ориентированные объемы в  $V$ , то пусть  $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{R}')$  обозначает отношение соответствующих объемов, взятое со знаком плюс или минус в зависимости от того, согласуются ли две рассматриваемые ориентации или не согласуются. См. также (VII, 11.7).

Если  $v_1, \dots, v_n$  — некоторый базис пространства  $V$ , то пусть  $\Lambda(v_1, \dots, v_n)$  обозначает ориентированный объем, определяемый открытым множеством всех векторов  $\sum a_i v_i$ , где  $0 < a_i < 1$ , а ориентация пространства  $V$  задается  $n$ -вектором  $v_1 \vee \dots \vee v_n$  (§ 8).

*Лемма 9с. Если  $u_1, \dots, u_n$  и  $v_1, \dots, v_n$  — базисы пространства  $V$ , то*

$$(1) \quad v_1 \vee \dots \vee v_n = \tilde{\rho}[\Lambda(v_1, \dots, v_n), \Lambda(u_1, \dots, u_n)] u_1 \vee \dots \vee u_n.$$

Пользуясь соображениями элементарной геометрии, мы можем доказать это следующим образом. Найдется вектор  $u_k$ , не лежащий в плоскости векторов  $v_2, \dots, v_n$ ; существуют такие числа  $c_2, \dots, c_n$ , что

$$v'_1 = v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = a_1 u_k, \quad a_1 \neq 0.$$

Если мы заменим  $v_1$  на  $v'_1$ , то ни одна из частей равенства (1) не изменится. Продолжая поступать таким же образом, мы сможем добиться того, что  $v_i = a_i u_{\lambda_i}$  для каждого  $i$ . Перестановка векторов  $v_i$  либо не меняет равенства (1), либо же меняет знак обеих частей; поэтому мы можем считать, что  $\lambda_i = i$ . При замене вектора  $v_i$  на  $b_i v_i$  обе части равенства (1) умножаются на  $b_i$ ; поэтому мы можем считать, что  $v_i = u_i$ . Но в этом случае равенство (1) тривиально.

Под  $r$ -мерным ориентированным объемом в  $V$  мы понимаем объект, состоящий из некоторого  $r$ -мерного подпространства  $W$  пространства  $V$  и ориентированного объема в  $W$ .

*Теорема 9А. Между простыми  $r$ -векторами  $\neq 0$  и  $r$ -мерными ориентированными объемами в  $V$  существует взаимно однозначное соответствие, определяемое следующим образом. Для данного простого  $r$ -вектора  $\alpha = v_1 \vee \dots \vee v_r \neq 0$  упорядоченное множество  $(v_1, \dots, v_r)$  определяет  $r$ -мерное подпространство  $W$  пространства  $V$ , ориентацию подпространства  $W$  и параллелепипед в  $W$ , а следовательно, и ориентированный объем в  $W$ , т. е.  $r$ -мерный ориентированный объем в  $V$ .*

Векторами  $v_1, \dots, v_r$  определяется  $r$ -мерный ориентированный объем. Чтобы показать, что он однозначно определяется  $r$ -векто-

ром  $\alpha$ , допустим, что также  $\alpha = u_1 \vee \dots \vee u_r$ . В силу леммы 9b подпространство  $W$  порождается также и векторами  $u_i$ . Из равенства (1) (рассматриваемого в  $W$ ) следует, что  $\tilde{\rho} = 1$ ; поэтому векторами  $u_1, \dots, u_r$  определяется тот же самый ориентированный объем в  $W$  и поэтому тот же самый  $r$ -мерный ориентированный объем в  $V$ .

Любой  $r$ -мерный ориентированный объем в  $V$ , очевидно, определяется некоторым  $r$ -вектором  $\alpha = v_1 \vee \dots \vee v_r$ . Допустим, что он определяется также и  $r$ -вектором  $\beta = u_1 \vee \dots \vee u_r$ . Тогда и векторы  $u_i$ , и векторы  $v_i$  образуют базис подпространства  $W$  и определяют в  $W$  одинаковые ориентированные объемы; это означает, что в (1)  $\tilde{\rho} = 1$ , и, следовательно,  $\beta = \alpha$ .

**10. Линейные отображения векторных пространств.** Пусть  $\varphi$  — линейное отображение векторного пространства  $V$  в  $V'$ . Существует единственное линейное отображение пространства  $V_{[r]}$  в пространство  $V'_{[r]}$ , при котором

$$(1) \quad \varphi(v_1 \vee \dots \vee v_r) = \varphi v_1 \vee \dots \vee \varphi v_r.$$

Доказательство того, что  $\varphi\alpha$  не зависит от представления  $r$ -вектора  $\alpha$  в виде суммы простых  $r$ -векторов, похоже на соответствующее доказательство в § 2.

Из (1) непосредственно вытекает

$$(2) \quad \varphi(\alpha \vee \beta) = \varphi\alpha \vee \varphi\beta.$$

Если  $\varphi^*$  — сопряженное отображение пространства  $(\bar{V}')$  в  $\bar{V}$  (П.1, 3), то по формуле

$$(3) \quad \varphi^*(f^1 \vee \dots \vee f^r) = \varphi^* f^1 \vee \dots \vee \varphi^* f^r$$

оно определяет линейное отображение пространства  $V'^{[r]}$  в пространство  $V^{[r]}$ . Поэтому

$$(4) \quad \varphi^*(\xi \vee \omega) = \varphi^*\xi \vee \varphi^*\omega.$$

Пара  $\varphi, \varphi^*$  не изменяет скалярного произведения:

$$(5) \quad \varphi^*\omega \cdot \alpha = \omega \cdot \varphi\alpha \quad (\omega \in V'^{[r]}, \alpha \in V_{[r]});$$

поэтому, если  $V^{[r]}$  рассматривать как пространство, сопряженное к  $V_{[r]}$  (теорема 3A), то  $\varphi^*$  будет линейным отображением, сопря-

женным к  $\varphi$ . Доказательство соотношения (5) непосредственно вытекает из (3), (2.2) и (П.І, 3.8):

$$\begin{aligned} \varphi^*(f^1 \vee \dots \vee f^r) \cdot (v_1 \vee \dots \vee v_r) &= \\ &= (\varphi^* f^1 \vee \dots \vee \varphi^* f^r) \cdot (v_1 \vee \dots \vee v_r) = \\ &= \sum_{\lambda} \varepsilon^{\lambda} \varphi^* f^1(v_{\lambda_1}) \dots \varphi^* f^r(v_{\lambda_r}) = \sum_{\lambda} \varepsilon^{\lambda} f^1(\varphi v_{\lambda_1}) \dots f^r(\varphi v_{\lambda_r}) = \\ &= (f^1 \vee \dots \vee f^r) \cdot (\varphi v_1 \vee \dots \vee \varphi v_r) = \\ &= (f^1 \vee \dots \vee f^r) \cdot \varphi(v_1 \vee \dots \vee v_r). \end{aligned}$$

Имеются две формулы, относящиеся к внутренним произведениям:

$$(6) \quad \omega \wedge \varphi \alpha = \varphi(\varphi^* \omega \wedge \alpha) \quad (\omega \in V'^{[r]}, \alpha \in V_{[s]}, r \leq s),$$

$$(7) \quad \varphi^*(\omega \wedge \varphi \alpha) = \varphi^* \omega \wedge \alpha \quad (\omega \in V'^{[r]}, \alpha \in V_{[s]}, r \geq s).$$

Например, (6) следует из соотношений

$$\begin{aligned} \xi \cdot \varphi(\varphi^* \omega \wedge \alpha) &= \varphi^* \xi \cdot (\varphi^* \omega \wedge \alpha) = (\varphi^* \xi \vee \varphi^* \omega) \cdot \alpha = \\ &= \varphi^*(\xi \vee \omega) \cdot \alpha = (\xi \vee \omega) \cdot \varphi \alpha = \xi \cdot (\omega \wedge \varphi \alpha). \end{aligned}$$

Пусть  $\varphi$  и  $\psi$  — линейные отображения соответственно пространства  $V$  в  $V'$  и пространства  $V'$  в  $V''$ . Тогда  $\psi\varphi$  и  $\varphi^*\psi^*$  отображают соответственно  $V$  в  $V''$  и  $\bar{V}''$  в  $\bar{V}$ ; определим отображения пространства  $V_{[r]}$  в  $V''_{[r]}$  и пространства  $V'''^{[r]}$  в  $V'^{[r]}$  такими же соотношениями:

$$(8) \quad (\psi\varphi)\alpha = \psi(\varphi\alpha), \quad (\varphi^*\psi^*)\omega = \varphi^*(\psi^*\omega).$$

Преобразуя произведение  $(\varphi^*\psi^*)\omega \cdot \alpha$  так же, как при доказательстве формулы (П.І, 3.10), получаем

$$(9) \quad (\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*.$$

Пусть  $\varphi$  — линейное отображение пространства  $V$  в себя. Так как все  $n$ -векторы  $\alpha$  являются кратными одного  $n$ -вектора  $\alpha_0$  (§ 3), то существует единственное такое число  $D_\varphi$ , что  $\varphi\alpha = D_\varphi\alpha$ ; число  $D_\varphi$  называется *детерминантом* отображения  $\varphi$ . Если  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $V$  и  $\varphi e_i = \sum_j \varphi_{ij}^j e_j$ , то, пользуясь  $n$ -вектором  $\alpha = e_1 \dots e_n$ , мы сразу находим, что  $D_\varphi = |\varphi_{ij}^j|$ .

**11. Двойственность.** Пусть  $V$  имеет размерность  $n$ . Так как пространства  $V_{[r]}$ ,  $V^{[r]}$ ,  $V_{[n-r]}$  и  $V^{[n-r]}$  имеют одну и ту же размерность, то все они изоморфны. Мы укажем здесь изоморфизм между пространствами  $V_{[r]}$  и  $V^{[n-r]}$ , определяемый исключительно

выбором некоторого  $n$ -вектора или  $n$ -ковектора. (Относительно пространств  $V_{[r]}$  и  $V^{[r]}$  см. следующий параграф.)

Выберем  $n$ -вектор  $\alpha_0$  и  $n$ -ковектор  $\omega_0$  так, чтобы было  $\omega_0 \cdot \alpha_0 = 1$ . Положим

$$(1) \quad \mathcal{D}\alpha = \omega_0 \wedge \alpha, \quad \mathcal{D}'\omega = \omega \wedge \alpha_0.$$

Мы докажем, что

$$(2) \quad \mathcal{D}'\mathcal{D}\alpha = \alpha, \quad \mathcal{D}\mathcal{D}'\omega = \omega,$$

и тем самым покажем, что и  $\mathcal{D}$ , и  $\mathcal{D}'$  являются изоморфизмами на.

Выберем базис  $e_1, \dots, e_n$  так, чтобы было  $\alpha_0 = e_1 \dots e_n$ ; тогда  $\omega_0 = e^1 \dots e^n$ . Пользуясь формулами (7.10), (7.9), (2.5) и (2.6), находим

$$(3) \quad \mathcal{D}\alpha = \sum_{(\lambda)(\mu)} \varepsilon_{\mu\lambda} \alpha^\mu e^\lambda,$$

$$(4) \quad \mathcal{D}'\omega = \sum_{(\lambda)(\mu)} \varepsilon_{\lambda\mu} \omega_\mu e_\lambda;$$

в каждой из этих сумм для данного  $\lambda$  встречается в точности одно соответствующее  $\mu$ . В частности (как и раньше, при условии  $\alpha_0 = e_1 \dots e_n$ ),

$$(5) \quad \mathcal{D}e_\lambda = \sum_{(\mu)} \varepsilon_{\lambda\mu} e^\mu, \quad \mathcal{D}'e^\lambda = \sum_{(\mu)} \varepsilon_{\mu\lambda} e_\mu,$$

причем в каждой из этих сумм имеется только один член, отличный от нуля. Например, при  $n=5$   $\mathcal{D}e_{12} = e^{345}$ ,  $\mathcal{D}'e_{13} = -e^{245}$ . Поэтому

$$(6) \quad \mathcal{D}e_\lambda = \varepsilon_{\lambda\mu} e^\mu, \quad \mathcal{D}'e^\mu = \varepsilon_{\lambda\mu} e_\lambda, \quad \text{если } \varepsilon_{\lambda\mu} \neq 0,$$

поэтому также  $\mathcal{D}'\mathcal{D}e_\lambda = e_\lambda$ ,  $\mathcal{D}\mathcal{D}'e^\mu = e^\mu$ , откуда и следует (2).

Из формул (7.5) и (7.6) получаем (если степени выбраны правильно)

$$\begin{aligned} \omega \wedge \mathcal{D}'\xi &= \omega \wedge (\xi \wedge \alpha_0) = (\omega \vee \xi) \wedge \alpha_0 = \mathcal{D}'(\omega \vee \xi), \\ \mathcal{D}\beta \wedge \alpha &= (\omega_0 \wedge \beta) \wedge \alpha = \omega_0 \wedge (\beta \vee \alpha) = \mathcal{D}(\beta \vee \alpha); \end{aligned}$$

полагая  $\alpha = \mathcal{D}'\xi$  в первом из этих равенств и  $\omega = \mathcal{D}\beta$  во втором, находим

$$(7) \quad \omega \wedge \alpha = \mathcal{D}'(\omega \vee \mathcal{D}\alpha) \quad (\deg(\omega) \leq \deg(\alpha)),$$

$$(8) \quad \omega \wedge \alpha = \mathcal{D}(\mathcal{D}'\omega \vee \alpha) \quad (\deg(\omega) \geq \deg(\alpha)),$$

выражая тем самым внутренние произведения через внешние.

Пользуясь формулами (7.3), (7), (1) и снова (7.3), получаем

$$(9) \quad (\omega \vee \mathcal{D}\alpha) \cdot \alpha_0 = \omega \cdot \alpha \quad (\deg(\omega) = \deg(\alpha));$$

аналогичная формула следует из (8).

**Лемма 11а.** *Поливектор или поликовектор является простым в том и только в том случае, если простым является и ему двойственный.*

Допустим, например, что  $r$ -вектор  $\alpha = v_1 \vee \dots \vee v_r \neq 0$  является простым и что  $r < n$ . Выберем векторы  $v_{r+1}, \dots, v_n$  так, чтобы векторы  $v_1, \dots, v_n$  составляли базис в  $V$  (см. лемму 9а), и так, чтобы  $\alpha_0 = v_1 \vee \dots \vee v_n$ . Пусть  $f^1, \dots, f^n$  — взаимный базис. Тогда в силу (6)  $\mathcal{D}\alpha = f^{r+1} \vee \dots \vee f^n$ , и этот  $(n-r)$ -ковектор является простым.

**12. Евклидовы векторные пространства.** Пусть пространство  $V$  евклидово, и пусть  $\Phi$  — изоморфизм пространства  $V$  на пространство  $\bar{V}$ , задаваемый условием  $(\Phi u)(v) = u \cdot v$  (П.І, лемма 9а). Соотношение  $\Phi u \cdot \Phi v = u \cdot v$  определяет в  $\bar{V}$  скалярное произведение; теперь  $\bar{V}$  становится евклидовым пространством. Если  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормальный базис в  $V$ , то  $\Phi e_1, \dots, \Phi e_n$  будет взаимным базисом в  $\bar{V}$ ; таким образом,  $\Phi e_i = e^i$ .

Определим скалярное произведение в  $V_{[r]}$  соотношением

$$(1) \quad (u_1 \vee \dots \vee u_r) \cdot (v_1 \vee \dots \vee v_r) = \\ = (\Phi u_1 \vee \dots \vee \Phi u_r) \cdot (\Phi v_1 \vee \dots \vee \Phi v_r);$$

требуемые свойства (П.І, 9) мы докажем ниже.

В силу (2.2)

$$(2) \quad (u_1 \vee \dots \vee u_r) \cdot (v_1 \vee \dots \vee v_r) = \begin{vmatrix} u_1 \cdot v_1 & \dots & u_1 \cdot v_r \\ \dots & \dots & \dots \\ u_r \cdot v_1 & \dots & u_r \cdot v_r \end{vmatrix}.$$

Положим

$$(3) \quad \Phi(v_1 \vee \dots \vee v_r) = \Phi v_1 \vee \dots \vee \Phi v_r$$

и продолжим  $\Phi$  линейно на все пространство  $V_{[r]}$ . Тогда  $\Phi$  будет линейным отображением пространства  $V_{[r]}$  в пространство  $V^{[r]}$ . Полагая  $\Phi\alpha \cdot \Phi\beta = \alpha \cdot \beta$ , мы имеем теперь все соотношения

$$(4) \quad \Phi e_\lambda = e^\lambda, \quad \Phi\alpha \cdot \Phi\beta = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta, \quad |\Phi\alpha| = |\alpha|,$$

кроме последнего. В силу первого из этих соотношений  $\Phi$  является изоморфизмом пространства  $V_{[r]}$  на пространство  $V^{[r]}$ .

Взяв ортонормальный базис, мы имеем

$$(5) \quad \Phi \sum_{(\lambda)} \alpha^\lambda e_\lambda = \sum_{(\lambda)} \alpha^\lambda \Phi e_\lambda = \sum_{(\lambda)} \alpha^\lambda e_\lambda;$$

таким образом, компоненты при изоморфизме  $\Phi$  сохраняются:  $(\Phi \alpha)_\lambda = \alpha^\lambda$ . Скалярное произведение следующим образом выражается через компоненты:

$$(6) \quad \alpha \cdot \beta = \sum_{(\lambda)} \alpha^\lambda \beta^\lambda = \beta \cdot \alpha, \quad \omega \cdot \xi = \sum_{(\lambda)} \omega_\lambda \xi_\lambda = \xi \cdot \omega.$$

Например,  $\alpha \cdot \beta = \Phi \alpha \cdot \beta = \sum_{(\lambda)} (\Phi \alpha)_\lambda \beta^\lambda = \sum_{(\lambda)} \alpha^\lambda \beta^\lambda$ . В частности,

$$(7) \quad |\alpha| = (\alpha \cdot \alpha)^{1/2} = \left[ \sum_{(\lambda)} (\alpha^\lambda)^2 \right]^{1/2}, \quad |\omega| = (\omega \cdot \omega)^{1/2} = \left[ \sum_{(\lambda)} (\omega_\lambda)^2 \right]^{1/2},$$

чем доказано, что если  $\alpha \neq 0$ , то  $|\alpha| > 0$  и если  $\omega \neq 0$ , то  $|\omega| > 0$ ; поэтому  $|\alpha|$  и  $|\omega|$  являются нормами и выполняется последнее из соотношений (4).

Теорема 12А.  $|\alpha|$  и  $|\omega|$  являются сопряженными нормами соответственно в  $V_{[r]}$  и в  $V^{[r]}$ .

Это следует из (4) и из леммы (П.І, 9а).

Отметим, что  $r$ -ковектор  $\Phi \alpha$  является простым в том и только в том случае, если простым является и  $\alpha$ .

В случае  $r = 2$  получаем

$$0 \leq (u \vee v) \cdot (u \vee v) = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{vmatrix} = |u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2;$$

кроме того (лемма 9а),  $u \vee v = 0$  в том и только в том случае, если  $u$  и  $v$  зависимы. Из этих утверждений следует *неравенство Шварца*:

$$(8) \quad |u \cdot v| \leq |u| |v|,$$

$$(9) \quad |u \cdot v| = |u| |v| \text{ в том и только в том случае, если } u \text{ и } v \text{ зависимы.}$$

Так как это верно в любом евклидовом векторном пространстве, то это верно в  $V_{[r]}$  и в  $V^{[r]}$ , поэтому

$$(10) \quad |\alpha \cdot \beta| \leq |\alpha| |\beta|, \quad |\omega \cdot \xi| \leq |\omega| |\xi|,$$

причем равенство имеет место в том и только в том случае, если соответственно  $\alpha$  и  $\beta$  или  $\omega$  и  $\xi$  зависимы. Поэтому также (П.І, 9)

$$(11) \quad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|, \quad |\omega + \xi| \leq |\omega| + |\xi|.$$

Если  $\alpha$  имеет только одну компоненту, то для произведения  $\alpha \vee \beta$  существует простое выражение:

$$(12) \text{ если } \alpha = \alpha^1 \dots \alpha^r e_1 \dots e_r, \text{ то } \alpha \vee \beta = \alpha^1 \dots \alpha^r \sum_{(\lambda), r < \lambda_1} \beta^\lambda e_1 \dots e_{r\lambda}.$$

В самом деле, в силу неравенств  $v_1 < \dots < v_r$  члены суммы в правой части равенства (6.5) обращаются в нуль, если не выполняется условие  $(v_1, \dots, v_r) = (1, \dots, r)$ ; если же это условие выполняется, то в этой сумме имеется только один член с  $\lambda = (1, \dots, r)$  и  $\mu = (v_{r+1}, \dots)$ ; этот член равен  $\alpha^1 \dots \alpha^r \beta^{v_{r+1} \dots}$ , откуда и следует (12). Докажем теперь, что

$$(13) \quad |\alpha \vee \beta| \leq |\alpha| |\beta|, \text{ если хотя бы один из поливекторов } \alpha, \beta \text{ является простым.}$$

Пусть  $\alpha = v_1 \vee \dots \vee v_r$ . Выберем ортонормальную систему координат так, чтобы векторы  $v_1, \dots, v_r$  лежали в плоскости векторов  $e_1, \dots, e_r$ . Тогда  $\alpha = \alpha^1 \dots \alpha^r e_1 \dots e_r$  и формула (12) дает

$$|\alpha \vee \beta|^2 = \sum_{(\nu)} [(\alpha \vee \beta)^\nu]^2 = (\alpha^1 \dots \alpha^r)^2 \sum_{(\lambda), r < \lambda_1} (\beta^\lambda)^2 \leq |\alpha|^2 |\beta|^2.$$

Замечание. Если отбросить сделанное предположение, то, как показывает следующий пример Уолфа, относящийся к случаю  $n=6$ , неравенство (13) не выполняется. Возьмем  $\alpha = \beta = \sum_{i < j} a_{ij} e_{ij}$ , где все  $a_{ij}$  равны 1, с тем лишь исключением, что  $a_{13} = a_{46} = -1$ ; тогда  $|\alpha|^2 = 15$ ,  $|\alpha \vee \alpha|^2 = 252$ . Уолф показал, что неравенство (13) будет выполняться, если вставить множитель  $\binom{r+s}{r}$ , где  $r = \deg(\alpha)$ ,  $s = \deg(\beta)$ .

В качестве частного случая неравенства (13) и соответствующего неравенства для поливекторов имеем:

$$(14) \quad |u_1 \vee \dots \vee u_r \vee v_1 \vee \dots \vee v_s| \leq |u_1 \vee \dots \vee u_r| |v_1 \vee \dots \vee v_s|,$$

$$(15) \quad |f^1 \vee \dots \vee f^r \vee g^1 \vee \dots \vee g^s| \leq |f^1 \vee \dots \vee f^r| |g^1 \vee \dots \vee g^s|,$$

и поэтому

$$(16) \quad |v_1 \vee \dots \vee v_r| \leq |v_1| \dots |v_r|, \quad |f^1 \vee \dots \vee f^r| \leq |f^1| \dots |f^r|.$$

Так как, далее,

$$\begin{aligned} v_1 \vee \dots \vee v_r - u_1 \vee \dots \vee u_r = \\ = (v_1 - u_1) \vee u_2 \vee \dots \vee u_r + v_1 \vee (v_2 - u_2) \vee u_3 \vee \dots \vee u_r + \dots + \\ + v_1 \vee \dots \vee v_{r-1} \vee (v_r - u_r), \end{aligned}$$

то мы находим

$$(17) \quad |v_1 \vee \dots \vee v_r - u_1 \vee \dots \vee u_r| \leq r M^{r-1} \varepsilon, \\ \text{если } |v_i - u_i| < \varepsilon, \quad |u_i| \leq M, \quad |v_i| \leq M.$$

С помощью соотношения (7) определяем границы для нормы  $|\alpha|$   $r$ -вектора  $\alpha$  по границам для его компонент:

$$(18) \quad |\alpha| \leq \left(\frac{n}{r}\right)^{1/2} M, \text{ если } |\alpha^\lambda| \leq M \text{ для всех } \lambda \quad (\deg(\alpha) = r).$$

Чтобы доказать обратную оценку, выберем ортонормальную систему координат и положим  $\beta^\lambda = \alpha^\lambda / |\alpha^\lambda|$ , если  $\alpha^\lambda \neq 0$ , и  $\beta^\lambda = 0$  в противном случае. Тогда  $\alpha^\lambda \beta^\lambda = |\alpha^\lambda|$  и неравенство (10) дает

$$\sum_{(\lambda)} |\alpha^\lambda| = \sum_{(\lambda)} \alpha^\lambda \beta^\lambda = \alpha \cdot \beta \leq |\alpha| |\beta|.$$

Так как  $|\beta| = \left[ \sum_{(\lambda)} (\beta^\lambda)^2 \right]^{1/2} \leq \left(\frac{n}{r}\right)^{1/2}$ , то мы получаем

$$(19) \quad \sum_{(\lambda)} |\alpha^\lambda| \leq \left(\frac{n}{r}\right)^{1/2} |\alpha| \quad (\deg(\alpha) = r).$$

Докажем теперь, что

$$(20) \quad |v_1 \vee v_2 \vee \dots \vee v_r| = |v_1| |v_2 \vee \dots \vee v_r|, \\ \text{если } v_1 \cdot v_i = 0 \text{ при } i > 1.$$

В самом деле, если мы воспользуемся формулой (2), то верхняя строка и левый столбец детерминанта будут состоять из нулей, исключая лишь элемент  $v_1 \cdot v_1 = |v_1|^2$ ; алгебраическое же дополнение этого элемента равно  $|v_2 \vee \dots \vee v_r|^2$ .

Если векторы  $v_1, \dots, v_r$  независимы, то они определяют некоторое подпространство  $W$  пространства  $V$ , и в  $W$  определены  $r$ -мерные объемы. Мы имеем

$$(21) \quad |v_1 \vee \dots \vee v_r| = r\text{-мерному объему параллелепипеда, определяемого векторами } v_1, \dots, v_r.$$

В самом деле, это, очевидно, справедливо, если векторы  $v_i$  ортогональны [нужно воспользоваться формулой (7), взяв первые  $r$  осей идущими в направлении векторов  $v_i$ ]; в общем случае мы можем выбрать такие ортогональные векторы  $u_1, \dots, u_r$ , что  $v_1 \vee \dots \vee v_r = u_1 \vee \dots \vee u_r$ , и применить (9.1). [Используя соотношение (20), легко провести доказательство равенства (21) по индукции; ср. доказательство формулы (9.1).]

Пусть  $W$  — любое  $r$ -мерное ориентированное подпространство пространства  $V$ . Подпространство  $W$  вместе с единичным объемом

в  $W$  задает  $r$ -мерный ориентированный объем, однозначно определяющий некоторый  $r$ -вектор  $\alpha(W)$  (теорема 9А), который мы назовем *единичным  $r$ -вектором*, или  *$r$ -направлением* подпространства  $W$ . Если  $e_1, \dots, e_r$  — ортонормальный базис в подпространстве  $W$ , определяющий его положительную ориентацию, то  $\alpha(W) = e_1 \dots e_r$ . В частности, если пространство  $V$  ориентировано, то определено его  $n$ -направление  $\alpha(V) = e_1 \dots e_n$ . Его *единичным  $n$ -ковектором* является  $e^1 \dots e^n$ .

Если пространство  $V$  ориентировано, то мы можем воспользоваться  $n$ -вектором  $\alpha(V)$  для определения операторов двойственности из § 11. В частности, при  $n = 3$  для заданных векторов  $u, v$  ковектор  $\mathcal{D}(u \vee v)$  равен  $\Phi w$  для некоторого однозначно определенного вектора  $w$ ;  $w$  есть *векторное произведение* векторов  $u$  и  $v$  в обычном векторном анализе. Заметим, что если  $\alpha$  — некоторое  $r$ -направление, то существует двойственное  $(n - r)$ -направление  $\alpha'$ , содержащее те векторы, которые ортогональны к векторам  $r$ -направления  $\alpha$ . Множество всех  $r$ -направлений в  $E^n$  называется *многообразием Грассмана* [см. (IV.9)], а соответствие  $\alpha \rightarrow \alpha'$  есть хорошо известная в проективной геометрии двойственность.

Пусть пространство  $V$  ориентировано и  $\omega_0 = e^1 \dots e^n$  — соответствующий единичный  $n$ -ковектор. Определим для заданного ориентированного подпространства  $W$  поливектор  $\beta$  условием

$$(22) \quad \omega_0 \wedge \alpha(W) = \Phi \beta;$$

тогда, выбрав подходящим образом базис, легко показать, что  $\beta = \alpha(W')$ , где  $W'$  — ориентированное ортогональное дополнение подпространства  $W$ .

Пусть  $\varphi$  — линейное отображение пространства  $V$  в  $V'$  (оба пространства евклидовы). Мы можем определить *модуль* отображения  $\varphi$ , полагая

$$(23) \quad |\varphi| = \sup \{ |\varphi(v)| : |v| = 1 \}.$$

Тогда  $|\varphi|$  есть наименьшее число, обладающее тем свойством, что

$$(24) \quad |\varphi v| \leq |\varphi| |v|.$$

Если задано линейное отображение  $\varphi$ , то выберем системы координат в  $V$  и в  $V'$  следующим образом. Выберем вектор  $e_1$  так, чтобы  $|e_1| = 1$  и норма  $|\varphi e_1|$  была максимальной. Затем выберем  $e_2$  так, чтобы  $|e_2| = 1$ ,  $e_1 \cdot e_2 = 0$  и норма  $|\varphi e_2|$  была при этих условиях максимальной, и т. д. Положим  $\varphi e_i = v'_i$ . Если  $i < j$ , то простые вычисления показывают, что

$$\frac{d}{d\theta} |\varphi (\cos \theta e_i + \sin \theta e_j)|_{\theta=0}^2 = 2v'_i \cdot v'_j$$

(сначала вводим  $\varphi$  внутрь скобки, затем возводим в квадрат, затем дифференцируем и, наконец, полагаем  $\theta = 0$ ). Отсюда в силу свойства максимальности векторов  $e_i$  следует, что  $\varphi'_i \cdot \varphi'_j = 0$ . Поэтому мы можем выбрать такой ортонормальный базис  $e'_1, \dots, e'_m$  в  $V'$ , что

$$(25) \quad \varphi e_i = c_i e'_i \quad (i = 1, \dots, n'), \quad \varphi e_i = 0 \quad (i > n'),$$

$$(26) \quad |\varphi| = c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_{n'} \geq 0,$$

где  $n' = \inf \{n, m\}$ .

Для произвольного  $r$ -вектора  $\alpha$  пространства  $V$  с помощью формул (25) находим компоненты  $r$ -вектора  $\varphi\alpha$  пространства  $V'$ :

$$(27) \quad \varphi\alpha = \sum_{(\lambda)} \alpha^\lambda \varphi e_\lambda = \sum_{(\lambda), \lambda_r \leq n'} (\alpha^\lambda c_{\lambda_1} \dots c_{\lambda_r}) e'_\lambda.$$

Поэтому в силу неравенств (26)

$$|\varphi\alpha|^2 = \sum_{(\lambda), \lambda_r \leq n'} (\alpha^\lambda c_{\lambda_1} \dots c_{\lambda_r})^2 \leq |\varphi|^{2r} \sum_{(\lambda)} (\alpha^\lambda)^2$$

и, таким образом,

$$(28) \quad |\varphi\alpha| \leq c_1 \dots c_r |\alpha| \leq |\varphi|^r |\alpha| \quad (\deg(\alpha) = r).$$

Возьмем произвольный  $r$ -ковектор  $\omega$  в  $V'$ . Тогда для любого  $r$ -вектора  $\alpha$  пространства  $V$

$$|\varphi^* \omega \cdot \alpha| = |\omega \cdot \varphi\alpha| \leq |\omega| |\varphi\alpha| \leq |\omega| |\varphi|^r |\alpha|;$$

поэтому в силу (П.1, 8.7)

$$(29) \quad |\varphi^* \omega| \leq |\varphi|^r |\omega| \quad (\deg(\omega) = r).$$

**13. Масса и комасса.** Пусть  $V$  — евклидово векторное пространство; тогда в пространствах  $V_{[r]}$  и  $V^{[r]}$  мы имеем соответственно нормы  $|\alpha|$  и  $|\omega|$ . В общей теории интегрирования (начиная с гл. V) нам потребуются новые нормы, определенные следующим образом.

*Масса  $r$ -вектора  $\alpha$  есть*

$$(1) \quad |\alpha|_0 = \inf \left\{ \sum_i |\alpha_i| : \alpha = \sum_i \alpha_i, \text{ где } \alpha_i \text{ — простые } r\text{-векторы} \right\}.$$

Автору неизвестно, существуют ли простые  $r$ -векторы  $\alpha_i$ , для которых  $\alpha = \sum \alpha_i$ ,  $|\alpha|_0 = \sum |\alpha_i|$ ; неизвестно также никакой границы для числа слагаемых, требующихся в (1).

<sup>1)</sup> Предполагается, что пространство  $V$  имеет размерность  $n$ , а пространство  $V'$  — размерность  $m$ . — *Прим. перев.*

Комасса  $r$ -ковектора  $\omega$  есть

$$(2) \quad |\omega|_0 = \sup \{ |\omega \cdot \alpha| : \alpha \text{ — простые } r\text{-векторы, } |\alpha| = 1 \}.$$

Эти нормы связаны с прежними нормами следующим образом:

$$(3) \quad |\alpha|_0 \geq |\alpha|, \quad |\omega|_0 \leq |\omega|,$$

см. также ниже (9) и (10). Первое неравенство немедленно вытекает из (1); второе выполняется потому, что норма  $|\omega|$  является сопряженной к норме  $|\alpha|$  (теорема 12А), и, следовательно, задается формулой (2), если отбросить ограничение, состоящее в том, что  $\alpha$  пробегает только простые  $r$ -векторы (П.1, 8.7).

Для любого  $r$ -ковектора  $\omega$  и для любого  $r$ -вектора  $\alpha$ , представленного в виде  $\sum \alpha_i$ , где  $\alpha_i$  — простые, из (2) получаем

$$|\omega \cdot \alpha| \leq \sum |\omega \cdot \alpha_i| \leq |\omega|_0 \sum |\alpha_i|;$$

поэтому в силу (1)

$$(4) \quad |\omega \cdot \alpha| \leq |\omega|_0 |\alpha|_0.$$

**Теорема 13А.** *Масса и комасса являются сопряженными нормами соответственно в пространствах  $V_{[r]}$  и  $V^{[r]}$ ; поэтому*

$$(5) \quad |\omega|_0 = \sup \{ |\omega \cdot \alpha| : |\alpha|_0 = 1 \},$$

$$(6) \quad |\alpha|_0 = \sup \{ |\omega \cdot \alpha| : |\omega|_0 = 1 \}.$$

Ясно, что  $|\alpha\alpha|_0 = |\alpha| |\alpha|_0$ ,  $|\alpha + \beta|_0 \leq |\alpha|_0 + |\beta|_0$ . Если  $\alpha \neq 0$ , то  $|\alpha|_0 \geq |\alpha| > 0$ . Следовательно, масса является нормой. Если  $\omega \neq 0$ , то в ортонормальной системе координат  $\omega_\lambda = \omega \cdot e_\lambda \neq 0$  для некоторого множества индексов  $\lambda$ ; так как  $r$ -вектор  $e_\lambda$  является простым, то  $|\omega|_0 \geq |\omega_\lambda| > 0$ . Следовательно, и комасса является нормой. Чтобы доказать теорему, в силу леммы (П.1, 8е) достаточно доказать равенство (5). Пусть  $\omega$  обозначает правую часть этого равенства. Ввиду (4)  $\omega \leq |\omega|_0$ . Так как (очевидно)  $|\alpha|_0 = |\alpha|$ , если  $r$ -вектор  $\alpha$  простой, то множество  $r$ -векторов  $\alpha$ , входящих в (2), является подмножеством тех  $\alpha$ , которые входят в (5); поэтому  $|\omega|_0 \leq \omega$ . Таким образом, равенство (5) справедливо.

Если  $\alpha$  — простой  $r$ -вектор и  $|\alpha| = 1$ , то мы можем выбрать такой ортонормальный базис, что  $\alpha = e_1 \dots e_r$ . Тогда  $\omega \cdot \alpha = \omega_1 \dots \omega_r$ ; таким образом, равенство (2) показывает, что

$$(7) \quad |\omega|_0 = \sup \{ \omega_1 \dots \omega_r : \text{ортонормальные базисы} \}.$$

Так как множество всех ортонормальных базисов образует, очевидным образом, компактное пространство и функция  $\omega_1 \dots \omega_r$  (при фиксированном  $\omega$ ) является в этом пространстве непрерывной, то верхняя грань достигается. Поэтому также имеет место

Лемма 13а. Для каждого  $r$ -ковектора  $\omega$  существует такой  $r$ -вектор  $\beta$ , что

$$(8) \quad \omega \cdot \beta = |\omega|_0, \quad \beta \text{ простой}, \quad |\beta| = 1.$$

[Это следует также из леммы (П.1, 86).]

Установим теперь дальнейшие связи между старыми и новыми нормами:

$$(9) \quad |\alpha|_0 = |\alpha|, \text{ если } r\text{-вектор } \alpha \text{ простой,}$$

$$|\alpha|_0 > |\alpha| \text{ в противном случае;}$$

$$(10) \quad |\omega|_0 = |\omega|, \text{ если } r\text{-ковектор } \omega \text{ простой,}$$

$$|\omega|_0 < |\omega| \text{ в противном случае.}$$

Первая часть утверждения (9) очевидна. Чтобы доказать первую часть утверждения (10), допустим, что  $\omega = \Phi\alpha$  (§ 12). Тогда  $r$ -вектор  $\alpha$  простой и в силу (12.4)

$$|\omega|^2 = \omega \cdot \alpha \leq |\omega|_0 |\alpha|_0 = |\omega|_0 |\alpha| = |\omega|_0 |\omega|,$$

что доказывает неравенство  $|\omega|_0 \geq |\omega|$ . Вспоминая неравенство (3), получаем требуемый результат.

Допустим теперь, что  $r$ -ковектор  $\omega = \Phi\alpha$  не является простым; тогда и  $r$ -вектор  $\alpha$  не является простым. Выберем  $\beta$  в соответствии с леммой 13а; тогда ни один из  $r$ -векторов  $\alpha$  и  $\beta$  не будет кратным другого, и замечание, сделанное после (12.10), дает

$$|\omega|_0 = \omega \cdot \beta = \alpha \cdot \beta < |\alpha| |\beta| = |\alpha| = |\omega|.$$

Чтобы доказать последнюю часть утверждения (9), допустим, что  $r$ -вектор  $\alpha$  не является простым; мы можем считать, что  $|\alpha| = 1$ . Положим  $\omega = \Phi\alpha$  и выберем  $\beta$ , как и раньше. Снова имеем  $|\omega|_0 < |\alpha| |\beta| = 1$ . Положим  $\xi = \omega / |\omega|_0$ . Тогда  $|\xi|_0 = 1$ ,

$$|\xi \cdot \alpha| = |\omega \cdot \alpha| / |\omega|_0 > |\omega \cdot \alpha| = |\alpha|^2 = 1,$$

и равенство (6) дает  $|\alpha|_0 \geq |\xi \cdot \alpha| > 1$ , что и требовалось.

Пусть  $\varphi$  — линейное отображение пространства  $V$  в пространство  $V'$ . В этом случае, в соответствии с (12.28) и (12.29),

$$(10) \quad |\varphi\alpha|_0 \leq |\varphi|^r |\alpha|_0, \quad |\varphi^*\omega|_0 \leq |\varphi|^r |\omega|_0.$$

Чтобы доказать первое неравенство, возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$  и запишем разложение

$$\alpha = \sum \alpha_i, \text{ где } \alpha_i \text{ простые и } \sum |\alpha_i| \leq |\alpha| + \varepsilon.$$

Тогда

$$\varphi\alpha = \sum \varphi\alpha_i, \quad \sum |\varphi\alpha_i| \leq |\varphi|^r \sum |\alpha_i| \leq |\varphi|^r (|\alpha| + \varepsilon),$$

и так как  $\varphi\alpha_i$  — простые  $r$ -векторы, отсюда следует нужное неравенство. Чтобы доказать второе неравенство, возьмем произвольный простой  $r$ -вектор  $\alpha$ , для которого  $|\alpha| = 1$ . Тогда, пользуясь только что доказанным неравенством, неравенством (4) и равенством (9), получаем

$$|\varphi^*\omega \cdot \alpha| = |\omega \cdot \varphi\alpha| \leq |\omega|_0 |\varphi\alpha|_0 \leq |\varphi|^r |\omega|_0,$$

и из (2) следует требуемое неравенство.

Примеры. Докажем, что в ортонормальном базисе

$$(12) \quad |ae^{12} + be^{34}|_0 = \sup\{|a|, |b|\}.$$

Пусть  $\xi = e^{12} + ce^{34}$ ,  $|c| \leq 1$ ; мы докажем, что  $|\xi|_0 \leq 1$ , и тогда из (7) будет следовать (12). Чтобы найти с помощью (2) комассу  $|\xi|_0$ , нам, очевидно, нужно рассматривать только те простые бивекторы  $\alpha$ , которые лежат в пространстве, порождаемом векторами  $e_1, \dots, e_4$ . Такие бивекторы можно записать в виде  $\alpha = v_1 \vee v_2$ , где  $v_1$  и  $v_2$  — ортогональные единичные векторы в этом пространстве. Так как вращения в подпространствах, порожденных векторами  $e_1, e_2$  и векторами  $e_3, e_4$ , не влияют на вид бивектора  $\xi$ , то мы можем считать, что  $v_1 = a_1e_1 + a_3e_3$ . Если  $v_2 = \sum b_i e_i$ , то по формуле (5.5)

$$\alpha^{12} = (v_1 \vee v_2)^{12} = a_1b_2, \quad \alpha^{34} = a_3b_4.$$

Поэтому

$$\xi \cdot \alpha = \sum_{(\lambda)} \xi_\lambda \alpha^\lambda = \alpha^{12} + c\alpha^{34} = a_1b_2 + ca_3b_4.$$

Положим

$$u_1 = a_1e_1 + ca_3e_2, \quad u_2 = b_2e_1 + b_4e_2;$$

тогда

$$\begin{aligned} (\xi \cdot \alpha)^2 &= (u_1 \cdot u_2)^2 \leq |u_1|^2 |u_2|^2 = \\ &= (a_1^2 + c^2 a_3^2)(b_2^2 + b_4^2) \leq |v_1|^2 |v_2|^2 = 1; \end{aligned}$$

этим доказано, что  $|\xi|_0 \leq 1$ .

Докажем теперь, что

$$(13) \quad |ae_{12} + be_{34}|_0 = |a| + |b|.$$

Мы можем считать, что  $a > 0$ ,  $b \geq 0$ . Положим  $\omega = e^{12} + e^{34}$ ,  $\alpha = ae_{12} + be_{34}$ . Тогда  $|\omega|_0 = 1$ ,  $\omega \cdot \alpha = a + b$ ; поэтому в силу (6)  $|\alpha|_0 \geq a + b$ . Обратное очевидно.

Замечание. В евклидовом векторном пространстве для каждого вектора  $v \neq 0$  существует такой единственный ковектор  $f$ , что  $|f| = 1$ ,  $f(v) = |v|$ ; он определяется соотношением  $f = \Phi u$ , где  $u = v/|v|$ . В нормированном векторном пространстве ковек-

тор, обладающий такими свойствами, существует (П.1, лемма 8b), но не обязательно является единственным. Это как раз и происходит в рассматриваемом нами случае в  $V_{[r]}$  и сопряженном к нему пространстве  $V^{[r]}$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} |e^{12}|_0 &= |e^{12} + e^{34}|_0 = 1, \\ e^{12} \cdot e_{12} &= (e^{12} + e^{34}) \cdot e_{12} = 1 = |e_{12}|_0. \end{aligned}$$

**14. Масса и комасса произведений.** Мы установим здесь несколько неравенств; некоторые из них могли бы быть улучшены. Прежде всего для внешних произведений

- (1)  $|\alpha \vee \beta|_0 \leq |\alpha|_0 |\beta|_0$ ,  
 (2)  $|\omega \vee \xi|_0 \leq \binom{r+s}{r} |\omega|_0 |\xi|_0 \quad (\omega \in V^{[r]}, \xi \in V^{[s]}),$   
 (3)  $|\omega \vee \xi|_0 \leq |\omega|_0 |\xi|_0$ , если  $\omega$  или  $\xi$  — простой поликовектор.

Чтобы доказать неравенство (1), возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$  и напомним  $\alpha = \sum \alpha_i$ , где  $\alpha_i$  простые,  $\sum |\alpha_i| < |\alpha|_0 + \varepsilon$  и аналогично для  $\beta$ . Тогда, пользуясь формулами (13.9) и (12.14), получаем

$$|\alpha \vee \beta|_0 \leq \sum_{i,j} |\alpha_i \vee \beta_j|_0 \leq \sum_{i,j} |\alpha_i| |\beta_j| < (|\alpha|_0 + \varepsilon)(|\beta|_0 + \varepsilon),$$

откуда и следует (1). Чтобы доказать неравенство (2), выберем ортонормальную систему координат для  $\omega \vee \xi$  в соответствии с замечанием, сделанным после (13.7); тогда, пользуясь формулой (6.6), получим

$$|\omega \vee \xi|_0 = (\omega \vee \xi)_{1 \dots r+s} = \sum_{(\lambda)(\mu)} \delta_{1 \dots r+s}^{\lambda \mu} \omega_\lambda \xi_\mu.$$

Так как в силу (13.7)  $|\omega_\lambda| \leq |\omega|_0$  и  $|\xi_\mu| \leq |\xi|_0$  и так как рассматриваемая сумма имеет не более  $\binom{r+s}{s}$  членов, откуда следует (2).

Пример. В неравенстве (2) мы не можем отбросить числовой множитель. В самом деле, возьмем  $r = s = 2$  и  $\omega = \xi = e^{12} + e^{34}$ . Тогда в силу (13.12)  $|\omega|_0 = 1$ , и поэтому

$$|\omega \vee \xi|_0 = |2e^{1234}|_0 = 2 = 2|\omega|_0 |\xi|_0.$$

Чтобы доказать неравенство (3), допустим, что  $\omega$  — простой  $r$ -ковектор. Пользуясь той же системой координат, что и раньше,

запишем  $\omega = f^1 \vee \dots \vee f^r$  и  $f^i = g^i + h^i$ , где  $g^i$  и  $h^i$  — линейные комбинации соответственно ковекторов  $e^1, \dots, e^{r+s}$  и ковекторов  $e^{r+s+1}, \dots, e^n$ . Тогда имеет место разложение

$$\omega = \omega' + \sum_k \omega_k, \quad \omega' = g' \vee \dots \vee g^r,$$

где каждый  $r$ -ковектор  $\omega_k$  содержит некоторый ковектор  $e^j$  с индексом  $j \geq r+s$ . Совершив, если нужно, вращение в пространстве, порожденном векторами  $e_1, \dots, e_{r+s}$ , мы можем считать, что  $\omega' = a e^1 \dots e^r$  для некоторого числа  $a$ . Теперь, следуя доказательству неравенства (2), мы получаем

$$|\omega \vee \xi|_0 = (\omega \vee \xi)_{1 \dots r+s} = \omega_{1 \dots r} \xi_{r+1 \dots r+s} \leq |\omega|_0 |\xi|_0.$$

Докажем теперь аналогичные неравенства для внутренних произведений:

$$(4) \quad |\omega \wedge \alpha|_0 \leq |\omega|_0 |\alpha|_0 \quad (\omega \in V^{[r]}, \alpha \in V_{[s]}, r \geq s);$$

$$(5) \quad |\omega \wedge \alpha|_0 \leq \binom{s}{r} |\omega|_0 |\alpha|_0 \quad (\omega \in V^{[r]}, \alpha \in V_{[s]}, r \leq s);$$

$$(6) \quad |\omega \wedge \alpha|_0 \leq |\omega|_0 |\alpha|_0, \text{ если } \omega \text{ — простой } r\text{-ковектор.}$$

Чтобы доказать неравенства (4) и (5), возьмем произвольный  $(r-s)$ -вектор  $\beta$  в первом случае и произвольный  $(s-r)$ -ковектор  $\xi$  во втором. Тогда в этих двух случаях

$$(\omega \wedge \alpha) \cdot \beta = |\omega \cdot (\alpha \vee \beta)| \leq |\omega|_0 |\alpha \vee \beta|_0 \leq |\omega|_0 |\alpha|_0 |\beta|_0,$$

$$\xi \cdot (\omega \wedge \alpha) = |(\xi \vee \omega) \cdot \alpha| \leq |\xi \vee \omega|_0 |\alpha|_0 \leq \binom{s}{r} |\xi|_0 |\omega|_0 |\alpha|_0.$$

Взяв  $|\beta|_0 = 1$ ,  $|\xi|_0 = 1$  и пользуясь равенствами (13.5) и (13.6), получаем неравенства (4) и (5). Неравенство (6) подобным же образом следует из (3).

**Пример.** В неравенстве (5) мы не можем отбросить числовой множитель, даже если  $s$ -вектор  $\alpha$  является простым. В самом деле, возьмем  $\omega = e^{12} + e^{34}$ ,  $\alpha = e_{1234}$ . Тогда в силу (13.12)  $|\omega|_0 = = |\alpha|_0 = 1$ . На основании формул (7.7) и (13.13)

$$|\omega \wedge \alpha|_0 = |e_{34} + e_{12}|_0 = 2 = 2 |\omega|_0 |\alpha|_0.$$

**15. О проекциях.** Мы выведем несколько неравенств, которыми воспользуемся в гл. IX; последнее неравенство встретится в гл. IV. Пусть  $V$  — евклидово векторное пространство и  $W$  — произвольное его подпространство. Тогда любой вектор  $v$  единственным образом может быть записан в виде

$$(1) \quad v = \pi v + \pi' v, \quad \pi v \in W, \text{ вектор } \pi' v \text{ ортогонален } W;$$

вектор  $\pi v$  называется *ортогональной проекцией* вектора  $v$  в подпространство  $W$ . Так как  $\pi$  является линейным отображением пространства  $V$  на  $W$ , то для любого  $r$ -вектора  $\alpha$  можно определить  $\pi\alpha$ .

Пусть  $W_1$  и  $W_2$  —  $r$ -мерные ориентированные подпространства пространства  $V$  с  $r$ -направлениями  $\alpha(W_1)$ ,  $\alpha(W_2)$  (§ 12). Определим *угол*  $\theta$  между этими подпространствами и *расстояние*  $|W_2 - W_1|$  между их  $r$ -направлениями формулами

$$(2) \quad \cos \theta = \alpha(W_1) \cdot \alpha(W_2), \quad |W_2 - W_1| = |\alpha(W_2) - \alpha(W_1)|,$$

причем мы берем  $0 \leq \theta \leq \pi$ . В силу (12.10) угол  $\theta$  можно определить. Заметим, что

$$(3) \quad |W_2 - W_1|^2 = [\alpha(W_2) - \alpha(W_1)] \cdot [\alpha(W_2) - \alpha(W_1)] = 2 - 2 \cos \theta,$$

и поэтому

$$(4) \quad |W_2 - W_1| = 2 \sin \frac{\theta}{2}.$$

Пусть  $\pi$  — ортогональная проекция в подпространство  $W_1$ ; мы докажем, что

$$(5) \quad \pi\alpha(W_2) = \cos \theta \alpha(W_1), \quad \pi\alpha(W_2) \cdot \alpha(W_1) = \cos \theta.$$

В самом деле, мы можем считать, что

$$\alpha(W_1) = e_1 \dots e_r, \quad \alpha(W_2) = v_1 \vee \dots \vee v_r, \quad v_i = \pi v_i + v'_i.$$

Тогда  $v'_i \cdot e_j = 0$  при  $j \leq r$ , и потому

$$\alpha(W_2) \cdot \alpha(W_1) = (\pi v_1 \vee \dots \vee \pi v_r) \cdot e_1 \dots e_r = \pi\alpha(W_2) \cdot \alpha(W_1),$$

что доказывает второе из равенств (5). Так как  $\pi\alpha(W_2)$  является кратным  $r$ -вектора  $\alpha(W_1)$ , то отсюда следует первое из равенств (5).

Пусть  $|Q|$  обозначает ( $r$ -мерный) объем полиэдрального множества  $Q$  в подпространстве  $W_2$ . Мы докажем, что

$$(6) \quad |\pi(Q)| = |\cos \theta| |Q| \quad (Q \subset W_2).$$

Из элементарных свойств объемов следует, что мы можем считать множество  $Q$  параллелепипедом, определяемым векторами  $v_1, \dots, v_r$ , причем  $v_1 \vee \dots \vee v_r = \alpha(W_2)$ . Тогда  $|Q| = 1$ , а  $|\pi(Q)| = |\pi\alpha(W_2)| = \cos \theta$ , как и требовалось.

Мы закончим несколькими неравенствами относительно векторов в подпространстве  $W_2$ :

$$(7) \quad |\cos \theta| |v| \leq |\pi v| \leq |v|, \quad |v - \pi v| \leq |W_2 - W_1| |v| \quad (v \in W_2).$$

Мы можем считать, что  $|v| = 1$ . Выберем  $v_2, \dots, v_r$  в  $W_2$  так, чтобы система векторов  $v, v_2, \dots, v_r$  была ортонормальной. Очевидно, что  $|\pi v| \leq |v|$ , а также  $|\pi v_i| \leq |v_i|$ , и поэтому соотношения (5) и (12.16) дают

$$|\cos \theta| = |\pi \alpha(W_2)| \leq |\pi v| |\pi v_2| \dots |\pi v_r| \leq |\pi v|,$$

что доказывает первое неравенство. Далее, полагая  $\alpha_i = \alpha(W_i)$ , на основании леммы 9а и неравенства (12.14) получаем

$$|\alpha_1 \vee v| = |(\alpha_1 - \alpha_2) \vee v + \alpha_2 \vee v| = |(\alpha_1 - \alpha_2) \vee v| \leq |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

Наконец, в силу (12.20)

$$|\alpha_1 \vee v| = |\alpha_1 \vee (v - \pi v)| = |v - \pi v|,$$

и второе из неравенств (7) доказано.

## II. Дифференциальные формы

В этой главе мы излагаем с геометрической точки зрения некоторые из основных предложений дифференциального и интегрального исчисления в евклидовом пространстве  $E^n$ . В частности, изучаются дифференциальные формы. Мы определяем гладкие многообразия и показываем, как можно рассматривать дифференциальные формы на этих многообразиях. Для большей части настоящей главы необходимо весьма немного из гл. I. Для удобства мы пользуемся метрическими свойствами пространства  $E^n$ , однако большинство формул очевидным образом справедливо и в аффинном пространстве.

Мы начинаем с общих свойств гладких (т. е. непрерывно дифференцируемых) отображений одного евклидова пространства  $E^n$  в другое,  $E^m$ . В частном случае  $m = 1$  мы имеем действительные функции, определенные в  $E^n$ . Отчасти для иллюстрации общих методов мы доказываем несколько элементарных теорем. Затем продолжается изучение свойств дифференциальных форм. В этой книге не требуется больших знаний из обычной теории частных производных. Большая ее часть излагается здесь таким методом, при котором не используются системы координат, и при этом смысл всегда остается ясным. Легко получаются обычные свойства систем координат. Устанавливается геометрическое значение якобианов и доказывается теорема об обратных функциях.

Затем выводятся основные свойства операции внешнего дифференцирования дифференциальных форм. Эта операция составляет часть общей теоремы Стокса; ее абстрактный аналог, операция нахождения кограницы коцепей, является стержнем излагаемой далее общей теории.

В гладких многообразиях утрачивается не только метрический, но и аффинный характер евклидовых пространств. Векторы и ковекторы должны определяться в отдельных точках. Это делается прямым методом с применением параметризованных кривых и действительных функций на многообразии. Теперь уже на этот случай может быть перенесена теория дифференциальных форм. При изучении внешнего дифференциала предполагается, что многообразие является 2-гладким и что дифференциальная форма гладкая. Эти предположения будут ослаблены в (III, 17); см. также (IX, 12) и (X, 9).

**1. Дифференциал гладкого отображения.** Пусть  $f$  — отображение открытого подмножества  $R$  пространства  $E^n$  в пространство  $E^m$ . Для любой точки  $p \in R$  и любого вектора  $v$  пространства  $E^n$  определим *производную отображения  $f$  в точке  $p$  относительно  $v$*  формулой (символ  $t \rightarrow 0+$  означает, что мы берем только  $t > 0$ )

$$(1) \quad \nabla_v f(p) = \nabla f(p, v) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} [f(p + tv) - f(p)],$$

если этот предел существует; производная является вектором в пространстве  $E^m$ . Мы говорим, что  $f$  — *гладкое* отображение, если эта производная существует и непрерывна по  $p$  для каждого вектора  $v$ ; ниже (§ 5) мы увидим, что это верно в том и только в том случае, если в прямоугольной системе координат отображение  $f$  непрерывно дифференцируемо.

Если  $\varphi$  — гладкое отображение отрезка  $[0, t]$  в  $E^m$  и  $e$  — число 1, рассматриваемое как вектор в одномерном пространстве, то  $\nabla_e \varphi(s) = d\varphi(s)/ds$  есть касательный вектор к дуге в точке  $\varphi(s)$ ; мы имеем

$$(2) \quad \varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t \nabla_e \varphi(s) ds.$$

Мы можем это доказать обычными методами анализа (ср. гл. III) или же, введя в  $E^m$  систему координат и получив наше соотношение из соответствующих формул для каждой координаты.

Если, как и выше, даны  $f$ ,  $p$  и  $v$ , то, полагая  $\varphi(t) = f(p + tv)$ , мы видим, что

$$(3) \quad f(p + tv) - f(p) = \int_0^t \nabla_v f(p + sv) ds$$

(если  $p + sv \in R$  при  $0 \leq s \leq t$ ).

**Теорема 1А.** Если  $f$  — гладкое отображение, то для каждой точки  $p$   $\nabla_v f(p)$  есть линейное относительно  $v$  отображение пространства  $V(E^n)$  в пространство  $V(E^m)$ .

Пусть  $\nabla f(p)$  обозначает это отображение;  $\nabla f(p)$  называется *дифференциалом* отображения  $f$  в точке  $p$ .

Очевидно,  $\nabla_{av} f(p) = a \nabla_v f(p)$  ( $a \geq 0$ ); мы должны доказать, что

$$(4) \quad \nabla_{v_1+v_2} f(p) = \nabla_{v_1} f(p) + \nabla_{v_2} f(p).$$

Положим

$$p_t = p + tv_1, \quad q_t = p_t + tv_2 = p + t(v_1 + v_2).$$

Пусть задано  $\varepsilon > 0$ ; выберем  $\zeta > 0$  так, чтобы

$$|\nabla_{v_i} f(p') - \nabla_{v_i} f(p)| < \varepsilon, \text{ если } |p' - p| < \zeta \quad (i = 1, 2).$$

Взяв  $t$  столь малым, чтобы отрезки  $pp_t$  и  $p_tq_t$  лежали в  $U_\zeta(p) \cap R$ , применим формулу (3) к каждому из этих отрезков. Мы получим

$$|f(p_t) - f(p) - t \nabla_{v_1} f(p)| = \left| \int_0^t [\nabla_{v_1} f(p_s) - \nabla_{v_1} f(p)] ds \right| \leq \varepsilon t,$$

$$|f(q_t) - f(p_t) - t \nabla_{v_2} f(p)| \leq \varepsilon t.$$

Поэтому

$$\left| \frac{f(q_t) - f(p)}{t} - [\nabla_{v_1} f(p) + \nabla_{v_2} f(p)] \right| \leq 2\varepsilon,$$

откуда следует равенство (4).

В случае  $m = 1$  мы имеем отображение пространства  $E^n$  в пространство действительных чисел, т. е. действительную функцию  $\varphi$  в  $E^n$ . Производная  $\nabla_v \varphi(p)$  есть принимающая действительные значения функция, линейная относительно  $v$  в каждой точке  $p$ ; следовательно,  $\nabla \varphi(p)$  есть ковектор в точке  $p$ . Дифференциал  $\nabla \varphi$  называется также *градиентом* функции  $\varphi$  в точке  $p$ . По определению,

$$(5) \quad \nabla \varphi(p) \cdot v = \nabla \varphi(p, v).$$

**2. Некоторые свойства дифференциалов.** Докажем сначала три леммы.

**Лемма 2а.** Пусть  $f$  — гладкое в открытом множестве  $R$  отображение. Тогда для каждого компактного множества  $Q \subset R$  и каждого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\zeta > 0$ , что для любых точек  $p, q$  и вектора  $v$

$$(1) \quad |\nabla_v f(q) - \nabla_v f(p)| \leq \varepsilon |v|, \text{ если } p, q \in Q, |q - p| < \zeta.$$

Возьмем в  $E^n$  ортонормальный базис и выберем  $\zeta$  так, чтобы это выполнялось для каждого из векторов  $e_1, \dots, e_n$  и числа  $\varepsilon/n$  вместо  $\varepsilon$ . Возьмем затем любой вектор  $v = \sum v^i e_i$ ; тогда  $|v^i| \leq |v|$ . В силу теоремы 1А

$$\begin{aligned} |\nabla_v f(q) - \nabla_v f(p)| &= \left| \sum_i v^i [\nabla_{e_i} f(q) - \nabla_{e_i} f(p)] \right| \leq \\ &\leq \sum_i |v^i| \frac{\varepsilon}{n} \leq \varepsilon |v|. \end{aligned}$$

**Лемма 2б.** Пусть  $f$  — гладкое в выпуклом открытом множестве  $R'$  отображение; предположим, что для некоторой точки  $p_0 \in R'$

$$(2) \quad |\nabla_v f(p) - \nabla_v f(p_0)| \leq \varepsilon |v| \quad (p \in R', v \text{ — произвольный вектор}).$$

Тогда для любых точек  $p, q \in R'$  выполняется неравенство (3) (см. ниже).

Полагая  $p_t = (1-t)p + tq$  и пользуясь формулой (1.3), получаем

$$f(q) - f(p) - \nabla_u f(p_0) = \int_0^1 [\nabla_u f(p_t) - \nabla_u f(p_0)] dt,$$

где  $u = q - p$ . Отсюда сразу следует неравенство (3).

**Лемма 2с.** Пусть  $f$  — гладкое в  $R$  отображение, и пусть множество  $Q \subset R$  компактно. Тогда для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\zeta > 0$ , что

$$(3) \quad |f(q) - f(p) - \nabla f(p_0, q - p)| \leq \varepsilon |q - p|, \\ \text{если } p_0 \in Q \text{ и } p, q \in U_\zeta(p_0).$$

Пусть  $Q' = \bar{U}_{\zeta_0}(Q) \subset R$ . Для этого множества  $Q'$  найдем  $\zeta \leq \zeta_0$  по лемме 2а; тогда неравенство (3) мы получим, если применим лемму 2б к  $U_\zeta(p_0)$ .

Пусть дано гладкое отображение  $f$ ; определим величины

$$(4) \quad |\nabla f(p)| = \sup \{ |\nabla_v f(p)| : |v| = 1 \},$$

$$(5) \quad |\nabla f|_Q = \sup \{ |\nabla f(p)| : p \in Q \}.$$

Если  $R$  — область определения отображения  $f$ , то величину  $|\nabla f|_R$  мы будем обозначать через  $|\nabla f|$ .

Так как отображение  $\nabla_v f(p)$  линейно и поэтому непрерывно относительно  $v$ , то величина  $|\nabla f(p)|$  конечна; если  $f$  — действительная функция, то это просто норма ковектора  $\nabla f(p)$  (П.1, 8.7). Далее, функция  $|\nabla f(p)|$  непрерывна в  $R$ ; поэтому, если множество  $Q$  компактно, то верхняя грань  $|\nabla f|_Q$  конечна. Очевидно [ввиду формулы (1.3)], что

$$(6) \quad |\nabla_v f(p)| \leq |\nabla f(p)| |v| \leq |\nabla f| |v|,$$

$$(7) \quad |f(q) - f(p)| \leq |\nabla f|_{pq} |q - p|, \text{ если отрезок } pq \subset R.$$

Пусть  $f$  и  $g$  — гладкие отображения открытых множеств  $R \subset E^n$  и  $S \subset E^m$  соответственно в  $S$  и в  $E^l$ ; тогда  $gf = g \circ f$  есть гладкое отображение множества  $R$  в  $E^l$ , и

$$(8) \quad \nabla(g \circ f)(p, v) = \nabla g[f(p), \nabla f(p, v)];$$

таким образом, если  $\nabla f$  (в точке  $p$ ) переводит  $v$  в  $v'$ , а  $\nabla g$  [в точке  $f(p)$ ] переводит  $v'$  в  $v''$ , то  $\nabla(g \circ f)$  (в точке  $p$ ) переводит  $v$  в  $v''$ .

Чтобы это доказать, допустим, что  $|\nabla f(p')| \leq M$  в некоторой окрестности точки  $p$ . Положим

$$p_t = p + tv, \quad q = f(p), \quad q_t = f(p_t).$$

Возьмем любое  $\varepsilon > 0$ . В силу леммы 2с мы можем выбрать  $t_0 > 0$  так, чтобы

$$|q_t - q - t\nabla f(p, v)| \leq \varepsilon t |v|,$$

$$|g(q_t) - g(q) - \nabla g(q, q_t - q)| \leq \varepsilon |q_t - q|,$$

и  $|\nabla f(p_t)| \leq M$ , если  $0 \leq t \leq t_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} & |\nabla g(q, q_t - q) - t \nabla g(q, \nabla f(p, v))| = \\ & = |\nabla g(q, q_t - q - t \nabla f(p, v))| \leq |\nabla g(q)| |q_t - q - t \nabla f(p, v)| \leq \\ & \leq \varepsilon t |v| |\nabla g(q)|. \end{aligned}$$

Кроме того, в силу (7)  $|q_t - q| \leq Mt |v|$ . Поэтому при  $0 < t \leq t_0$

$$|g(q_t) - g(q) - t \nabla g(q, \nabla f(p, v))| \leq \varepsilon t |v| (|\nabla g(q)| + M),$$

и равенство (8) доказано.

Если, как в (1.5), вместо  $\nabla f(p, v)$  мы воспользуемся обозначением  $\nabla f(p) \cdot v$ , то равенство (8) будет выглядеть так:

$$(8') \quad \nabla(g \circ f)(p) \cdot v = \nabla g(f(p)) \cdot [\nabla f(p) \cdot v].$$

Мы можем записать его в виде

$$(8'') \quad \nabla(g \circ f)(p) = \nabla g(f(p)) \circ \nabla f(p),$$

или просто  $\nabla(g \circ f) = \nabla g \circ \nabla f$ .

Если  $\varphi$  и  $\psi$  — гладкие действительные функции в  $R$  и  $\varphi \cdot \psi$  — их произведение, то с помощью обычного доказательства мы получаем  $\nabla_v(\varphi \cdot \psi) = \psi \nabla_v \varphi + \varphi \nabla_v \psi$ ; поэтому

$$(9) \quad \nabla(\varphi \cdot \psi) = \psi \nabla \varphi + \varphi \nabla \psi.$$

**3. Дифференциальные формы.** Дифференциальная  $r$ -форма  $\omega$ , или, для краткости,  $r$ -форма на некотором множестве  $Q \subset E^n$ , есть определенная на  $Q$  функция, значениями которой являются  $r$ -ковекторы<sup>1)</sup>;  $r$  есть *степень* (или размерность) формы  $\omega$ . Мы говорим, что  $\omega$  является  $s$ -гладкой, если для каждого  $r$ -вектора  $\alpha$  функция  $\omega(p) \cdot \alpha$   $s$ -гладкая; см. ниже § 5. 0-форма на множестве  $Q$  есть действительная функция, определенная на  $Q$ . Если пространство  $E^n$  ориентировано и  $\omega_0$  — единичный  $n$ -ковектор этого про-

<sup>1)</sup> То есть элементы пространства  $V^r(E^n)$ . — Прим. ред.

пространства (I, 12), то любая  $n$ -форма может быть единственным образом представлена в виде

$$(1) \quad \omega(p) = \bar{\omega}(p) \omega_0, \quad \text{где } \bar{\omega}(p) \text{ — действительная функция;}$$

см. (I, 8).

Предполагая, что  $r$ -форма  $\omega$  определена в  $Q$ , определим модуль  $|\omega|$  и комассу  $|\omega|_0$  формы  $\omega$  следующим образом:

$$(2) \quad |\omega| = \sup \{ |\omega(p)| : p \in Q \}, \quad |\omega|_0 = \sup \{ |\omega(p)|_0 : p \in Q \},$$

если эти верхние грани конечны [см. также (П.III, 5.1)]. Тогда в силу неравенства (I, 13.4)

$$(3) \quad |\omega(p) \cdot \alpha| \leq |\omega(p)|_0 |\alpha|_0 \leq |\omega|_0 |\alpha|_0;$$

то же самое неравенство имеет место и для  $|\omega|$ ,  $|\alpha|$ .

**4. Гладкие отображения.** Пусть  $f$  — гладкое отображение открытого множества  $R \subset E^n$  в  $E^m$ . По теореме 1А для любой точки  $p \in R$  дифференциал  $\nabla f(p)$  является линейным отображением пространства  $V(E^n)$  в  $V(E^m)$ . В силу (I, 10.1) условием

$$(1) \quad \nabla f(p, v_1 \vee \dots \vee v_r) = \nabla f(p, v_1) \vee \dots \vee \nabla f(p, v_r)$$

определяется соответствующее линейное отображение  $\nabla f(p)$  пространства  $V_{[r]}(E^n)$  в пространство  $V_{[r]}(E^m)$ . Из формулы (I, 10.2) следует, что

$$(2) \quad \nabla f(p, \alpha \vee \beta) = \nabla f(p, \alpha) \vee \nabla f(p, \beta).$$

Отображение  $\nabla f(p)$  пространства  $V(E^n)$  в  $V(E^m)$  имеет сопряженное отображение (П.I, 3), которое мы обозначим через  $f_p^*$ . Если  $\omega$  — некоторая  $r$ -форма в  $S \subset E^m$  и  $f(R) \subset S$ , то для любой точки  $p \in R$   $\omega(f(p))$  есть  $r$ -ковектор и в силу (I, 10.3)  $f_p^*(\omega(f(p)))$  есть  $r$ -ковектор в  $E^n$ , который мы обозначим через  $(f^*\omega)(p)$ . Таким образом, в  $R$  определяется некоторая  $r$ -форма  $f^*\omega$ :

$$(3) \quad f^*\omega(p) = f_p^*(\omega(q)), \quad q = f(p).$$

В силу равенства (I, 10.5) для любого  $r$ -вектора  $\alpha$  в  $E^n$

$$(4) \quad f^*\omega(p) \cdot \alpha = f_p^*(\omega(q)) \cdot \alpha = \omega(q) \cdot \nabla f(p, \alpha), \quad q = f(p).$$

В частности, при  $r=0$  мы имеем действительную функцию  $\varphi$  и

$$(5) \quad (f^*\varphi)(p) = \varphi(f(p)) = (\varphi \circ f)(p); \quad \text{таким образом, } f^*\varphi = \varphi f$$

( $\varphi$  — действительная функция).

Докажем [более общую формулу см. ниже (8.8)], что

$$(6) \quad \nabla(f^*\varphi) = f^*(\nabla\varphi) \quad (\varphi \text{ — действительная функция}).$$

В самом деле, пусть  $u$  — некоторый вектор в  $E^n$ . На основании равенств (1.5), (5), (2.8) ( $\varphi$  отображает множество  $S \subset E^m$  в пространство действительных чисел) и (4) получаем

$$\begin{aligned} \nabla(f^*\varphi)(p) \cdot u &= \nabla(\varphi f)(p, u) = \nabla\varphi[f(p), \nabla f(p, u)] = \\ &= \nabla\varphi(f(p)) \cdot \nabla f(p, u) = f^*(\nabla\varphi)(p) \cdot u. \end{aligned}$$

Для дифференциальных форм  $\omega$  и  $\xi$  условием  $(\omega \vee \xi)(q) = \omega(q) \vee \xi(q)$  определяется их (внешнее) *произведение*  $\omega \vee \xi$ . В силу (I, 10.4)

$$(7) \quad f^*(\omega \vee \xi) = f^*\omega \vee f^*\xi.$$

Если  $f$  и  $g$  — отображения, рассматривавшиеся в (2.8), то из (2.8) мы находим

$$(8) \quad \nabla(g \circ f)(p, \alpha) = \nabla g[f(p), \nabla f(p, \alpha)].$$

Поэтому, если форма  $\omega$  определена в  $g(f(R))$ , то

$$\begin{aligned} [(gf)^*\omega] \cdot \alpha &= \omega[(gf)(p)] \cdot \nabla(gf)(p, \alpha) = \\ &= \omega[gf(p)] \cdot \nabla g[f(p), \nabla f(p, \alpha)] = (g^*\omega)(f(p)) \cdot \nabla f(p, \alpha) = \\ &= [f^*(g^*\omega)](p) \cdot \alpha; \end{aligned}$$

следовательно,

$$(9) \quad (g \circ f)^*\omega = f^*g^*\omega.$$

Из неравенств (I, 12.28), (I, 12.29) и (I, 13.11) для любого  $r$ -вектора  $\alpha$  и любой  $r$ -формы  $\omega$  получаем

$$(10) \quad |\nabla f(p, \alpha)| \leq |\nabla f(p)|^r |\alpha| \leq |\nabla f|^r |\alpha|,$$

$$(11) \quad |\nabla f(p, \alpha)|_0 \leq |\nabla f(p)|^r |\alpha|_0 \leq |\nabla f|^r |\alpha|_0,$$

$$(12) \quad |f^*\omega(p)| \leq |\nabla f(p)|^r |\omega(f(p))| \leq |\nabla f|^r |\omega|,$$

$$(13) \quad |f^*\omega(p)|_0 \leq |\nabla f(p)|^r |\omega(f(p))|_0 \leq |\nabla f|^r |\omega|_0.$$

Константой Липшица отображения  $f$  в пространство  $E^m$  (или отображения в любое нормированное линейное пространство) называется число

$$(14) \quad \mathfrak{L}_f = \mathfrak{L}(f) = \sup \left\{ \frac{|f(q) - f(p)|}{|q - p|} : p \neq q \right\}.$$

Определим константу  $\mathfrak{L}_f|_Q$ , требуя, чтобы точки  $p$  и  $q$  лежали в  $Q$ . Тогда

$$(15) \quad |\nabla f(p)| \leq \mathfrak{L}_f, \text{ если } f \text{ — гладкое отображение;}$$

$$(16) \quad |\nabla f| = \mathfrak{L}_f, \text{ если } f \text{ — гладкое отображение и } R \text{ — выпуклое множество}^1).$$

Первое неравенство очевидно, второе следует из первого и из (1.3).

Мы говорим, что  $f$  — *липищевское* отображение, если величина  $\mathfrak{L}_f$  конечна.

**5. Применение систем координат.** Напомним (П.1, 1), что арифметическое  $n$ -мерное пространство  $\mathfrak{U}^n$  есть множество всех систем  $x = (x^1, \dots, x^n)$ , состоящих из  $n$  действительных чисел; оно имеет естественные базисные векторы  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  и естественное скалярное произведение.

Отображение  $f$  открытого множества  $R \subset E^n$  в  $E^m$  называется *регулярным в точке  $p$* , если  $f$  является гладким в окрестности точки  $p$  и  $\nabla_v f(p) \neq 0$  для всех  $v \neq 0$ , или, что то же самое, если для некоторой системы векторов  $v_1, \dots, v_n$  (а следовательно, и для любой независимой системы) векторы  $\nabla_{v_1} f(p), \dots, \nabla_{v_n} f(p)$  независимы. Если это имеет место, то  $m \geq n$  и  $\nabla f(p)$  есть взаимно однозначное отображение пространства  $V(E^n)$  в пространство  $V(E^m)$ . Отображение  $f$  называется *регулярным на множестве  $Q$* , если оно регулярно во всех точках множества  $Q$ ;  $f$  называется *регулярным*, если оно регулярно во всей своей области определения.

*Гладкая или криволинейная система координат* в  $E^n$  есть взаимно однозначное регулярное отображение  $\chi$  открытого множества  $O \subset \mathfrak{U}^n$  в  $E^n$ . Образ  $\chi(O)$  является открытым множеством (теорема 7А). Если  $p = \chi(x)$ , то числа  $x^1, \dots, x^n$  называются *координатами точки  $p$* . *Координатными векторами* в точке  $p = \chi(x)$  называются векторы

$$(1) \quad e_i(p) = \nabla \chi(x, \bar{e}_i) = \frac{\partial p}{\partial x^i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Так как отображение  $\chi$  регулярно, то эти векторы независимы и, следовательно, образуют базис в пространстве  $V(E^n)$ .

Для любого множества индексов  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  положим

$$(2) \quad e_\lambda(p) = e_{\lambda_1}(p) \vee \dots \vee e_{\lambda_r}(p).$$

<sup>1)</sup> Через  $R$  обозначается область определения отображения  $f$ . — *Прим. ред.*

Из формул (1) и (4.1) получаем

$$(3) \quad e_\lambda(p) = \nabla \chi(x, \bar{e}_\lambda) \quad (p = \chi(x)).$$

Пусть  $\bar{e}^1, \dots, \bar{e}^n$  и  $e^1(p), \dots, e^n(p)$  — базисы, взаимные соответственно к  $\bar{e}_i$  и к  $e_i(p)$ . Тогда  $e^i$  есть 1-форма в  $E^n$ , и поэтому  $\chi^* e^i$  есть 1-форма в  $\mathfrak{M}$ . В силу (4.4) и (1)

$$\chi^* e^i(x) \cdot \bar{e}_j = e^i(p) \cdot \nabla \chi(x, \bar{e}_j) = e^i(p) \cdot e_j(p) = \delta_j^i.$$

Следовательно,  $\chi^* e^i(x) = \bar{e}^i$ . Далее, в силу (4.7)

$$\chi^* e^\lambda = \chi^* e^{\lambda_1} \vee \dots \vee \chi^* e^{\lambda_r}.$$

Таким образом,

$$(4) \quad \chi^* e^i(x) = \bar{e}^i, \quad \chi^* e^\lambda(x) = \bar{e}^\lambda \quad \text{для всех } x \text{ в области определения отображения } \chi.$$

Из формулы (3) мы видим, что для любой точки  $p = \chi(x)$  пространства  $E^n$  и любого  $r$ -вектора  $\alpha$ ,

$$(5) \quad \text{если } \alpha = \sum_{(\lambda)} \alpha^\lambda e_\lambda(p) \text{ и } \bar{\alpha} = \sum_{(\lambda)} \alpha^\lambda \bar{e}_\lambda, \text{ то } \alpha = \nabla \chi(x, \bar{\alpha}).$$

Таким образом, отображение  $\nabla \chi$  сохраняет компоненты  $r$ -векторов и, в частности, векторов.

В силу (4.4) и (3)  $\chi^* \omega(x) \cdot \bar{e}_\lambda = \omega(p) \cdot e_\lambda(p)$ . Поэтому

$$(6) \quad (\chi^* \omega)_\lambda(x) = \omega_\lambda(p) \quad (p = \chi(x)).$$

Таким образом,  $\chi^*$  сохраняет компоненты  $r$ -форм. См. также ниже (13).

Для аффинной системы координат формула (П.1, 12.6) дает

$$(7) \quad \chi(x^1, \dots, x^n) = \chi(0, \dots, 0) + \sum_i x^i e_i \quad (\chi \text{ аффинно}).$$

Если вдобавок  $e_i \cdot e_j = \delta_j^i$ , то система координат называется *декартовой*, или *ортонормальной*.

Дифференциал  $\nabla \varphi$  действительной функции  $\varphi$  в пространстве  $R$  есть 1-форма с компонентами

$$(8) \quad [\nabla \varphi(p)]_i = \nabla \varphi(p, e_i(p)) = \frac{\partial \varphi(p)}{\partial x^i}.$$

В частности, координаты  $x^i$  точки  $p$  имеют дифференциалы с компонентами

$$(9) \quad [\nabla x^i(p)]_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i;$$

поэтому

$$(10) \quad \nabla x^i(p) = e^i(p) \quad (\text{эта форма обычно записывается в виде } dx^i).$$

В этих обозначениях произвольная  $r$ -форма  $\omega$  принимает вид

$$(11) \quad \omega(p) = \sum_{(\lambda)} \omega_{\lambda}(p) e^{\lambda}(p) = \sum_{(\lambda)} \omega_{\lambda}(p) dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_r}.$$

Пусть в пространстве  $E^n$  задана действительная функция  $\varphi$ . Положим  $\varphi^*(x) = \varphi(\chi(x))$  в  $O$ . В силу (6) [см. (4.6) и (4.5)]

$$(12) \quad \nabla \varphi^*(x) \cdot \bar{e}_i = \nabla \varphi(p) \cdot e_i(p) \quad (p = \chi(x)).$$

Таким образом, функции  $\varphi$  и  $\varphi^*$  имеют одни и те же частные производные

$$(13) \quad \frac{\partial \varphi^*(x)}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi(p)}{\partial x^i} \quad (\varphi^* = \chi^* \varphi, p = \chi(x)).$$

Пусть  $f$  — гладкое отображение открытого множества  $R \subset E^n$  в  $E^m$ , и пусть  $\chi$  — система координат в  $E^n$ . Тогда, обобщая соотношение (8), имеем

$$(14) \quad \frac{\partial f(p)}{\partial x^i} = \nabla f(p, e_i(p)).$$

Перейдем в (2.8) к обычным обозначениям, пользуясь системами координат в трех рассматриваемых пространствах. Пусть  $e_i = e_i(p)$ ,  $e'_j = e'_j(f(p))$  — координатные векторы в пространствах  $E^n$  и  $E^m$ , взятые соответственно в точках  $p$  и  $f(p)$ . Если  $\nabla f^j(p, v)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) — компоненты вектора  $\nabla f(p, v)$  и т. д., то формула (2.8) дает

$$\begin{aligned} \nabla (gf)^j(p, e_i) &= \nabla g^j \left[ f(p), \sum_k \nabla f^k(p, e_i) e'_k \right] = \\ &= \sum_k \nabla g^j [f(p), e'_k] \nabla f^k(p, e_i). \end{aligned}$$

Если  $x^i, y^k, z^j$  — соответственно координаты точек  $p, f(p)$  и  $g(f(p))$ , то эту формулу можно записать так:

$$\frac{\partial z^j}{\partial x^i} = \sum_k \frac{\partial z^j}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^i}.$$

Рассмотрим *преобразование координат*. Пусть  $\chi$  и  $\chi'$  — некоторые системы координат; пусть в произвольной точке  $p$  старые и новые базисные векторы связаны, как в (П.I, 1.1):

$$(15) \quad e_i(p) = \sum_j a_i^j(p) e'_j(p), \quad e'_i(p) = \sum_j a_i'^j(p) e_j(p)$$

и аналогично для  $e^i(p)$ ,  $e'^i(p)$ . В силу (9)

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \nabla x^i(p, e'_j(p)) = \sum_k a'^k_j(p) \nabla x^i(p, e_k(p)) = a'^i_j(p)$$

и т. д.; поэтому

$$(16) \quad a'^i_j(p) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}, \quad a'^i_j(p) = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}.$$

В силу (I, 5.8) и (16) формулы преобразования компонент  $r$ -вектор-функций и  $r$ -форм имеют вид

$$(17) \quad \alpha'^\lambda(p) = \sum_{(\mu)} D^\lambda_\mu(p) \alpha^\mu(p), \quad \omega'_\lambda(p) = \sum_{(\mu)} D'^\mu_\lambda(p) \omega_\mu(p),$$

где

$$(18) \quad D^\lambda_\mu(p) = \left| \frac{\partial x'^\lambda_i}{\partial x^\mu_j} \right|, \quad D'^\mu_\lambda(p) = \left| \frac{\partial x^\lambda_i}{\partial x'^\mu_j} \right|.$$

Пусть  $f$  — отображение открытого множества  $R \subset E^n$  в  $E^m$ . Для аффинной системы координат  $\chi$  в  $E^n$  [см. (7)] мы имеем  $\nabla_{e_i} f(p) = \partial f(p) / \partial x^i$ ; очевидно, что  $\nabla_v f(p)$  непрерывно зависит от  $p$  при постоянном векторе  $v$  в том и только в том случае, если непрерывны производные  $\partial f(p) / \partial x^i$ . Если  $f(p) = (y^1, \dots, y^m)$ , то это имеет место в том и только в том случае, когда непрерывны производные  $\partial y^j / \partial x^i$ . Это — обычное определение *гладкости* (или *непрерывной дифференцируемости*, или *принадлежности классу  $C^1$* ) отображения  $f$ . Легко по индукции показать, что отображение  $f$  является  $k$ -гладким (или *принадлежит классу  $C^k$* ), т. е. что частные производные порядка  $\leq k$  существуют и непрерывны в том и только в том случае, если для каждого множества векторов  $v_1, \dots, v_k$  пространства  $E^n$  производная  $\nabla_{v_k} \dots \nabla_{v_1} f(p)$  существует и непрерывна.

Пусть система координат  $\chi$  является  $k$ -гладкой. Легко видеть, что в этом случае действительная функция  $\varphi$  является  $k$ -гладкой тогда и только тогда, когда все частные производные функции  $\varphi$  порядка  $\leq k$  существуют и непрерывны; подобная же теорема справедлива и для  $r$ -форм  $\omega$ .

Пусть  $f$  — гладкое отображение. Тогда для любой непрерывной  $r$ -вектор-функции  $\alpha(p)$  и любой системы координат  $\chi$  формула (14) дает

$$(19) \quad \nabla f(p, \alpha(p)) = \sum_{(\lambda)} \alpha^\lambda(p) \nabla f(p, e_\lambda(p)) = \\ = \sum_{(\lambda)} \alpha^\lambda(p) \frac{\partial f(p)}{\partial x^{\lambda_1}} \vee \dots \vee \frac{\partial f(p)}{\partial x^{\lambda_r}}.$$

**Лемма 5а.** Пусть  $f$  — некоторое  $k$ -гладкое отображение открытого множества  $R \subset E^n$  в  $E^m$ , и пусть  $\alpha(p)$  — произвольная  $(k-1)$ -гладкая  $r$ -вектор-функция в  $R$ . Тогда производная  $\nabla f(p, \alpha(p))$  является  $(k-1)$ -гладкой в  $R$ .

Это сразу следует из (19).

**Лемма 5b.** Пусть  $f$  — такое же отображение, как и выше, а  $\omega$  — некоторая  $(k-1)$ -гладкая  $r$ -форма в  $S \supset f(R)$ . Тогда  $r$ -форма  $f^*\omega$  является  $(k-1)$ -гладкой в  $R$ .

Воспользуемся аффинной системой координат в  $E^n$ ; тогда предыдущая лемма показывает, что каждая компонента  $[f^*\omega(p)]_\lambda = \omega(f(p)) \cdot \nabla f(p, e_\lambda)$  является  $(k-1)$ -гладкой; следовательно, это верно и для формы  $f^*\omega$ .

Пусть  $f$  — такое же отображение, как и выше, и пусть  $e_i$  и  $e^i$  — взаимные базисы в  $E^m$ . В соответствующей аффинной системе координат в  $E^m$  любая точка  $y \in E^m$  равна  $q_0 + \sum y^i e_i$  (точка  $q_0$  фиксирована). Докажем, что

$$(20) \quad \text{если } f(p) = q_0 + \sum f^i(p) e_i, \text{ то } f^*e^i = \nabla f^i.$$

В самом деле, формула (4) дает

$$(f^*e^i)(p) \cdot v = e^i \cdot \nabla_v f(p) = e^i \cdot \sum_j \nabla_v f^j(p) e_j = \nabla_v f^i(p).$$

**6. Якобианы.** Пусть  $E^n$  — ориентированное пространство с единичным  $n$ -вектором  $\alpha_0$ . Пусть, кроме того, дано гладкое отображение  $f$  открытого множества  $R \subset E^n$  в  $E^m$ . Тогда *якобианом*, или  *$n$ -вектором-якобианом* отображения  $f$  в точке  $p \in R$  называется  $n$ -вектор

$$(1) \quad J_f(p) = \nabla f(p, \alpha_0).$$

Пользуясь представлением  $\alpha_0 = v_1 \vee \dots \vee v_n$ , мы видим, что отображение  $f$  регулярно в точке  $p$  (см. § 5) в том и только в том случае, если  $J_f(p) \neq 0$ ; см. формулу (4.1) и лемму (1, 9а).

Если  $J_f(p) \neq 0$ , то при  $v \neq 0$  вектор  $\nabla f(p, v)$  также отличен от нуля. Докажем лемму:

**Лемма 6а.** Если  $f$  регулярно в точке  $p$ , то для любого вектора  $v$

$$(2) \quad |\nabla f(p, v)| \geq \frac{|J_f(p)| |v|}{|J_f(p)|^{n-1}}.$$

Мы можем считать, что  $|v|=1$ . Выберем ортонормальный базис  $e_1, \dots, e_n$ , взяв  $e_1=v$ , и положим  $\omega_i = \nabla f(p, e_i)$ . Тогда в силу (1, 12.16)

$$|J_f(p)| = |\nabla f(p, e_1) \vee \dots \vee \nabla f(p, e_n)| \leqslant \\ \leqslant |\nabla f(p, e_1)| \dots |\nabla f(p, e_n)| \leqslant |\nabla f(p, v)| |\nabla f(p)|^{n-1},$$

что и доказывает неравенство (2).

Пусть  $E^m = E'^n$  — ориентированное пространство с единичным  $n$ -вектором  $\alpha'_0$ . Тогда [ср. (3.1)] существует единственная действительная функция  $\bar{J}_f(p)$ , алгебраический якобиан отображения  $f$  в точке  $p$ , определяемая соотношением

$$(3) \quad J_f(p) = \bar{J}_f(p) \alpha'_0.$$

Это — якобиан в обычном смысле слова.

*Лемма 6b. Пусть пространства  $E^n$  и  $E'^n$  ориентированы, и пусть  $f$  и  $g$  — гладкие отображения соответственно открытого множества  $R \subset E^n$  в открытое множество  $S \subset E'^n$  и множества  $S$  в пространство  $E^m$ . Тогда*

$$(4) \quad J_{gf}(p) = \bar{J}_f(p) J_g(f(p)).$$

*Если, вдобавок, и пространство  $E^m = E''^n$  ориентировано, то*

$$(5) \quad \bar{J}_{gf}(p) = \bar{J}_f(p) \bar{J}_g(f(p)).$$

Пусть  $\alpha_0$  и  $\alpha'_0$  — определенные выше  $n$ -векторы. На основании формулы (4.8) имеем

$$J_{gf}(p) = \nabla g f(p, \alpha_0) = \nabla g[f(p), \nabla f(p, \alpha_0)] = \\ = \bar{J}_f(p) \nabla g[f(p), \alpha'_0] = \bar{J}_f(p) J_g(f(p));$$

из этого следует и соотношение (5).

Пусть  $f$  — отображение, рассмотренное в начале этого параграфа, и  $\omega$  — некоторая  $n$ -форма, определенная в окрестности множества  $f(R)$ . Тогда

$$(6) \quad f^*\omega(p) \cdot \alpha_0 = \omega(f(p)) \cdot \nabla f(p, \alpha_0) = \omega(f(p)) \cdot J_f(p).$$

Пусть  $E^m = E'^n$ , и пусть  $\omega_0, \omega'_0$  — единичные  $n$ -ковекторы соответственно пространств  $E^n$  и  $E'^n$ . Определим функции  $\bar{\omega}, \bar{\omega}^*$ , как в (3.1):

$$(7) \quad \omega(q) = \bar{\omega}(q) \omega'_0, \quad f^*\omega(p) = \bar{\omega}^*(p) \omega_0.$$

В силу (6)

$$\bar{\omega}^*(p) \omega_0 \cdot \alpha_0 = f^* \omega(p) \cdot \alpha_0 = \omega(f(p)) \cdot J_f(p) = \bar{\omega}(f(p)) \omega'_0 \cdot J_f(p);$$

так как  $\omega_0 \cdot \alpha_0 = \omega'_0 \cdot \alpha'_0 = 1$ , то из (3) мы получаем

$$(8) \quad \bar{\omega}^*(p) = \bar{J}_f(p) \bar{\omega}(f(p)).$$

Рассмотрим якобиан преобразования координат. Пусть  $\chi, \chi'$  — перекрывающиеся системы координат; тогда отображение  $\psi = \chi'^{-1} \chi$  там, где оно определено, будет регулярным отображением некоторого открытого множества пространства  $\mathbb{A}^n$  в  $\mathbb{A}^n$ . Пусть, скажем,  $\nabla \psi(p, \bar{e}_i) = \sum_j \psi^j_i(p) \bar{e}_j$ . В силу (1, 1.13)  $\bar{e}_\mu = \varepsilon_\mu \bar{e}_1 \dots \bar{e}_n$  для любой перестановки  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ ; поэтому

$$\begin{aligned} J_\psi(p) = \nabla \psi(p, \bar{e}_1 \dots \bar{e}_n) &= \sum_{\mu_1} \psi^{\mu_1}_1(p) \bar{e}_{\mu_1} \vee \dots \vee \sum_{\mu_n} \psi^{\mu_n}_n(p) \bar{e}_{\mu_n} = \\ &= \sum_{\mu} \varepsilon_\mu \psi^{\mu_1}_1(p) \dots \psi^{\mu_n}_n(p) \bar{e}_1 \dots \bar{e}_n. \end{aligned}$$

Пусть  $x^i$  и  $y^i$  — координаты точки  $p$  соответственно в системах  $\chi$  и  $\chi'$ . Из формул (5.15) и (5.16) мы видим, что  $\psi^j_i(p) = \partial y^j / \partial x^i$ . Следовательно,

$$(9) \quad \bar{J}_\psi(p) = \begin{vmatrix} \psi^{\mu_1}_1(p) & \dots & \psi^{\mu_n}_1(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi^{\mu_1}_n(p) & \dots & \psi^{\mu_n}_n(p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{vmatrix}.$$

**7. Теоремы об обратной и о неявной функциях.** Теорема об обратной функции формулируется следующим образом:

**Теорема 7А.** Пусть  $f$  — некоторое  $s$ -гладкое отображение ( $s \geq 1$ ) открытого множества  $R \subset E^n$  в  $E'^n$ , и пусть  $J_f(p_0) \neq 0$ . Тогда существуют такие окрестности  $U$  точки  $p_0$  и  $U'$  точки  $q_0 = f(p_0)$ , что  $f$  является взаимно однозначным отображением окрестности  $U$  на окрестность  $U'$ , а отображение  $f^{-1}$ , рассматриваемое только на  $U'$ , является  $s$ -гладким, причем  $J_{f^{-1}}(q_0) \neq 0$ .

Так как отображение  $f$  регулярно в точке  $p_0$ , то  $F_{p_0}(v) = \nabla f(p_0, v)$  является взаимно однозначным линейным отображением пространства  $V(E^n)$  в пространство  $V(E'^n)$ . Обратное отображение  $F_{p_0}^{-1}$  обладает теми же свойствами. Положим

$$N = |F_{p_0}^{-1}|, \quad \eta \leq \frac{1}{2N}.$$

Выберем  $\zeta_0 > 0$  так, чтобы  $\bar{U}_{\zeta_0}(p_0) \subset R$ . Пусть множество  $Q$  состоит из одной лишь точки  $p_0$ ; выберем  $\zeta \leq \zeta_0$  в соответствии с леммой 2с (взяв  $\eta$  вместо  $\varepsilon$ ) и потребуем также, чтобы  $J_f \neq 0$  в  $U_\zeta(p_0)$ . Положим

$$\rho = \frac{\zeta}{4N}, \quad U' = U_\rho(q_0), \quad U = f^{-1}(U') \cap U_\zeta(p_0).$$

Теперь  $U$  и  $U'$  являются окрестностями точек  $p_0$  и  $q_0$  соответственно и  $f(U) \subset U'$ .

Чтобы показать, что отображение  $f$ , рассматриваемое на  $U$ , взаимно однозначно, возьмем любые точки  $p, p' \in U$ , для которых  $f(p) = f(p')$ . Тогда в силу выбора числа  $\zeta$

$$\begin{aligned} |p' - p| &\leq |F_{p_0}^{-1}| |F_{p_0}(p' - p)| \leq \\ &\leq N |f(p') - f(p) - \nabla f(p_0, p' - p)| \leq N\eta |p' - p| \leq \frac{|p' - p|}{2}, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $p = p'$ .

Чтобы показать, что  $f$  отображает  $U$  на  $U'$ , возьмем любую точку  $q \in U'$ . Последовательно определим векторы и точки  $w_1, v_1, p_1, q_1, w_2, \dots$  так, чтобы при этом для  $i=1, 2, \dots$  были выполнены соотношения:

$$(1) \quad w_i = q - q_{i-1}, \quad v_i = F_{p_0}^{-1}(w_i), \quad p_i = p_{i-1} + v_i, \quad q_i = f(p_i),$$

$$(2) \quad |w_i| \leq (N\eta)^{i-1} |w_1| < \frac{\rho}{2^{i-1}},$$

$$(3) \quad |v_i| \leq N(N\eta)^{i-1} |w_1| < \frac{N\rho}{2^{i-1}},$$

$$(4) \quad |p_i - p_0| \leq N |w_1| [1 + N\eta + \dots + (N\eta)^{i-1}] \leq 2N |w_1| < \frac{\zeta}{2}.$$

Сначала по формулам (1) определим  $w_1$  и  $v_1$ . Так как  $q \in U_\rho(q_0)$ , то

$$(5) \quad |w_1| < \rho, \quad |v_1| \leq N |w_1| < N\rho,$$

и это дает нам неравенства (2) и (3) для  $i=1$ . Определим по формулам (1) точки  $p_1$  и  $q_1$ ; тогда для  $i=1$  выполняется и неравенство (4).

Теперь воспользуемся индукцией. Определим по формулам (1) векторы  $w_{i+1}$  и  $v_{i+1}$ . В силу (4) точки  $p_i$  и  $p_{i-1}$  лежат в  $U_\zeta(p_0)$ ; поэтому

$$\begin{aligned} |w_{i+1}| &= |w_i + q_{i-1} - q_i| = |f(p_{i-1}) - f(p_i) - \nabla f(p_0, -v_i)| \leq \\ &\leq \eta |v_i| \leq (N\eta)^i |w_1|, \end{aligned}$$

и неравенство (2) доказано; отсюда же следует и неравенство (3). Определим по формулам (1) точки  $p_{i+1}$  и  $q_{i+1}$ ; так как  $p_{i+1} - p_0 =$

$= (p_i - p_0) + v_{i+1}$ , то неравенство (4) легко доказать по индукции, пользуясь неравенством (3).

В силу (2)  $\lim q_i = q$ . Из (1) и (3) следует, что при  $i < j$

$$|p_j - p_i| = |v_{i+1} + \dots + v_j| \rightarrow 0, \text{ когда } i, j \rightarrow \infty;$$

поэтому мы можем положить  $p = \lim p_i$ . В силу (4)  $|p - p_0| \leq \zeta/2$ ; следовательно,  $p \in U_\zeta(p_0)$ . Далее,  $f(p) = \lim f(p_i) = q$ , и  $p \in U$ , как и требовалось.

Покажем далее, что отображение  $f^{-1}$  гладко в  $U'$ . Так как  $J_f(p) \neq 0$  в  $U$ , то при  $p \in U$  отображение  $F_p$  взаимно однозначно<sup>1)</sup>. Возьмем любую точку  $q^* = f(p^*) \in U'$  ( $p^* \in U$ ) и любой вектор  $w$ ; мы докажем, что

$$(6) \quad \nabla f^{-1}(q^*, w) = F_{p^*}^{-1}(w).$$

Так как  $F_{p^*}$ , а следовательно, и  $F_{p^*}^{-1}$ , непрерывно зависят от  $p^*$ , то тем самым наше утверждение будет доказано.

Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Положим (предполагая, что  $w \neq 0$ )

$$N_1 = |F_{p^*}^{-1}|, \quad \eta \leq \frac{\varepsilon}{2N_1^2|w|}, \quad \eta \leq \frac{1}{2N_1}.$$

Найдем число  $\zeta_1 > 0$  для точки  $p^*$ , как мы в начале доказательства теоремы нашли  $\zeta$  для точки  $p_0$ ; при этом мы потребуем, чтобы  $U_{\zeta_1}(p^*) \subset U$ . Положим

$$\rho_1 = \frac{\zeta_1}{4N_1}, \quad U'_1 = U_{\rho_1}(q^*), \quad U_1 = f^{-1}(U'_1) \cap U.$$

Возьмем теперь произвольное число  $t$ , для которого  $q = q^* + tw \in U'_1$ . Пусть, скажем,  $q = f(p)$ ,  $p \in U$ . Начав с точек  $p^*$  и  $q^*$  вместо  $p_0$  и  $q_0$ , определим, как выше, векторы  $w_i$ ,  $v_i$  и точки  $p_i$ ,  $q_i$  ( $i \geq 1$ ). Так как  $tw = q - q^* = w_1$ , то мы имеем

$$\begin{aligned} |f^{-1}(q^* + tw) - f^{-1}(q^*) - F_{p^*}^{-1}(tw)| &= |p - p^* - v_1| = \\ &= |p - p_1| \leq |v_2| + |v_3| + \dots \leq 2N_1^2\eta t|w| \leq t\varepsilon, \end{aligned}$$

и равенство (6) доказано.

Введем в пространствах  $E^n$  и  $E'^n$  системы координат  $(x^1, \dots, x^n)$  и  $(y^1, \dots, y^n)$  соответственно. Так как отображения  $f$  и  $f^{-1}$

<sup>1)</sup> Отображение  $F_p$  определяется так же, как  $F_{p_0}$ , т. е.  $F_p(v) = \nabla f(p, v)$ . — Прим. ред.

являются гладкими, а  $f^{-1} \circ f$  есть тождественное отображение окрестности  $U$ , то мы имеем

$$\sum_j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} = \delta_k^i \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Так как, далее, детерминант  $|\partial y^j / \partial x^k|$  равен якобиану  $\bar{J}_f(p)$ , который отличен от нуля, то мы можем разрешить эти уравнения относительно  $\partial x^i / \partial y^j$  в каждой точке  $q \in U'$ . Кроме того, соотношение (6.5) для  $g = f^{-1}$  показывает, что  $J_{f^{-1}}(q_0) \neq 0$ . Так как отображение  $f$   $s$ -гладко, то производные  $\partial x^i / \partial y^j$  являются  $(s-1)$ -гладкими; поэтому отображение  $f^{-1}$   $s$ -гладко, и доказательство закончено.

**Теорема 7В.** Пусть  $f$  — регулярное отображение (§ 5) открытого множества  $R \subset E^n$  в  $E^m$ . Тогда  $f$  локально взаимно однозначно.

Это значит, что каждая точка  $p_0 \in R$  содержится в такой окрестности  $U$ , на которой отображение  $f$  взаимно однозначно. Так как  $f$  регулярно в точке  $p_0$ , то  $\nabla f(p_0)$  отображает векторное пространство  $V(E^n)$  на векторное пространство  $V_{p_0}$  размерности  $n$  в  $V(E^m)$ ; точки  $f(p_0) + w$  ( $w \in V_{p_0}$ ) образуют касательную плоскость  $T_{p_0}$  к  $f(R)$  в точке  $f(p_0)$ . Пусть  $\pi_{p_0}$  — проекция пространства  $E^m$  на  $T_{p_0}$ ; положим  $g_{p_0}(p) = \pi_{p_0}(f(p))$ ,  $p \in R$ . Очевидно,  $\nabla g_{p_0}(p_0, v) = \nabla f(p_0, v)$ ; поэтому отображение  $g_{p_0}$  регулярно в точке  $p_0$ . По теореме 7А отображение  $g_{p_0}$  взаимно однозначно в некоторой окрестности точки  $p_0$ ; следовательно, это справедливо и для  $f$ .

Пользуясь теоремой об обратной функции, мы наметим доказательство теоремы о неявной функции. (Обычно первую выводят из последней.)

Пусть  $s$ -гладкие действительные функции

$$(7) \quad F_i(u_1, \dots, u_n; x_1, \dots, x_m) \quad (i = 1, \dots, n)$$

обращаются в нуль в точке  $(0, \dots, 0)$ , и допустим, что детерминант  $D = |\partial F_i / \partial u_j|$  в этой точке отличен от нуля. Для  $i=1, \dots, n$  положим  $F_{n+i}(u_1, \dots) = x_i$ . Полное множество функций  $F_i$  теперь определяет  $s$ -гладкое отображение  $F$  некоторой окрестности точки 0 пространства  $\mathfrak{A}^{n+m}$  в пространство  $\mathfrak{A}^{n+m}$ ; так как  $D \neq 0$ , то  $J_F(0, \dots, 0) \neq 0$ . Поэтому в окрестности точки  $(0, \dots, 0) \in \mathfrak{A}^{n+m}$  существует  $s$ -гладкое обратное отображение  $\Phi$ . Если записать

$\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{n+m})$ , то соотношение  $F\Phi =$  тождественному отображению дает

$$(8) \quad F_i(\Phi_1(t_1, \dots; x_1, \dots), \dots, \Phi_{n+1}(t_1, \dots; x_1, \dots), \dots) = \\ = \begin{cases} t_i & (i \leq n), \\ x_{i-n} & (i > n). \end{cases}$$

Из определения функций  $F_{n+i}$  мы видим, что

$$\Phi_{n+i}(t_1, \dots; x_1, \dots) = x_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Положим

$$(9) \quad \varphi_i(x_1, \dots, x_m) = \Phi_i(0, \dots, 0; x_1, \dots, x_m) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Полагая теперь в (8)  $t_i = 0$ , мы получаем

$$(10) \quad F_i(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m); x_1, \dots, x_m) = 0$$

при  $i = 1, \dots, n$ . Таким образом, функции  $u_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_m)$  являются решением (единственным) вблизи точки  $(0, \dots, 0)$  системы, которую мы получаем, приравнявая функции (7) нулю; функции  $\varphi_i$  являются  $s$ -гладкими.

**8. Внешний дифференциал.** Каждой гладкой  $r$ -форме  $\omega$ , определенной на открытом множестве  $R \subset E^n$ , соответствует некоторая  $(r+1)$ -форма  $d\omega$ , ее *внешний дифференциал*, определяемая следующим образом. Для каждой точки  $p \in R$  это такая линейная функция от  $(r+1)$ -вектора [см. теорему (I, 3A)], что <sup>1)</sup>

$$(1) \quad d\omega(p) \cdot (v_1 \vee \dots \vee v_{r+1}) = \\ = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \nabla_{v_i} \omega(p) \cdot (v_1 \vee \dots \vee \hat{v}_i \vee \dots \vee v_{r+1}).$$

Заметим, что так как векторы  $v_i$  не зависят от  $p$ , то

$$\nabla_{v_i} \omega(p) \cdot (v_1 \vee \dots) = \nabla_{v_i} [\omega(p) \cdot (v_1 \vee \dots)].$$

[По поводу оснований для этого определения см. (III, 11) или § 19 и 20 введения.]

<sup>1)</sup> Производная  $\nabla_v f(p)$  определялась выше (в § 1) для случая, когда  $f$  — некоторое отображение; производная же  $\nabla_v \omega(p)$  дифференциальной формы  $\omega$ , строго говоря, не определялась. Однако каждая  $r$ -форма  $\omega$ , заданная на множестве  $R \subset E^n$ , представляет собой *отображение*  $\omega: R \rightarrow V^{[r]}(E^n)$ , благодаря чему и определяется производная  $\nabla_v \omega(p)$ . Эта производная является элементом пространства  $V^{[r]}(E^n)$ . Таким образом, для произвольной  $r$ -формы  $\omega$ , заданной на открытом множестве  $R \subset E^n$ , производная  $\nabla_v \omega$  также является (при фиксированном  $v$ )  $r$ -формой на  $R$ . — Прим. ред.

В том, что результат не зависит от представления  $(r+1)$ -вектора в виде суммы произведений, можно убедиться следующим образом. Для данной  $r$ -формы  $\omega$  положим

$$F(p; v_1, \dots, v_r) = \omega(p) \cdot (v_1 \vee \dots \vee v_r);$$

тогда для каждой точки  $p \in R$  этой формулой определяется элемент пространства  $L_{\text{alt}}^{r+1}(V(E^n))$  (I, теорема 4A). Положим

$$\bar{d}F(p; v_1, \dots, v_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \nabla_{v_i} F(p; v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{r+1}).$$

Ясно, что это — корректно определенный элемент пространства  $L_{\text{alt}}^{r+1}(V(E^n))$  для  $p \in R$ . Изоморфизм теоремы (I, 4A) переводит оператор  $\bar{d}$  в оператор  $d$ , который, следовательно, корректно определен.

Отметим, что дифференциал  $\nabla\omega$  и внешний дифференциал  $d\omega$  некоторой  $r$ -формы  $\omega$  при  $r \geq 1$  вовсе не одно и то же;  $\nabla\omega(p)$  есть линейное отображение  $\Phi_p^r$  пространства  $V = V(E^n)$  в  $V^{[r]}$ , и он не является элементом пространства  $V^{[r+1]}$ . Если же  $r=0$ , то  $\Phi_p^r$  отображает пространство  $V$  в  $V^{[0]} = \mathfrak{A}$  и определяет некоторый элемент пространства  $\bar{V} = V^{[1]}$ ; в этом случае  $\nabla\omega(p) = d\omega(p)$ .

Внутренняя характеристика оператора  $d$  на гладких многообразиях будет дана ниже, в § 13.

Приведем некоторые частные случаи формулы (1):

$$(2) \quad r=0: \quad d\omega = \nabla\omega; \text{ таким образом, } d\omega(p) \cdot v = \nabla_v \omega(p);$$

$$(3) \quad r=1: \quad d\omega(p) \cdot (u \vee v) = \nabla_u \omega(p) \cdot v - \nabla_v \omega(p) \cdot u.$$

Конечно, если  $r \geq n$ , то  $d\omega = 0$ .

Установим следующие основные свойства:

$$(4) \quad (d\omega)_\lambda(p) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda_i}} \omega_{\lambda_1 \dots \hat{\lambda}_i \dots \lambda_{r+1}}(p).$$

Это соотношение в случаях  $r=0$  и  $r=1$  принимает вид

$$(d\omega)_i = \frac{\partial \omega}{\partial x^i}, \quad (d\omega)_{ij} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}.$$

Заметим, что формула (2) применяется к 0-форме  $\omega_\lambda(p)$ ,

$$(5) \quad d \sum_{(\lambda)} \omega_\lambda(p) e^\lambda(p) = \sum_{(\lambda)} \nabla \omega_\lambda(p) \vee e^\lambda(p) = \sum_{(\lambda)} d(\omega_\lambda)(p) \vee e^\lambda(p),$$

если система координат является 2-гладкой. В обозначениях формулы (5.11)

$$(5') \quad d \sum_{(\lambda)} \omega_{\lambda}(p) dx^{\lambda_1} \vee \dots \vee dx^{\lambda_r} = \\ = \sum_{(\lambda)} \nabla \omega_{\lambda}(p) \vee dx^{\lambda_1} \vee \dots \vee dx^{\lambda_r}.$$

Для гладкой  $r$ -формы  $\omega$  и гладкой  $s$ -формы  $\xi$

$$(6) \quad d(\omega \vee \xi) = d\omega \vee \xi + (-1)^r \omega \vee d\xi.$$

Для любой 2-гладкой  $r$ -формы  $\omega$

$$(7) \quad dd\omega = 0.$$

Если  $f$  — некоторое 2-гладкое отображение открытого множества  $R \subset E^n$  в  $S \subset E^m$  и  $\omega$  — гладкая  $r$ -форма в  $S$ , то

$$(8) \quad df^*\omega = f^*d\omega.$$

Сначала мы докажем соотношение (4) для аффинной системы координат [см. (5.7)]. Полагая  $\lambda(i) = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_{r+1})$ , находим

$$(d\omega)_{\lambda}(p) = (d\omega)(p) \cdot e_{\lambda} = \sum (-1)^{i-1} \nabla_{e_{\lambda_i}} \omega(p) \cdot e_{\lambda(i)} = \\ = \sum (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega(p)}{\partial x^{\lambda_i}} \cdot e_{\lambda(i)} = \sum (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_{\lambda(i)}(p)}{\partial x^{\lambda_i}}$$

(последний шаг в общем случае неверен).

Затем мы докажем соотношение (5) для аффинной системы координат. Имеем  $\omega = \sum \omega_{\lambda}(p) e^{\lambda}$ ; так как оператор  $d$  линеен, то достаточно рассмотреть случай  $\omega = w\xi$ , где  $w$  — гладкая функция, а  $\xi = e^{\nu}$ . В этом случае

$$\nabla_{e_j} (w\xi) \cdot e_{\nu} = \nabla_{e_j} \{w(\xi \cdot e_{\nu})\} = (\nabla_{e_j} w) \xi_{\nu} = (\nabla w)_j \xi_{\nu}.$$

Поэтому, если  $\lambda(i)$  имеет тот же смысл, что и раньше, то, пользуясь формулой (I, 6.7), получаем

$$[d(w\xi)]_{\lambda} = d(w\xi) \cdot e_{\lambda} = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \nabla_{e_{\lambda_i}} (w\xi) \cdot e_{\lambda(i)} = \\ = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} (\nabla w)_{\lambda_i} \xi_{\lambda(i)} = (\nabla w \vee \xi)_{\lambda},$$

что дает  $d(w\xi) = \nabla w \vee \xi$  и, следовательно, соотношение (5) для этого случая.

Затем мы докажем соотношение (6). Пользуясь аффинной системой координат, на основании только что доказанного результата и формулы (2.9) имеем

$$\begin{aligned} d(\omega \vee \xi) &= d \sum_{(\lambda)(\mu)} \omega_\lambda \xi_\mu e^\lambda \vee e^\mu = \sum \nabla(\omega_\lambda \xi_\mu) \vee e^\lambda \vee e^\mu = \\ &= \sum (\nabla \omega_\lambda \xi_\mu + \omega_\lambda \nabla \xi_\mu) \vee e^\lambda \vee e^\mu = \\ &= \sum \nabla \omega_\lambda \vee e^\lambda \vee \xi_\mu e^\mu + (-1)^r \sum \omega_\lambda e^\lambda \vee \nabla \xi_\mu \vee e^\mu = \\ &= \sum_{(\lambda)} \nabla \omega_\lambda \vee e^\lambda \vee \sum_{(\mu)} \xi_\mu e^\mu + (-1)^r \sum_{(\lambda)} \omega_\lambda e^\lambda \vee \sum_{(\mu)} \nabla \xi_\mu \vee e^\mu, \end{aligned}$$

что и доказывает (6).

Соотношение (7) мы докажем сначала для 0-формы  $\varphi$ . Возьмем аффинную систему координат и положим  $\xi = d\varphi$ . Тогда  $\xi_k = \partial\varphi/\partial x^k$ , и поэтому соотношение (4) дает

$$(dd\varphi)_{ij} = (d\xi)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) = 0.$$

В общем случае, пользуясь аффинной системой координат и применяя формулы (5), (6), только что доказанный результат и тот факт, что  $de^\lambda = 0$  (так как  $e^\lambda$  постоянны), получаем

$$dd\omega = d \sum_{(\lambda)} d\omega_\lambda \vee e^\lambda = \sum_{(\lambda)} (dd\omega_\lambda \vee e^\lambda \pm d\omega_\lambda \vee de^\lambda) = 0.$$

Непосредственное доказательство того, что  $dd\omega \cdot e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_{r+2}} = 0$ , также несложно.

Соотношение (8) мы докажем сначала в том случае, когда  $\omega = e^i$ , взяв в  $E^m$  аффинную систему координат. В этом случае  $f^* de^i = f^* 0 = 0$ . Точно так же в силу (5.20)  $df^* e^i = dd f^i = 0$ . Затем мы покажем, что если соотношение (8) выполняется и для  $\omega$  и для  $\xi$ , то оно выполняется и для  $\omega \vee \xi$ . Пользуясь формулами (4.7) и (6), получаем

$$\begin{aligned} df^*(\omega \vee \xi) &= d(f^*\omega \vee f^*\xi) = df^*\omega \vee f^*\xi \pm f^*\omega \vee df^*\xi = \\ &= f^* d\omega \vee f^*\xi \pm f^*\omega \vee f^* d\xi = f^*(d\omega \vee \xi \pm \omega \vee d\xi) = f^* d(\omega \vee \xi). \end{aligned}$$

Чтобы доказать соотношение (8) для любой  $r$ -формы  $\omega$ , возьмем в  $S$  аффинную систему координат и запишем  $\omega = \sum_{(\lambda)} \omega_\lambda \vee e^{\lambda_1} \vee \dots \vee e^{\lambda_r}$ . Нам остается доказать соотношение (8)

для  $\omega_\lambda$  и для каждого  $e^{\lambda i}$ ; мы уже сделали это для  $e^{\lambda i}$ , а формула (4.6) дает это для  $\omega_\lambda$ .

Чтобы доказать соотношение (5) в произвольной системе координат  $\chi$ , мы воспользуемся формулой (5.10):

$$(9) \quad de^i(p) = dd x^i(p) = 0;$$

поэтому, применяя (6) к левой части равенства (5), мы получаем его правую часть.

Наконец, чтобы доказать соотношение (4) в общем случае, положим  $\tilde{\omega} = \chi^* \omega$ . Так как координаты в  $\mathcal{U}^n$  аффинны, то для  $\tilde{\omega}$  равенство (4) выполняется. В силу формулы (5.6) (примененной к  $d\omega$ ) и (8), если  $p = \chi(x)$ , то

$$(d\omega)_\lambda(p) = (\chi^* d\omega)_\lambda(x) = (d\chi^* \omega)_\lambda(x) = (d\tilde{\omega})_\lambda(x).$$

В силу (5.6)  $\tilde{\omega}_\lambda(x) = \omega_\lambda(p)$ ; поэтому на основании формулы (5.13)  $\partial \tilde{\omega}_\lambda(x) / \partial x^k = \partial \omega_\lambda(p) / \partial x^k$ . Следовательно, применяя формулу (4) к  $\tilde{\omega}$ , мы получаем

$$(d\omega)_\lambda(p) = \sum (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda i}} \tilde{\omega}_{\lambda(i)}(x) = \sum (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda i}} \omega_{\lambda(i)}(p).$$

Выведем еще одну формулу для  $d\omega$  в гладкой системе координат:

$$(10) \quad d\omega(p) = \sum_i e^i(p) \vee \frac{\partial \omega(p)}{\partial x^i}.$$

Если мы заменим эту систему координат аффинной системой с теми же координатными векторами в точке  $p$ , то величины, стоящие в правой части равенства, не изменятся; поэтому мы можем считать, что система координат аффинна. Пользуясь соотношениями (5) и (5.8) (применяя их к каждой компоненте  $\omega_\lambda$ ), получаем

$$d\omega(p) = \sum_{(\lambda)} \sum_i \frac{\partial \omega_\lambda(p)}{\partial x^i} e^i(p) \vee e^\lambda(p) = \sum_i e^i(p) \vee \frac{\partial}{\partial x^i} \sum_{(\lambda)} \omega_\lambda(p) e^\lambda(p),$$

а это и есть (10).

**9. Представление векторов и ковекторов.** Мы покажем, каким образом векторы и ковекторы в  $E^n$  представляются параметризованными кривыми  $F$  и действительными функциями  $\varphi$  соответственно. Пусть  $e$  — единичный вектор (число 1) в пространстве действительных чисел.

Под  $p$ -кривой  $F$  в пространстве  $E^n$  мы понимаем такое гладкое отображение  $F$  некоторой окрестности точки 0 пространства

действительных чисел в  $E^n$ , что  $F(0) = p$ . Это отображение определяет в  $E^n$  вектор

$$(1) \quad W_F = \left. \frac{dF(t)}{dt} \right|_{t=0} = \nabla F(0, e).$$

Под  $p$ -функцией  $\varphi$  в пространстве  $E^n$  мы понимаем гладкую действительную функцию  $\varphi$ , определенную в окрестности точки  $p$  и удовлетворяющую условию  $\varphi(p) = 0$ . Эта функция определяет в  $E^n$  ковектор, а именно градиент  $\nabla\varphi(p)$ . [Условие  $\varphi(p) = 0$  взято только для удобства.] Очевидно, таким путем получаются все ковекторы. Если  $\bar{e} = 1$  — единичный ковектор в пространстве действительных чисел, то  $\nabla\varphi(p) = \varphi_p^* \bar{e}$ .

Пусть заданы  $F$  и  $\varphi$ ; тогда в силу (1.5) мы имеем

$$\nabla\varphi(p) \cdot W_F = \nabla\varphi(p, \nabla F(0, e)) = \nabla(\varphi \circ F)(0, e);$$

поэтому

$$(2) \quad \nabla\varphi(p) \cdot W_F = \left. \frac{d(\varphi \circ F)}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\varphi(F(t))}{t}.$$

**Лемма 9а.** Пусть  $f$  — гладкое отображение открытого множества  $R \subset E^n$  в открытое множество  $S \subset E^m$ . Тогда для любой  $p$ -кривой  $F$  в  $R$  отображение  $\nabla f(p)$  переводит вектор  $W_F$  в вектор  $W_{F'}$ , где  $F'(t) = f(F(t))$ . Далее, для любой  $q$ -функции  $\varphi$  в  $S$  отображение  $f_p^*$  переводит ковектор  $\nabla\varphi(q)$  в ковектор  $\nabla\varphi^*(p)$ , где  $\varphi^*(p') = \varphi(f(p'))$  ( $p' \in R$ ) и  $f(p) = q$ .

Так как  $\nabla(f \circ F)(0, e) = \nabla f(p, \nabla F(0, e))$ , то мы имеем

$$(3) \quad W_{F'} = \nabla f(p, W_F),$$

что дает первую часть леммы. Вторая часть следует из (4.5), (4.6) и (4.3).

Сложение векторов и ковекторов, очевидно, может быть перенесено на случай  $p$ -кривых и  $p$ -функций следующим образом: для  $p$ -кривых  $F$  и  $G$

$$(4) \quad W_F + W_G = W_H, \text{ если } H(t) = p + [F(t) - p] + [G(t) - p];$$

для  $p$ -функций  $\varphi$  и  $\psi$

$$(5) \quad \nabla\varphi + \nabla\psi = \nabla\gamma, \text{ если } \gamma(q) = \varphi(q) + \psi(q).$$

Далее, если  $F'(t) = F(at)$ , то  $W_{F'} = aW_F$ ;  $\nabla(a\varphi) = a\nabla\varphi$ .

**10. Гладкие многообразия.** В различных местах в математике и ее приложениях приходится иметь дело с пространствами, которые локально похожи на евклидовы пространства, но не похожи на них в целом. Такое пространство, „многообразие“, может появиться

как подмножество евклидова пространства, например как поверхность в трехмерном пространстве (сфера, тор и т. д. или связное открытое подмножество одной из этих поверхностей). Оно также может быть определено абстрактно, как фазовое пространство динамической системы. Многообразие  $M_0$  в (IV, 9) появляется обоими этими путями. Многообразие является топологическим пространством, иными словами, в нем определены открытые и замкнутые множества с обычными свойствами.

*Гладкое многообразие*, или *дифференцируемое многообразие*  $M$  размерности  $n$  есть связное топологическое пространство, которое также обозначается через  $M$ , и множество *систем координат* со следующими свойствами. Каждая система координат есть гомеоморфизм  $\chi_i$  некоторого открытого множества  $O_i \subset \mathbb{A}^n$  в  $M$ . (Мы могли бы пользоваться лишь одним множеством  $O_i$ .) Конечное или счетное число множеств  $U_i = \chi_i(O_i)$  покрывает пространство  $M$ . Если  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , то отображение  $\psi_{ij} = \chi_j^{-1} \chi_i$  там, где оно определено, является гладким и регулярным (см. § 5). Любой гомеоморфизм  $\chi$  открытого множества пространства  $\mathbb{A}^n$  в  $M$ , удовлетворяющий указанным выше условиям по отношению к этим системам координат, сам является системой координат.

Если потребовать, чтобы отображения  $\psi_{ij}$  были  $s$ -гладкими, то многообразие  $M$  будет  $s$ -гладким;  $s$  может быть равно  $\infty$ . Если все отображения  $\psi_{ij}$  аналитические, то таковым же будет и  $M$ . Многообразие может быть  $s$ -гладким по отношению к некоторым системам координат и  $s'$ -гладким ( $s' > s$ ) по отношению к части всего множества этих систем; если оно является  $s'$ -гладким, то оно является и  $s$ -гладким (можно прибавить отброшенные системы координат). Евклидово пространство  $E^n$  является аналитическим многообразием; при этом можно пользоваться всеми аналитическими регулярными гомеоморфизмами открытых подмножеств пространства  $\mathbb{A}^n$  в  $E^n$ .

Если часть множества систем координат выбрана таким образом, чтобы множества  $U_i$  покрывали  $M$  и чтобы все соответствующие отображения  $\psi_{ij}$  имели положительные алгебраические якобианы  $\bar{J}_{\psi_{ij}}$  (§ 6), то говорят, что эти системы координат *ориентируют*  $M$ . Многообразие  $M$  называется *ориентируемым*, если существует такое множество систем координат. Проективная плоскость, например, неориентируема.

Отображение  $f$  одного  $k$ -гладкого многообразия  $M$  в другое  $k$ -гладкое многообразие  $M'$  называется  $s$ -гладким ( $s \leq k$ ), если имеет место следующее. Для любой точки  $p \in M$  пусть, скажем,  $p \in U_i$ ,  $f(p) \in U'_j$ ; тогда отображение  $\chi'^{-1}_j f \chi_i$  (там, где оно определено в  $\mathbb{A}^n$ ) является  $s$ -гладким. При  $M' = \mathbb{A}$  мы получаем

$s$ -гладкие действительные функции на  $M$ ; при  $M = \mathfrak{M}$  мы получаем  $s$ -гладкие параметризованные кривые в  $M'$ .

**11. Касательное пространство гладкого многообразия.** Пусть  $M$  — гладкое многообразие. Для любой точки  $p \in M$ , как в § 9, могут быть определены  $p$ -кривые и  $p$ -функции. Две  $p$ -кривые  $F$  и  $G$  мы называем *эквивалентными*, если в какой-либо системе координат около точки  $p$  имеет место равенство  $W_{\chi^{-1}F} = W_{\chi^{-1}G}$ . Если  $\chi'$  — другая система координат около точки  $p$  и  $\psi = \chi'^{-1}\chi$ , то по лемме 9а и вектор  $W_{\chi'^{-1}F}$ , и вектор  $W_{\chi'^{-1}G}$  являются образами вектора  $W_{\chi^{-1}F}$  при отображении  $\psi^1$ ; поэтому определение эквивалентности не зависит от системы координат, которой мы воспользовались.

Под *вектором на многообразии  $M$  в точке  $p$*  мы понимаем класс эквивалентных  $p$ -кривых. Векторы  $u$  и  $v$  мы можем складывать следующим образом. Пользуясь системой координат  $\chi$ , образуем кривую  $H$  по  $\chi^{-1}F$  и  $\chi^{-1}G$ , как в (9.4); тогда  $p$ -кривая  $\chi H$  определяет сумму  $u + v$ . В силу леммы 9а и линейности отображения  $\nabla\psi$  в точке  $\chi^{-1}(p)$  (где  $\psi$  — гомеоморфизм, рассмотренный выше) это определение не зависит от системы координат, которой мы воспользовались. Если вектор  $v$  определен с помощью  $p$ -кривой  $F$ , то вектор  $av$  определяется с помощью  $p$ -кривой  $F'(t) = F(at)$ . Теперь векторы на  $M$  в точке  $p$  образуют векторное пространство  $V(M, p)$  размерности  $n$ , *касательное пространство многообразия  $M$  в точке  $p$* . Множество всех пространств  $V(M, p)$  ( $p \in M$ ) называется *касательным пространством* многообразия  $M$ .

Две  $p$ -функции  $\varphi, \theta$  в  $M$  *эквивалентны* (в точке  $p$ ), если в какой-нибудь системе координат  $\nabla(\chi^*\varphi) = \nabla(\chi^*\theta)$  в точке  $\chi^{-1}(p)$ . В силу леммы 9а это определение не зависит от системы координат, которой мы воспользовались. *Ковектор* на многообразии  $M$  в точке  $p$  есть класс эквивалентных  $p$ -функций. Два ковектора на  $M$  в точке  $p$  складываются путем сложения соответствующих  $p$ -функций. Ковекторы в точке  $p$  образуют векторное пространство  $\bar{V}(M, p)$ . Если воспользоваться (9.2), то  $\bar{V}(M, p)$  становится пространством, сопряженным к  $V(M, p)$ .

Если  $\chi$  — система координат около точки  $p$ , то  $\nabla\chi(q)$  ( $p = \chi(q)$ ) есть изоморфизм пространства  $V(E^n)$  на пространство  $V(M, p)$ , а  $\chi_q^*$  — изоморфизм пространства  $\bar{V}(M, p)$  на  $\bar{V}(E^n)$ .

Пусть  $f$  — гладкое отображение гладкого многообразия  $M$  в гладкое многообразие  $M'$ . Если дан вектор  $v$  на  $M$  в точке  $p$ ,

<sup>1)</sup> Точнее, при соответствующем линейном отображении  $\nabla\psi(\chi^{-1}(p))$ . — *Прим. ред.*

определенной с помощью  $p$ -кривой  $F(t)$ , то положим  $F'(t) = f(F(t))$ . Эта кривая определяет некоторый вектор  $v'$  на  $M'$ , который мы обозначим через  $\nabla f(p, v)$ . Пусть  $\chi$  и  $\chi'$  — системы координат соответственно около точки  $p$  и около точки  $f(p)$ ; положим  $G(t) = \chi^{-1}(F(t))$ ,  $G'(t) = \chi'^{-1}(F'(t))$ ; тогда  $G'(t) = \gamma(G(t))$ , где  $\gamma = \chi'^{-1}f\chi$ . Если для определения вектора  $v$  вместо  $p$ -кривой  $F(t)$  воспользоваться  $p$ -кривой  $\bar{F}(t)$  и определить, как выше,  $\bar{F}'$ ,  $\bar{G}$ ,  $\bar{G}'$ , то  $\bar{G}$  и  $G$  будут эквивалентны; поэтому (лемма 9а) будут эквивалентны и  $G'$  и  $\bar{G}'$ , а поэтому также и  $F'$  и  $\bar{F}'$ . Таким образом, отображение  $\nabla f(p, v)$  определено корректно; очевидно, оно линейно. В силу леммы 9а в случае, когда  $M$  и  $M'$  — евклидовы пространства, определение отображения  $\nabla f$  находится в согласии с прежним определением. Оно также согласуется с ранее определенным отображением  $\nabla \chi$ . Те же самые рассуждения справедливы и для  $f_p^*$  линейного отображения пространства  $\bar{V}(M', f(p))$  в  $\bar{V}(M, p)$ ; при этом для векторов и ковекторов имеет место формула (4.4). Если  $f$  и  $g$  — гладкие отображения многообразия  $M$  в  $M'$  и многообразия  $M'$  в  $M''$ , то имеют место формулы (2.8) и (4.9) (последняя пока что для ковекторов).

## 12. Дифференциальные формы на гладких многообразиях.

Пусть для каждой точки  $p \in M$  задан  $r$ -ковектор  $\omega(p)$  на  $M$  в точке  $p$  [определенный с помощью пространства  $V(M, p)$ ]. Тогда  $\omega$  есть  $r$ -форма на  $M$ . Подобным же образом определяется  $r$ -вектор-функция  $\alpha(p)$  на  $M$ . Если  $f$  — гладкое отображение многообразия  $M$  в многообразие  $M'$ , то  $\nabla f(p, \alpha(p))$  и  $f_p^* \omega(f(p))$  определяются, как в § 4; в частности, определены отображения  $\nabla \chi$  и  $\chi_q^*$ . Как это следует из рассмотрений в § 11, имеют место соотношения от (4.1) до (4.8) и аналог соотношения (4.9).

Мы называем  $r$ -форму  $\omega$  *непрерывной*, если непрерывна каждая  $r$ -форма  $\chi^* \omega$ . Пусть многообразие  $M$  является  $s$ -гладким и пусть  $s' \leq s-1$  — натуральное число. Тогда форма  $\omega$  называется  $s'$ -гладкой, если  $s'$ -гладкой является каждая форма  $\chi^* \omega$ . Если это имеет место вблизи точки  $p$  для системы координат  $\chi$ , то это имеет место также и для любой другой системы координат  $\chi'$ . В самом деле,  $\chi'^* \omega = (\chi \chi^{-1} \chi')^* \omega = \psi^* (\chi^* \omega)$  ( $\psi = \chi^{-1} \chi'$ ), и так как отображение  $\psi$  является  $s$ -гладким, то отображение  $\psi^*$  является  $s'$ -гладким [см. (5.16) и (5.17)]. (При  $r=0$  мы можем положить  $s'=s$ .) Подобным же образом мы определяем непрерывные и  $s$ -гладкие  $r$ -вектор-функции, в частности, вектор-функции.

Теперь мы изучим внешний дифференциал  $d\omega$  произвольной  $r$ -формы  $\omega$  на многообразии  $M$ . При  $r=0$  мы можем, как в (8.2),

положить  $d\omega = \nabla\omega$ . При  $r > 0$  непосредственно определить  $\nabla_v\omega$  мы не можем; действительно, если  $q \neq p$ , то  $\omega(q)$  и  $\omega(p)$  лежат в различных векторных пространствах  $V^{[r]}(M, q)$  и  $V^{[r]}(M, p)$  и потому, если для определения  $\nabla_v\omega$  мы пользуемся некоторой системой координат, то результат, вообще говоря, будет зависеть от ее выбора. Однако специальная комбинация производных в формуле (8.1), как мы теперь покажем, от системы координат не зависит.

Пусть  $M$  — некоторое 2-гладкое многообразие и  $\omega$  — гладкая  $r$ -форма на  $M$ . Пусть задана точка  $p \in M$ ; выберем некоторую систему координат  $\chi$  около точки  $p$  и положим

$$(1) \quad d\omega(p) = \chi^{-1*} d\chi^*\omega(p).$$

Допустим, что вместо  $\chi$  мы возьмем систему координат  $\chi_1$ . Тогда гомеоморфизм  $\psi = \chi_1^{-1}\chi$  будет 2-гладким и в силу (8.8)  $\psi^{-1*}d = d\psi^{-1*}$ . Применяя это соотношение к форме  $\psi^*\chi_1^*\omega$ , мы получим

$$\chi_1^{-1*} d\chi_1^*\omega = \chi_1^{-1*} d\psi^{-1*} \psi^* \chi_1^*\omega = \chi_1^{-1*} \psi^{-1*} d\psi^* \chi_1^*\omega = \chi^{-1*} d\chi^*\omega.$$

Если  $f$  — некоторое 2-гладкое отображение многообразия  $M$  в многообразие  $M'$ , то  $df^*\omega = f^*d\omega$  ( $\omega$  на  $M'$ ), что сразу видно, если воспользоваться системами координат. Таким же образом проверяются и остальные свойства из § 8.

Если многообразие  $M$  не является 2-гладким, то определение гладкости  $r$ -формы  $\omega$  ( $r \geq 1$ ) на  $M$  теряет силу;  $\chi^*\omega$  может быть гладкой, но форма  $\chi_1^*\omega$  может и не быть гладкой. Поэтому внешний дифференциал  $d\omega$  не может быть определен по формуле (1). Может также случиться, что внешний дифференциал  $d\omega$  существует, но имеет различные значения, если его определить с помощью  $\chi_1$  или же с помощью  $\chi_2$ . Мы приведем пример, в котором многообразие  $M$  есть открытое множество в  $E^2$ , а  $\psi = \chi_1^{-1}\chi_2$  задается следующим образом. Через  $(x, y)$  будем обозначать точки пространства  $\mathbb{R}^2$ ; положим

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \psi(x, y) = (x + f(x, y), y);$$

пусть  $f(0, 0) = 0$ . Тогда  $df/\partial x \rightarrow 0$  и  $df/\partial y \rightarrow 0$  при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ; отсюда видно, что и  $f$  и  $\psi$  — гладкие. Очевидно,  $J_\psi \neq 0$  вблизи точки  $(0, 0)$ . Заметим, что вторые смешанные производные функции  $f$  в начале координат равны 1 и 0, поэтому

$$\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \right)_{(0,0)} = (1, 0).$$

Пусть  $\xi$  — некоторая 1-форма в  $\mathfrak{A}^2$ . Положим  $q = (0, 0)$ . Прямое вычисление единственной компоненты 2-форм  $d\psi^*\xi$  и  $\psi^*d\xi$  дает

$$(d\psi^*\xi)_{12}(q) - (\psi^*d\xi)_{12}(q) = \xi(q) \cdot \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \right)_q = \xi_1(q).$$

Это показывает, что если форма  $\omega$  на  $M$  такова, что  $\omega_1(\chi(q)) \neq 0$  (в системе координат  $\chi$ ), то  $d\omega$  имеет различные значения в точке  $\chi(q)$  в двух рассматриваемых системах координат.

**13. Характеризация внешнего дифференциала.** Пусть  $M$  — некоторое 2-гладкое многообразие. Рассмотрим класс всех гладких форм, определенных на открытых подмножествах многообразия  $M$ . Мы покажем, что оператор  $d$ , определенный на этих формах, характеризуется следующими свойствами <sup>1)</sup>:

- (a)  $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$  там, где определены  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ;
- (b)  $d(\varphi\omega) = \nabla\varphi \vee \omega + \varphi d\omega$  там, где определены  $\varphi$  и  $\omega$ ;
- (c) если  $\omega = \nabla\varphi_1 \vee \dots \vee \nabla\varphi_r$  на открытом множестве, то  $d\omega = 0$  на этом множестве.

Этими свойствами оператор  $d$ , как известно, обладает. Пусть теперь  $d'$  — произвольный оператор, обладающий этими свойствами. Возьмем любую форму  $\omega$  и любую точку  $p$  в области ее определения. Пользуясь системой координат в некоторой окрестности  $U$  точки  $p$ , напомним  $\omega = \sum_{(\lambda)} \omega_\lambda(p) e^\lambda(p)$  в  $U$ . Применение указанных выше свойств показывает, что  $d'\omega$  задается формулой (8.5); следовательно,  $d'\omega = d\omega$ .

<sup>1)</sup> См. Лихнерович, стр. 166.

### III. Риманова теория интегрирования

Цель настоящей главы состоит в том, чтобы дать такое изложение основных свойств интеграла риманова типа в случае любого числа переменных, которое ясно выявило бы геометрическую суть дела. Помимо элементарных предложений, относящихся к этому вопросу, мы доказываем две важные теоремы, формулы преобразования [теорема 7А, или (9.1)] и теорему Стокса (теоремы 14А и 18А). Хотя определение и основные свойства интеграла зависят только от аффинного характера пространства  $E^n$ , метрика является очень полезным инструментом; поэтому мы рассматриваем пространство  $E^n$  как евклидово (П. I, 13).

Как видно из введения, естественной интегрируемой величиной для  $r$ -мерного интеграла в  $E^n$  является произвольная дифференциальная  $r$ -форма  $\omega$  в  $E^n$ . (То, что  $\omega$  необходимо должна быть  $r$ -формой при простейших предположениях, будет видно из теорем (V, 10А) и (IX, 5А). Простейшими областями интегрирования являются выпуклые полиэдральные клетки и их линейные комбинации,  $r$ -мерные клеточные цепи. В первом параграфе этой главы мы показываем, как интегрировать  $r$ -формы по  $r$ -мерным клеточным [или полиэдральным (V, 1)] цепям. В случае  $r = n$  это определение сводится к обычному определению интеграла Римана. Мы пользуемся основными свойствами грассмановской алгебры, в частности соответствием между простыми  $r$ -векторами и  $r$ -мерными ориентированными объемами (I, теорема 9А). Понятия массы и комассы в грассмановской алгебре (I, 13) здесь не нужны; в нескольких местах они применяются для дальнейших целей, но, очевидно, мы могли бы вместо них пользоваться нормами из (I, 12).

Формула преобразования (7.1), или (9.1), принимает свой наиболее общий вид, если интегрировать по открытым множествам; поэтому мы сначала изучаем несобственные интегралы (§ 6). Основной довод в пользу формулы преобразования лучше всего виден на неравенстве (7.2). Если отображение является аффинным, это неравенство превращается в тождество, как в (8.1); в общем случае, так как отображение является локально почти аффинным, мы имеем приближенное равенство. Наше доказательство формулы проводится путем рассмотрения этой локальной аппроксимации. Обычная формула (9.1), содержащая якобианы, сразу следует из более глубокой формулы (7.1). Было бы нетрудно переделать до-

казательство формулы (7.1) так, чтобы грассмановская алгебра в нем не применялась, и, таким образом, формула (9.1) была бы доказана непосредственно.

Интегрирование на гладком многообразии  $M$  можно определить с помощью систем координат в  $M$  (§ 10); тот факт, что результат не зависит от выбора системы координат, следует из формулы преобразования. Если  $M$  — некоторое  $r$ -мерное многообразие в  $E^n$ , то произвольная  $r$ -форма  $\omega$  в  $E^n$  с помощью тождественного отображения многообразия  $M$  в  $E^n$  определяет  $r$ -форму  $\omega_1$  на  $M$ ; см. § 11 и 12 гл. II. Мы можем по определению положить  $\int_M \omega = \int_M \omega_1$ . Эта ситуация встречается, в частности, в теореме Стокса. (Можно было бы при очень общих условиях аппроксимировать многообразие  $M$  полиэдральными цепями  $A_i$  и по определению положить  $\int_M \omega = \lim_{A_i} \int_{A_i} \omega$ ; см. гл. X.)

Простейший случай теоремы Стокса рассмотрен в § 11. Главным образом для того, чтобы выявить внутренние доводы в пользу этой теоремы, мы даем прямое доказательство. Обобщения, полученного затем в § 12, оказывается достаточно для доказательства более общего случая, изучаемого позже <sup>1)</sup>.

Главная трудность в общем случае теоремы Стокса относится к строению границы  $B$  рассматриваемой области или многообразия. Вообще говоря, граница  $B$  составлена из кусков различных размерностей. В действительности части границы  $B$ , имеющие более низкую размерность, не играют никакой роли; поэтому существенно показать, как исключить их из рассмотрения. Мы это делаем с помощью понятия „нулевой  $s$ -протяженности“ множества. Пользуясь также разложениями единицы, мы получаем в § 14 прямое доказательство общей теоремы для ограниченных областей. Теорема для ограниченных многообразий (теорема 18A) легко сводится к этой теореме. Бóльшая общность достигается путем использования „регулярных форм“ (§ 16, 17), введенных Э. Картаном и другими.

В заключительном параграфе в геометрической формулировке рассматривается повторный интеграл в  $E^n$ ; его можно было бы легко обобщить на случай гладких многообразий.

**1.  $r$ -вектор ориентированного  $r$ -мерного симплекса.** Пусть  $\sigma$  — ориентированный  $r$ -мерный симплекс в  $E^n$ , или, более общо,

<sup>1)</sup> Литературу по этому вопросу см. у Крикеберга [Krickeberg K., Über den Lausschen und den Stokesschen Integralsatz, III, *Math. Nachr.*, 12 (1954), 341—365].

$r$ -мерное ориентированное полиэдральное подмножество  $r$ -мерной плоскости. Взяв  $r$ -мерную плоскость  $P$  симплекса  $\sigma$  и  $r$ -мерный ориентированный объем симплекса  $\sigma$  в  $P$ , мы получим  $r$ -мерный ориентированный объем в  $E^n$  и, следовательно, простой  $r$ -вектор в  $E^n$  (I, теорема 9A). Это —  $r$ -вектор  $\{\sigma\}$  симплекса  $\sigma$ . Это определение не использует евклидова характера пространства  $E^n$ . При  $r=0$  симплекс  $\sigma$  представляет собой некоторую точку  $p$ ; положим  $\{p\}=1$ . Мы найдем формулу, выражающую  $r$ -вектор  $\{\sigma\}$  через векторы-ребра симплекса  $\sigma$ .

Для любого  $r$ -мерного симплекса  $\sigma=p_0 \dots p_r$  в  $E^n$  векторы  $u_{ij}=p_j-p_i$  ( $i \neq j$ ) называются *векторами-ребрами* симплекса  $\sigma$ . Любое множество, состоящее из  $r$  линейно независимых векторов-ребер симплекса  $\sigma$ , мы называем *определяющим множеством векторов-ребер* симплекса  $\sigma$ . Пусть симплекс  $\sigma$  ориентирован; тогда мы называем такое множество *ориентирующим определяющим множеством* для  $\sigma$ , если входящие в него векторы заданы в порядке, определяющем положительную ориентацию симплекса  $\sigma$  (П. II, 5).

Легко видеть, что некоторое множество, состоящее из  $r$  векторов-ребер симплекса  $\sigma$ , является определяющим множеством в том и только в том случае, если соответствующее множество ребер симплекса  $\sigma$  не содержит никакого замкнутого пути, а также в том и только в том случае, если любые две вершины симплекса  $\sigma$  можно соединить некоторой последовательностью этих ребер. Если ориентация симплекса  $\sigma=p_0 \dots p_r$  задается вершинами  $p_i$  в указанном порядке (П. II, 5), то двумя важными ориентирующими определяющими множествами являются

$$(1) \quad u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0r}; \quad u_{01}, u_{12}, \dots, u_{r-1,r}.$$

**Теорема 1A.** Пусть  $v_1, \dots, v_r$  — ориентирующее определяющее множество для  $\sigma$ . Тогда

$$(2) \quad \{\sigma\} = \frac{v_1 \vee \dots \vee v_r}{r!}.$$

В качестве следствия получаем: если  $|\sigma|=|\sigma|_r$  обозначает  $r$ -мерный объем симплекса  $\sigma$  (мы пользуемся тем, что пространство  $E^n$  евклидово), то

$$(3) \quad |\sigma| = |\{\sigma\}| = \frac{|v_1 \vee \dots \vee v_r|}{r!}.$$

Мы докажем формулу (3); тогда, поскольку  $r$ -вектор  $v_1 \vee \dots \vee v_r$  определяет положительную ориентацию симплекса  $\sigma$ , будет доказана и формула (2).

Очевидно, формула (3) верна при  $r=1$ . В общем случае доказательство проведем индукцией по  $r$ . Легко видеть, что сущест-

вует вершина симплекса  $\sigma$ , скажем  $p_0$ , являющаяся концом в точности одного из векторов  $v_i$ , например  $v_1$ . Пусть  $\sigma'$  — грань симплекса  $\sigma$ , противоположная вершине  $p_0$ . Тогда векторы  $v_2, \dots, v_r$  образуют определяющее множество для симплекса  $\sigma'$  и, по предположению индукции,

$$|\sigma'| = \frac{|\beta|}{(r-1)!}, \quad \beta = v_2 \vee \dots \vee v_r.$$

Точки  $q_t = (1-t)p_0 + tp$  ( $p \in \sigma'$ ) при фиксированном  $t$  образуют симплекс  $\sigma'_t$ , для которого, очевидно,

$$|\sigma'_t| = t^{r-1} |\sigma'| = \frac{t^{r-1} |\beta|}{(r-1)!}.$$

Мы можем найти такой вектор  $w = v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_r v_r$ , что  $w \cdot v_i = 0$  при  $i = 2, \dots, r$ ; тогда  $|w|$  есть расстояние от точки  $p_0$  до плоскости грани  $\sigma'$ . Пользуясь равенством (I, 12.20), находим

$$|\sigma| = \int_0^1 |\sigma'_t| |w| dt = \frac{|\beta| |w|}{r!} = \frac{|w \vee v_2 \vee \dots \vee v_r|}{r!},$$

что и доказывает формулу (3).

**Лемма 1а.** Для любого симплекса  $\sigma = p_0 \dots p_r$  в  $E^n$  и любой точки  $q$  пространства  $E^n$ , если  $v_i = p_i - q$ , то

$$(4) \quad \{\sigma\} = \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^r (-1)^i v_0 \vee \dots \hat{v}_i \dots \vee v_r.$$

Так как  $u_{0i} = p_i - p_0 = v_i - v_0$ , то мы имеем

$$\begin{aligned} r! \{\sigma\} &= u_{01} \vee \dots \vee u_{0r} = (v_1 - v_0) \vee \dots \vee (v_r - v_0) = \\ &= v_1 \vee \dots \vee v_r - \sum_{i=1}^r v_1 \vee \dots \vee v_{i-1} \vee v_0 \vee v_{i+1} \vee \dots \vee v_r = \\ &= v_1 \vee \dots \vee v_r - \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} v_0 \vee v_1 \vee \dots \hat{v}_i \dots \vee v_r, \end{aligned}$$

что и доказывает формулу (4).

**2. r-вектор r-мерной цепи.** Под *r-мерной клеточной цепью*  $\sum a_i \sigma_i^r$  мы понимаем множество ориентированных клеток  $\sigma_i^r$  (П. II, 5), причем каждая из них взята с некоторым действительным коэффициентом  $a_i$ ; мы полагаем  $a(-\sigma) = (-a)\sigma$  и отождествляем ориентированную клетку  $\sigma_i^r$  с цепью  $1\sigma_i^r$ . В § 3 подразделение клетки  $\sigma_i^r$  следует рассматривать как новую цепь; это противо-

речит ситуации для полиэдральных цепей, которыми мы пользуемся в гл. I и далее.

Определим  $r$ -вектор клеточной цепи следующим образом:

$$(1) \quad \{\sum a_i \sigma_i^r\} = \sum a_i \{\sigma_i^r\}.$$

Тем самым задается линейное отображение линейного пространства  $r$ -мерных клеточных цепей пространства  $E^n$  в пространство  $V_{[r]}(E^n)$ . При  $r = 0$

$$(2) \quad \{\sum a_i p_i\} = \sum a_i.$$

**Теорема 2А.**  $r$ -вектор клеточной цепи не зависит от подразделений,

Для подразделений клетки это ясно; следовательно, это верно и для подразделений цепей.

**Теорема 2В.** Для любой клеточной цепи  $A$  с границей  $\partial A$  справедливо соотношение

$$(3) \quad \{\partial A\} = 0.$$

**Замечание.** Это, очевидно, выполняется и для полиэдральных цепей, определенных в (V, 1).

Достаточно доказать равенство (3) для произвольного симплекса  $\sigma = p_0 \dots p_r$ . Положим  $\sigma_i = p_0 \dots \hat{p}_i \dots p_r$ ; тогда (П. II, 7.1)  $\partial \sigma = \sum (-1)^i \sigma_i$ . Положим  $v_i = p_i - p_0$ . В силу формул (1.2) и (1.4)

$$(r-1)! \{\sigma_i\} = v_1 \vee \dots \hat{v}_i \dots \vee v_r \quad (i > 0),$$

$$(r-1)! \{\sigma_0\} = \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} v_1 \vee \dots \hat{v}_i \dots \vee v_r.$$

Эти соотношения показывают, что  $\{\partial \sigma\} = \sum (-1)^i \{\sigma_i\} = 0$ .

Приведем другое доказательство (в котором применяется материал, излагаемый позже). Допустим, что  $\{\partial \sigma\} = \alpha \neq 0$ . Выберем  $r$ -ковектор  $\omega_1$  так, чтобы  $\omega_1 \cdot \alpha \neq 0$  (I, теорема 3А). Положим  $\omega(p) = \omega_1$  в  $E^n$ . Тогда  $d\omega = 0$ ; поэтому формула (4.1) и теорема Стокса дают

$$\omega_1 \cdot \alpha = \int_{\partial \sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega = 0,$$

что противоречит сделанному ранее предположению.

**Теорема 2С.**  $r$ -вектор  $\{A\}$  зависит только от  $\partial A$ .

В самом деле, допустим, что  $\partial A = \partial B$ . Тогда  $\partial(B - A) = 0$  и в силу леммы (П. II, 10а) существует клеточная цепь  $C$ , для которой  $B - A = \partial C$ . Поэтому  $\{B\} - \{A\} = \{\partial C\} = 0$ .

**3. Интегрирование по клеточным цепям.** Сначала, предполагая, что  $r$ -форма  $\omega$  определена во всех точках  $r$ -мерной клеточной цепи  $A \subset E^n$ , определим операцию  $\omega \circ A$  (не являющуюся независимой от подразделений). Пусть  $p_i^*$  — „центр“ клетки  $\sigma_i'$ , как в (П. II, 1.2); тогда

$$(1) \quad \omega \circ \sum a_i \sigma_i' = \sum a_i \omega(p_i^*) \cdot \{\sigma_i'\},$$

где в правой части мы пользуемся скалярным произведением из (1, 2.2). Вообще говоря, клетки  $\sigma_i'$  будут у нас только симплексами.

Затем для любой  $r$ -мерной ориентированной клетки  $\sigma$  мы определим  $\int_{\sigma} \omega$ , предполагая, что  $r$ -форма  $\omega$  определена и непрерывна на  $\sigma$ . Пусть  $\mathfrak{S}_1\sigma, \mathfrak{S}_2\sigma, \dots$  — любая последовательность симплициальных разбиений клетки  $\sigma$ , степени мелкости которых  $\rightarrow 0$  (П. II, лемма 3с); положим

$$(2) \quad \int_{\sigma} \omega = \int_{\sigma} \omega(p) dp = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega \circ \mathfrak{S}_k\sigma.$$

То, что этот предел существует и не зависит от выбора последовательности разбиений, сразу следует из приведенной ниже леммы и из равномерной непрерывности формы  $\omega$ .

**Лемма 3а.** Допустим, что числа  $\varepsilon > 0$ ,  $\zeta > 0$  таковы, что

$$(3) \quad |\omega(q) - \omega(p)|_0 \leq \varepsilon, \text{ если } p, q \in \sigma, |q - p| \leq \zeta.$$

Тогда для любых двух симплициальных разбиений  $\sum \sigma_i', \sum \sigma_j''$  клетки  $\sigma$ , имеющих степени мелкости  $\leq \zeta$ ,

$$(4) \quad |\omega \circ \sum \sigma_j'' - \omega \circ \sum \sigma_i'| \leq 2\varepsilon |\sigma|.$$

Пусть  $p_i'$  и  $p_j''$  — центры симплексов  $\sigma_i'$  и  $\sigma_j''$  соответственно. Пусть  $\sum \tau_k$  — какое-либо общее симплициальное подразделение двух рассматриваемых разбиений (П. II, лемма 3б). Для каждого симплекса  $\sigma_i'$  пусть  $\sum_k' \tau_{ik}'$  — его подразделение, образованное лежащими в нем симплексами  $\tau_{ik}'$ . Пусть  $q_{ik}$  — центр симплекса  $\tau_{ik}'$ . Так как

$$\{\sigma_i'\} = \sum_k' \{\tau_{ik}'\}, \quad \sum_k' |\{\tau_{ik}'\}| = \sum_k' |\tau_{ik}'| = |\sigma_i'|$$

и  $\text{diam}(\sigma'_i) \leq \zeta$  (для всех  $i$ ), то на основании (I, 13.4) и (I, 13.9) [или же на основании (I, 12.10), если вместо комассы  $|\cdot|_0$  пользоваться обычной нормой  $|\cdot|$ ] получаем

$$\begin{aligned} |\omega \circ \sum \tau_k - \omega \circ \sum \sigma'_i| &= \left| \sum_i \left[ \sum'_k \omega \circ \tau'_{ik} - \omega \circ \sigma'_i \right] \right| = \\ &= \left| \sum_i \sum'_k [\omega(q_{ik}) - \omega(p'_i)] \cdot \{\tau'_{ik}\} \right| \leq \sum_i \sum'_k \varepsilon |\{\tau'_{ik}\}| = \varepsilon \sum_i |\sigma'_i| = \varepsilon |\sigma|. \end{aligned}$$

Подобным же образом  $|\omega \circ \sum \tau_k - \omega \circ \sum \sigma''_j| \leq \varepsilon |\sigma|$ , и неравенство (4) доказано.

Теперь мы определим интеграл по любой клеточной цепи, полагая

$$(5) \quad \int_{\sum a_i \sigma_i} \omega = \sum a_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

**4. Некоторые свойства интегралов.** Из доказательства леммы За ясно, что интеграл не зависит от подразделения цепи. [Поэтому он определяется и для полиэдральных цепей; см. (V, 1).] Интеграл билинеен:

$$\begin{aligned} \int_A (c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2) &= c_1 \int_A \omega_1 + c_2 \int_A \omega_2, \\ \int_{c_1 A_1 + c_2 A_2} \omega &= c_1 \int_{A_1} \omega + c_2 \int_{A_2} \omega. \end{aligned}$$

В частности,  $\int_{-\sigma} \omega = - \int_{\sigma} \omega$ , т. е. изменение ориентации меняет знак интеграла.

Определение интеграла в применении к постоянным формам дает

$$(1) \quad \int_A \omega = \omega_1 \cdot \{A\}, \quad \text{если} \quad \omega(p) = \omega_1 \quad \text{для всех } p.$$

Масса клеточной цепи определяется соотношением

$$(2) \quad \left| \sum a_i \sigma'_i \right| = \sum |a_i| |\sigma'_i|, \quad \text{если клетки } \sigma'_i \text{ не перекрываются;}$$

если клетки  $\sigma'_i$  перекрываются, то нужно прибегнуть к подразделению. (Дальнейшие подробности см. в гл. V.) Если  $\sum \sigma_i$  — некоторое разбиение клетки  $\sigma$ , то в силу (I, 13.4) и (I, 13.9)

$$|\omega \circ \sum \sigma_i| \leq \sum |\omega(p_i) \cdot \{\sigma_i\}| \leq \sum |\omega(p_i)|_0 |\sigma_i| \leq |\omega|_0 |\sigma|;$$

определение интеграла теперь дает

$$(3) \quad \left| \int_A \omega \right| \leq |\omega|_0 |A| \leq |\omega| |A|.$$

Поэтому также

$$(4) \quad \left| \int_A \omega - \int_A \xi \right| \leq \varepsilon |A|, \quad \text{если} \quad |\omega(p) - \xi(p)|_0 \leq \varepsilon \quad \text{в} \quad A.$$

Докажем теперь лемму о степени аппроксимации интеграла  $\int_A \omega$  суммами вида  $\omega \circ A$ .

**Лемма 4а.** Пусть дана клеточная цепь  $A = \sum \alpha_i \sigma_i^r$ ; пусть, далее,

$$5) \quad |\omega(q) - \omega(p)|_0 \leq \varepsilon, \quad \text{если точки } p \text{ и } q \text{ принадлежат одной и той же клетке } \sigma_i^r.$$

Тогда, если  $p_i$  — произвольная точка клетки  $\sigma_i^r$ , то

$$(6) \quad \left| \int_A \omega - \sum \alpha_i \omega(p_i) \cdot \{\sigma_i^r\} \right| \leq \varepsilon |A|.$$

Для каждого  $i$  равенство (1) и неравенство (4) дают

$$\left| \int_{\sigma_i^r} \omega - \omega(p_i) \cdot \{\sigma_i^r\} \right| \leq \varepsilon |\sigma_i^r|;$$

соотношение (6) сразу следует из этого неравенства.

**5. Связь с интегралом Римана.** В этом параграфе мы рассмотрим интегрирование  $n$ -формы  $\omega$  по  $n$ -мерной клетке  $\sigma$  в  $E^n$ , предполагая, что пространство  $E^n$  евклидово и ориентировано. В этом случае мы можем, как в (II, 3.1), писать  $\omega(p) = \omega(p) \cdot \omega_0$ . Для любой полиэдральной области [см. (П. II, 2)]  $\sigma$  в  $E^n$  пусть  $\sigma$  обозначает соответствующую ориентированную область, ориентированную так же, как и  $E^n$ . По определению положим

$$(1) \quad \int_{\sigma} \bar{\omega} = \int_{\sigma} \bar{\omega}(p) dp = \int_{\sigma} \omega.$$

Из определения интеграла  $\int_{\sigma} \omega$  ясно, что  $\int_{\sigma} \bar{\omega}$  есть в точности интеграл Римана от действительной функции  $\bar{\omega}$  по  $\bar{\sigma}$ .

Таким образом, интеграл из § 3 является обобщением интеграла Римана в следующих отношениях. Прежде всего, в случае  $r$ -мерного интегрирования в  $r$ -мерном пространстве действительная функция  $\bar{\omega}(p)$  заменяется  $r$ -формой  $\omega(p)$ ; тогда интеграл определяется независимо от метрического характера пространства  $E^r$ ; заметим, что мы интегрируем теперь по ориентированным областям. Оба интеграла сразу переносятся на случай  $r$ -мерного интегрирования по  $r$ -мерным полиэдральным областям в  $n$ -мерном пространстве; в случае интеграла Римана мы интегрируем по этим областям действительные функции, пользуясь метрическим характером пространства  $E^n$ , тогда как в случае нашего интеграла мы интегрируем  $r$ -формы по ориентированным областям. Наконец, интеграл по  $r$ -мерным клеточным цепям в  $E^n$  также является обобщением нашего интеграла. Аддитивность интеграла Римана по непересекающимся полиэдральным областям заменяется линейностью интеграла как функции от клеточных цепей.

При определении интеграла  $\int_{\sigma} \omega$  нет необходимости требовать, чтобы интегрируемое  $\omega(p)$  было  $r$ -ковектором; мы могли бы рассматривать функции  $\varphi(p, \alpha)$ , определенные для точек  $p$  и  $r$ -направлений  $\alpha$ , непрерывные по  $p$  при каждом  $\alpha$ . Однако, если мы хотим чтобы выполнялись простые свойства непрерывности или чтобы можно было определить внешний дифференциал  $d\varphi$ , являющийся ограниченной функцией (II, 8), то оказывается, что функция  $\varphi$  должна определять некоторую  $r$ -форму (быть может, не непрерывную); см. теоремы (V, 10A) и (IX, 5A). Алгебраические доводы в пользу этого дает теорема (V, 9A).

В будущем, когда мы будем заниматься  $n$ -мерным интегрированием в  $n$ -мерном пространстве, мы будем в равной мере пользоваться как тем, так и другим интегралом в (1).

Легко доказать следующее неравенство:

$$(2) \quad \left| \int_{\sigma} \omega \right| = \left| \int_{\sigma} \omega(p) dp \right| \leq \int_{\sigma} |\omega(p)| dp;$$

последний интеграл есть интеграл Римана.

**6. Интегрирование по открытым множествам.** Пусть  $\omega$  — непрерывная  $n$ -форма в открытом множестве  $R \subset E^n$ ; пусть пространство  $E^n$  ориентировано. Тогда для любой полиэдральной

области  $Q \subset R$  мы можем определить интеграл  $\int_Q \omega$ , ориентируя  $Q$  так же, как и  $E^n$ . При определении интеграла  $\int_R \omega$  возникают вопросы, связанные со сходимостью. Этот параграф относится к теории несобственных интегралов.

Мы говорим, что форма  $\omega$  суммируема<sup>1)</sup> в  $R$ , если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует компактное множество  $P \subset R$ , обладающее следующим свойством. Для любых полиэдральных областей  $Q_1, Q_2$

$$(1) \quad \left| \int_{Q_2} \omega - \int_{Q_1} \omega \right| < \varepsilon, \quad \text{если } P \subset Q_i \subset R, i = 1, 2.$$

Мы можем, очевидно, потребовать, чтобы множество  $P$  было полиэдром.

Только что высказанное условие, очевидно, равносильно следующему: для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое компактное множество (или полиэдр)  $P \subset R$ , что

$$(2) \quad \left| \int_Q \omega \right| < \varepsilon, \quad \text{если } Q \subset R \setminus P, Q \text{ — полиэдр.}$$

Пусть форма  $\omega$  суммируема в  $R$ . Тогда, очевидно, существует единственное число  $\int_R \omega$ , интеграл от  $\omega$  по  $R$ , обладающее следующим свойством. Для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое компактное множество (и даже полиэдр)  $P$ , что

$$(3) \quad \left| \int_Q \omega - \int_R \omega \right| < \varepsilon, \quad \text{если } P \subset Q \subset R, Q \text{ — полиэдр}^2).$$

Обратно, если существует число  $\int_R \omega$ , обладающее этим свойством, то форма  $\omega$  суммируема в  $R$  и  $\int_R \omega$  есть ее интеграл.

Мы говорим, что возрастающая последовательность множеств  $Q_1, Q_2, \dots$  в  $R$  сходится к  $R$ , если открытые ядра этих множеств покрывают  $R$ ; мы пишем:  $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \rightarrow R$ . Легко видеть, что существует такая сходящаяся к  $R$  последовательность, в которой  $Q_i$  являются полиэдрами.

<sup>1)</sup> Обычно, когда речь идет об интеграле Римана, функция называется „интегрируемой“, а не „суммируемой“ в  $R$ . — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Слово „полиэдр“ всюду в этом параграфе употребляется в смысле „полиэдральная область“. — *Прим. ред.*

Лемма 6а. Если форма  $\omega$  суммируема в  $R$  и  $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \rightarrow R$ , причем множества  $Q_i$  являются полиэдрами, то

$$(4) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{Q_i} \omega = \int_R \omega.$$

Взяв произвольное  $\varepsilon > 0$ , выберем полиэдр  $P$  так, чтобы удовлетворялось неравенство (3). Найдется номер  $i_0$ , для которого  $P \subset Q_{i_0}$ , и тогда при  $i \geq i_0$  неравенство (3) будет выполняться для любого полиэдра  $Q_i$ .

Обычное определение интеграла Римана  $\int_R \varphi$  от действительной функции  $\varphi$  совершенно аналогично определению интеграла  $\int_R \omega$ .

Лемма 6б.  $n$ -форма  $\omega$  суммируема в  $R$  в том и только в том случае, если функция  $|\omega(p)|$  суммируема в  $R$ .

Допустим, что  $|\omega(p)|$  суммируема. Тогда, пользуясь соотношением (2) и неравенством (5.2), мы видим, что суммируема и  $n$ -форма  $\omega$ . Обратное легко доказать, если по отдельности рассмотреть множества, где  $\bar{\omega}(p) > 0$  и  $\bar{\omega}(p) < 0$ .

Лемма 6с. Если  $n$ -форма  $\omega$  суммируема в  $R$ , а действительная функция  $\varphi$  ограничена и непрерывна в  $R$ , то и  $n$ -форма  $\varphi\omega$  суммируема в  $R$ .

Это следует из предыдущей леммы.

Объем (или лебеговская мера, или масса) открытого множества  $R$  может быть определен соотношением

$$(5) \quad |R| = \int_R dp = \sup \{ |Q| : Q \subset R, Q \text{ — полиэдр} \},$$

если эта верхняя грань конечна. Если  $Q_i$  — возрастающая последовательность полиэдров, сходящаяся к  $R$ , то  $|R| = \lim |Q_i|$ . Если через  $\omega_0$  обозначить  $n$ -направление пространства  $E^n$ , то

$$(6) \quad |R| = \int_R \omega_0.$$

Лемма 6д. Пусть  $n$ -форма  $\omega$  непрерывна в открытом множестве  $R$ , и пусть  $|R|$  и  $|\omega|$  конечны. Тогда  $n$ -форма  $\omega$  суммируема в  $R$  и

$$(7) \quad \left| \int_R \omega \right| \leq |\omega| |R|.$$

Пусть  $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \rightarrow R$ , причем  $Q_i$  — полиэдры. Взяв произвольное  $\varepsilon > 0$ , выберем число  $i$  так, чтобы было  $|R \setminus Q_i| < \varepsilon / |\omega|$ . Тогда  $\left| \int_Q \omega \right| \leq |\omega| |Q| < \varepsilon$  для любого полиэдра  $Q \subset R \setminus Q_i$ , и поэтому  $n$ -форма  $\omega$  суммируема в  $R$ . Так как  $\left| \int_{Q_i} \omega \right| \leq |\omega| |R|$ , то неравенство (7) следует из (4).

Для произвольного полиэдра  $P$  мы можем определить  $\int_P \omega$  и  $\int_{\text{int}(P)} \omega$ ; мы хотим показать, что эти интегралы равны. Для этого нам нужна

*Лемма 6е. Любой  $(n-1)$ -мерный полиэдр  $Q$  в  $E^n$  содержится в открытом ядре некоторого полиэдра  $Q'$ , объем  $|Q'|$  которого сколь угодно мал.*

Это ясно для  $(n-1)$ -мерного симплекса, а поэтому и для  $Q$ .

*Лемма 6ф. Если  $n$ -форма  $\omega$  непрерывна на полиэдре  $P$ , то  $\omega$  суммируема в  $\text{int}(P)$  и*

$$(8) \quad \int_P \omega = \int_{\text{int}(P)} \omega.$$

Положим  $P^* = P \setminus \text{int}(P)$ . Взяв произвольное  $\varepsilon > 0$ , выберем полиэдр  $Q'$  (см. предыдущую лемму) так, чтобы (предполагается, что  $n$ -форма  $\omega$  не тождественно равна нулю)

$$P^* \subset \text{int}(Q'), \quad |Q'| < \frac{\varepsilon}{|\omega|}.$$

Множество  $P' = P \setminus \text{int}(Q')$  является полиэдром, и  $P' \subset \text{int}(P)$ . Возьмем любой полиэдр  $Q$ , для которого  $P' \subset Q \subset \text{int}(P)$ . Тогда

$$\left| \int_P \omega - \int_Q \omega \right| \leq |P \setminus Q| |\omega| \leq |Q'| |\omega| < \varepsilon,$$

и лемма доказана.

Следующей леммой мы воспользуемся ниже, в § 8.

*Лемма 6г. Пусть  $n$ -форма  $\omega$  непрерывна в  $R$ , и пусть  $I$  — некоторое число. Допустим, что для каждого  $\varepsilon > 0$  существует компактное множество  $P \subset R$ , обладающее следующим свойством: для любой такой непрерывной в  $R$  функции  $\varphi$ ,*

что  $0 \leq \varphi(p) \leq 1$ ,  $\varphi(p) = 1$  на  $P$  и  $\text{spt}(\varphi)$  есть компактное множество в  $R$ , мы имеем  $\left| I - \int_R \varphi \omega \right| < \varepsilon$ . Тогда форма  $\omega$  суммируема в  $R$  и  $\int_R \omega = I$ .

Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Выберем компактное множество  $P$ , как указано выше, для числа  $\varepsilon/2$ . Достаточно показать, что для любого полиэдра  $Q$

$$(9) \quad \left| I - \int_Q \omega \right| < \varepsilon, \quad \text{если } P \subset Q \subset R.$$

Мы можем выбрать число  $N$  и полиэдр  $Q' \subset R$  так, чтобы было

$$Q \subset \text{int}(Q'), \quad |Q' \setminus Q| < \frac{\varepsilon}{2N}, \quad |\omega(p)| \leq N \text{ на } Q'$$

(ср. лемму 6е). Выберем такую функцию  $\varphi$ , что  $\text{spt}(\varphi) \subset Q'$ ,  $\varphi = 1$  на  $Q$  (П. III, лемма 1а). В таком случае

$$\left| \int_R \varphi \omega - \int_Q \omega \right| = \left| \int_{Q' \setminus Q} \varphi \omega \right| \leq \int_{Q' \setminus Q} |\omega| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и неравенство (9) доказано.

**7. Формула преобразования.** Мы укажем здесь основную формулу для преобразования интеграла и наметим прямое ее доказательство. Так как некоторые детали этого доказательства (касающиеся аппроксимации криволинейной триангуляции обычными триангуляциями) в этот момент еще не слишком просты, полное доказательство мы проведем в следующем параграфе другим методом. К обычной формулировке теоремы, в которую входят интегралы Римана и якобианы, мы придем в § 9. Следует вспомнить определение формы  $f^*\omega$  [см. (II, 4)] и алгебраического якобиана  $\bar{J}_f$  [см. (II, 6.3)].

**Теорема 7А.** Пусть  $f$  — взаимно однозначное регулярное отображение открытого множества  $R \subset E$  на открытое множество  $R' \subset E'$  (пространства  $E$  и  $E'$  ориентированы и имеют размерность  $n$ ), причем  $\bar{J}_f(p) > 0$  в  $R$ . Пусть, далее,  $\omega$  — непрерывная  $n$ -форма в  $R'$ , суммируемая в  $R'$ . Тогда  $n$ -форма  $f^*\omega$  суммируема в  $R$  и

$$(1) \quad \int_R f^*\omega = \int_{R'} \omega.$$

Замечания. Если  $J_f(\bar{p}) < 0$  в  $R$ , то эта формула справедлива со знаком минус, в чем мы убеждаемся, изменяя ориентацию пространства  $E'$ . Если мы будем рассматривать множество  $R$  как  $n$ -мерную цепь и вместо  $R'$  писать  $f(R)$ , то формула будет справедлива в обоих случаях. В общей теории формуле (1) соответствует формула (X, 8.1); но все множество  $R$  в этом случае не может рассматриваться как  $n$ -мерная цепь.

Прямое доказательство формулы (1) можно было бы провести так. Если задано  $\varepsilon > 0$ , то разобьем пространство  $E$  на маленькие кубы и образуем регулярное подразделение (П. II, 3); пусть  $Q$  — полиэдр, состоящий из тех симплексов  $\sigma_i$  этого подразделения, которые содержатся в  $\text{int}_\lambda(R)$  при некотором  $\lambda > 0$  (обозначения см. в П. II). Образы  $\sigma'_i = f(\sigma_i)$  являются криволинейными симплексами в  $R'$ . Пусть  $g$  — симплексно-аффинное отображение, аппроксимирующее отображение  $f$  на  $Q$  [см. (X, 1)], определенное следующим образом:  $g(p_i) = f(p_i)$  для каждой вершины  $p_i$ , а в каждом симплексе  $\sigma_k$  отображение  $g$  аффинно (П. I, 12). Тогда (если кубы достаточно малы, а  $\lambda$  остается фиксированным) симплексы  $\tau_k = g(\sigma_k)$  образуют триангуляцию некоторого полиэдра  $Q'$ , заполняющего большую часть множества  $R'$ .

Допустим, что каждую из разностей

$$\begin{aligned} & \left| \int_{R'} \omega - \int_{Q'} \omega \right|, & \left| \int_R f^* \omega - \int_Q f^* \omega \right|, \\ & \left| \int_{Q'} \omega - \omega \circ \sum \tau_k \right|, & \left| \int_Q f^* \omega - f^* \omega \circ \sum \sigma_k \right| \end{aligned}$$

мы сделали меньше, чем  $\varepsilon/5$ ; остается показать, что мы можем добиться выполнения неравенства

$$(2) \quad \sum_k |\omega \circ \tau_k - f^* \omega \circ \sigma_k| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Возьмем типичный симплекс  $\sigma_k = p_0 \dots p_n$  с центром  $p_k^*$ . Пусть, скажем,

$$\begin{aligned} q_i &= f(p_i) = g(p_i), & \tau_k &= q_0 \dots q_n, \\ u_i &= p_i - p_{i-1}, & v_i &= q_i - q_{i-1}. \end{aligned}$$

Так как на симплексе  $\sigma_k$  отображение  $g$  аффинно, то  $v_i = \nabla g(p_k^*, u_i)$  (П. I, 12.4); поэтому в силу (1.2) и (II, 4.1)

$$(3) \quad \{\tau_k\} = \frac{v_1 \vee \dots \vee v_n}{n!} = \frac{\nabla g(p_k^*, u_1 \vee \dots \vee u_n)}{n!} = \nabla g(p_k^*, \{\sigma_k\}).$$

Следовательно, если  $q_k^*$  — центр симплекса  $\tau_k$ , то с помощью формулы (II, 4.4) получаем

$$\begin{aligned} |\omega \circ \tau_k - f^* \omega \circ \sigma_k| &= |\omega(q_k^*) \cdot \{\tau_k\} - \omega(f(p_k^*)) \cdot \nabla f(p_k^*, \{\sigma_k\})| \leq \\ &\leq |\omega(q_k^*) - \omega(f(p_k^*))| |\tau_k| + |\omega(f(p_k^*))| |\nabla g(p_k^*, \{\sigma_k\}) - \nabla f(p_k^*, \{\sigma_k\})| \end{aligned}$$

и правую часть можно сделать произвольно малым кратным величины  $|\sigma_k|$  [ср. лемму (X, 3a)]. Суммируя по  $k$ , получаем неравенство (2).

**8. Доказательство формулы преобразования.** Сначала мы рассмотрим случай, когда  $n$ -форма  $\omega$  компактна, т. е. ее носитель  $\text{spt}(\omega)$  — замыкание множества точек  $q$ , в которых  $\omega(q) \neq 0$ , содержится в  $R$  и компактен. Если отображение  $f$  аффинно (П. I, 12), то доказательство может быть сразу проведено следующим образом. Возьмем такой полиэдр  $P$ , что  $\text{spt}(f^* \omega) \subset P \subset R$ ; тогда  $\text{spt}(\omega) \subset P' \subset R'$ , где  $P' = f(P)$ . Сколь угодно мелкое подразделение  $\sum \sigma_k$  полиэдра  $P$  дает сколь угодно мелкое подразделение  $\sum \tau_k$  [где  $\tau_k = f(\sigma_k)$ ] полиэдра  $P'$ . Далее (см. § 7),  $f(p_k^*) = q_k^*$  и

$$(1) \quad \{\tau_k\} = \nabla f(p_k^*, \{\sigma_k\}), \quad \omega \circ \tau_k = f^* \omega \circ \sigma_k,$$

поэтому

$$\int_{R'} \omega = \lim \omega \circ \sum \tau_k = \lim f^* \omega \circ \sum \sigma_k = \int_R f^* \omega.$$

В общем случае компактной  $n$ -формы  $\omega$  мы выразим  $\omega$  в виде суммы  $\sum \omega_i$ , где каждое множество  $\text{spt}(\omega_i)$  мало; в маленькой области отображение  $f$  почти аффинно, и мы получим аппроксимацию, которая докажет формулу (7.1).

Пусть  $C_1, C_2, \dots$  — разбиение пространства  $E'$  на кубы диаметра 1; пусть  $C'_1, C'_2, \dots$  — концентрические им кубы диаметра 2. Пусть  $\psi'_1$  — такая гладкая функция в  $E'$ , что (П. III, лемма 1с)

$$0 \leq \psi'_1(q) \leq 1, \quad \psi'_1(q) > 0 \text{ в } C_1, \quad \psi'_1(q) = 0 \text{ в } E \setminus C'_1;$$

образуем функции  $\psi'_i$ , производя параллельный перенос куба  $C_1$  в куб  $C_i$ . Положим

$$\psi_i(q) = \frac{\psi'_i(q)}{\sum_j \psi'_j(q)};$$

это — „разложение единицы“ в  $E'$  (П. III, 2). Теперь для некоторого  $L$  [см. (II, 4.14)]

$$\sum \psi_i(q) = 1, \quad \psi_i(q) = 0 \text{ в } E' \setminus C'_i, \quad \mathfrak{L}_{\psi_i} = L \text{ (для всех } i\text{)}.$$

Положим

$$Q' = \text{spt}(\omega), \quad Q = f^{-1}(Q') = \text{spt}(f^*\omega).$$

Так как множество  $Q'$ , а поэтому и множество  $Q$  компактны, то мы можем выбрать  $\rho_0$  так, чтобы было

$$R_1 = U_{\rho_0}(Q), \quad R_1 \subset R.$$

Мы можем выбрать, далее, такое число  $\rho'_0$ , что

$$R'_1 = U_{\rho'_0}(Q') \subset R', \quad L' = \mathfrak{L}_{f^{-1}|_{R'_1}}, \quad L'\rho'_0 \leq \rho_0.$$

Положим [см. (II, 6)]

$$M = |R'_1|, \quad J = \sup \{|J_f(p)| : p \in R_1\}.$$

Возьмем теперь произвольное  $\varepsilon > 0$ . Положим (мы можем предполагать, что  $\omega \neq 0$ )

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2^n n^{n/2} M L'^{1/n}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{3 L L' J |\omega|}.$$

Выберем  $\rho$  и  $\rho' > 0$  так, чтобы были выполнены неравенства [см. (II, 2.3)]

$$(2) \quad \rho' = \frac{\rho}{L'} \leq \frac{\rho'_0}{3} \quad \left( \text{следовательно, } \rho < \frac{\rho_0}{3} \right),$$

$$(3) \quad |f(p) - f(p_0) - \nabla f(p_0, p - p_0)| \leq \varepsilon_2 |p - p_0|, \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{если } |p - p_0| < \rho \\ \text{и } p_0 \in R_1. \end{array}$$

$$(4) \quad |J_f(p) - J_f(p_0)| \leq \frac{\varepsilon_1}{3 |\omega|}$$

$$(5) \quad |\omega(q) - \omega(q_0)| \leq \frac{\varepsilon_1}{3J}, \quad \text{если } q_0 \in R'_1 \text{ и } |q - q_0| < \varepsilon_2 \rho.$$

Производя гомотегию пространства  $E'$  с коэффициентом  $\rho'$ , мы получим (из  $C_i$  и  $C'_i$ ) кубическое разбиение пространства  $E'$  с кубами  $P_1, P_2, \dots$  диаметра  $\rho'$  и концентрическими им кубами  $P'_1, P'_2, \dots$  диаметра  $2\rho'$ ; функции  $\psi_i$  перейдут в такие функции  $\varphi_i$ , что

$$(6) \quad 0 \leq \varphi_i \leq 1, \quad \varphi_i = 0 \text{ в } E' \setminus P'_i, \quad \sum \varphi_i = 1, \quad \mathfrak{L}_{\varphi_i} = \frac{L}{\rho'}.$$

Начиная с этого момента, мы будем рассматривать только те  $i$ , скажем,  $i = 1, \dots, m$ , для которых кубы  $P'_i$  имеют общие точки

с  $Q'$ ; в силу (2) эти кубы  $P'_i$  лежат в  $R'_1$ . Пусть  $q_i$  — центр куба  $P_i$ ; положим  $p_i = f^{-1}(q_i)$ .

Пусть отображение  $F_i$  является аффинной аппроксимацией для  $f$  в точке  $p_i$ ; оно определяется формулой

$$(7) \quad F_i(p) = f(p_i) + \nabla f(p_i, p - p_i).$$

Так как отображение  $\nabla f(p_i, v)$  линейно относительно  $v$ , то из формул (7) и (II, 1.1) мы получаем

$$(8) \quad \nabla F_i(p, v) = \nabla f(p_i, v) \text{ для всех } p, v.$$

Положим

$$(9) \quad \omega_i = \varphi_i \omega.$$

Мы покажем, что

$$(10) \quad \text{spt}(f^* \omega_i) \cup \text{spt}(F_i^* \omega_i) \subset \bar{U}_\rho(p_i).$$

Допустим, что  $f^* \omega_i(p) \neq 0$ . Тогда  $\omega_i(f(p)) \neq 0$ , поэтому  $\varphi_i(f(p)) \neq 0$  и  $|f(p) - q_i| < \rho'$ . В силу выбора числа  $m$  точки  $f(p)$  и  $q_i$  лежат в  $R'_1$ ; следовательно, в силу (2)

$$|p - p_i| \leq \mathfrak{L}_{f^{-1}}|_{R'_1} |f(p) - q_i| < \rho,$$

откуда мы находим  $\text{spt}(f^* \omega_i) \subset \bar{U}_\rho(p_i)$ . Далее, в силу равенств (8) и (II, 4.16) для отображения  $F_i^{-1}$  (определенного в  $E'$ ) и неравенства (II, 4.15) для отображения  $f$

$$\mathfrak{L}_{F_i^{-1}}|_{R'_1} = |\nabla F_i^{-1}| = |\nabla f^{-1}(q_i)| \leq \mathfrak{L}_{f^{-1}}|_{R'_1};$$

поэтому то же самое доказательство годится и для  $F_i^* \omega_i$ .

Затем мы покажем, что если  $\alpha_0$  —  $n$ -направление пространства  $E$ , то

$$(11) \quad |[F_i^* \omega_i(p) - f^* \omega_i(p)] \cdot \alpha_0| < \varepsilon_1, \text{ если } |p - p_i| < \rho.$$

В силу (3)

$$|q' - q| \leq \varepsilon_2 |p - p_i| < \varepsilon_2 \rho, \text{ если } q' = F_i(p), q = f(p).$$

Поэтому в силу (6), (2) и (5)

$$\begin{aligned} |\omega_i(q') - \omega_i(q)| &\leq |\varphi_i(q') - \varphi_i(q)| |\omega(q')| + |\varphi_i(q)| |\omega(q') - \omega(q)| \leq \\ &\leq \mathfrak{L}_{\varphi_i} |q' - q| |\omega| + |\omega(q') - \omega(q)| < LL' |\omega| \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_1}{3J}. \end{aligned}$$

В силу (II, 4.4), (8) и (II, 6.1)

$$F_i^* \omega_i(p) \cdot \alpha_0 = \omega_i(F_i(p)) \cdot \nabla F_i(p, \alpha_0) = \omega_i(q') \cdot J_f(p_i);$$

аналогично,  $f^*\omega_i(p) \cdot \alpha_0 = \omega_i(q) \cdot J_f(p)$ . Следовательно, на основании неравенства (4) мы имеем

$$\begin{aligned} |[F_i^*\omega_i(p) - f^*\omega_i(p)] \cdot \alpha_0| &\leq \\ &\leq |\omega_i(q') - \omega_i(q)| |J_f(p_i)| + |\omega_i(q)| |J_f(p_i) - J_f(p)| < \\ &< (LL' |\omega| \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_1}{3J}) J + \frac{|\omega| \varepsilon_1}{3|\omega|}, \end{aligned}$$

что и доказывает неравенство (11).

Так как множество  $U_p(p_i)$  содержится в кубе с ребром  $2\rho$ , то из (10) и (11) мы получаем

$$(12) \quad \left| \int_R (F_i^*\omega_i - f^*\omega_i) \right| \leq \int_{U_p(p_i)} |F_i^*\omega_i - f^*\omega_i| < 2^n \rho^n \varepsilon_1.$$

При отображении  $F_i$  некоторая окрестность  $U_i$  множества  $\text{spt}(F_i^*\omega_i)$  переходит в окрестность  $U'_i$  множества  $\text{spt}(\omega_i)$ ; в силу (8)  $\bar{J}_{F_i}(p) > 0$ . Так как мы уже доказали теорему для аффинного отображения  $F_i$  и компактной  $n$ -формы  $\omega_i$ , то мы имеем

$$\int_R F_i^*\omega_i = \int_{U_i} F_i^*\omega_i = \int_{U'_i} \omega_i = \int_{R'} \omega_i.$$

Следовательно, так как  $\sum_{i=1}^m \varphi_i(p) = 1$  в  $\text{spt}(\omega)$ , то

$$\sum_{i=1}^m \int_R F_i^*\omega_i = \sum_{i=1}^m \int_{R'} \omega_i = \int_{R'} \omega.$$

Кроме того,  $\sum_{i=1}^m \int_R f^*\omega_i = \int_R f^*\omega$ ; поэтому

$$\int_{R'} \omega - \int_R f^*\omega = \sum_{i=1}^m \int_R (F_i^*\omega_i - f^*\omega_i).$$

Так как кубы  $P_i$  лежат в  $R'_1$  и  $|P_i| = (\rho'/n^{1/2})^n$ , то число номеров  $i$  равно

$$m \leq \frac{|R'_1|}{|P_1|} = \frac{Mn^{n/2}}{\rho'^n} = \frac{n^{n/2}ML'^n}{\rho^n}.$$

Следовательно,

$$\left| \int_{R'} \omega - \int_R f^* \omega \right| \leq m 2^n \rho^n \varepsilon_1 \leq \varepsilon,$$

что доказывает формулу (7.1) для компактной  $n$ -формы  $\omega$ .

Рассмотрим теперь общий случай. Мы можем применить лемму 6g. Взяв произвольное  $\varepsilon > 0$ , выберем в соответствии с леммой 6b такое компактное множество  $P' \subset R'$ , что

$$\int_{R' \setminus P'} |\omega| < \varepsilon.$$

Положим  $P = f^{-1}(P')$ . Теперь возьмем такую непрерывную функцию  $\varphi$  в  $R$  с компактным носителем  $\text{spt}(\varphi) \subset R$ , что  $0 \leq \varphi \leq 1$  и  $\varphi = 1$  в  $P$ . Положим  $\varphi'(q) = \varphi(f^{-1}(q))$  в  $R'$ . Тогда

$$\left| \int_{R'} \omega - \int_{R'} \varphi' \omega \right| = \left| \int_{R' \setminus P'} (1 - \varphi') \omega \right| \leq \int_{R' \setminus P'} |\omega| < \varepsilon.$$

Так как  $n$ -форма  $\varphi' \omega$  компактна и  $f^*(\varphi' \omega) = \varphi(f^* \omega)$  [что можно непосредственно доказать на основании (II, 4.4)], то проведенное выше доказательство дает

$$\int_R \varphi f^* \omega = \int_R f^* \varphi' \omega = \int_{R'} \varphi' \omega.$$

Поэтому

$$\left| \int_{R'} \omega - \int_R \varphi f^* \omega \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, в силу леммы 6g  $n$ -форма  $f^* \omega$  суммируема в  $R$  и имеет место формула (7.1). Это завершает наше доказательство.

**9. Преобразование интеграла Римана.** Мы покажем, как теорема 7A приводит к обычной формуле для преобразования интеграла Римана при замене координат. Пусть функция  $\varphi(p)$  непрерывна и суммируема по Риману в открытом множестве  $R'$  (см. § 6). Пусть  $f$  — взаимно однозначное регулярное отображение открытого множества  $R$  на  $R'$ . Если в пространствах, в которых содержатся  $R$  и  $R'$ , выбраны системы координат, то задание отображения  $f$  равносильно выбору в  $R'$  новой системы координат [см. (II, 5)]. Мы хотим выразить интеграл  $\int_{R'} \varphi(p) dp$  в виде интеграла Римана по  $R$ .

Пусть  $\omega_0$  и  $\omega'_0$  — единичные  $n$ -ковекторы в ориентированных пространствах, в которых содержатся  $R$  и  $R'$ . Определим  $n$ -форму  $\omega$  и функцию  $\varphi^*$  соотношениями

$$\omega(q) = \varphi(q) \omega'_0, \quad f^* \omega(p) = \varphi^*(p) \omega_0.$$

Тогда в силу (II, 6.8)  $\varphi^*(p) = \bar{J}_f(p) \varphi(f(p))$ . Записывая обе части равенства (7.1) в виде интегралов Римана (см. § 5), получаем

$$(1) \quad \int_{R'} \varphi(q) dq = \int_R \bar{J}_f(p) \varphi(f(p)) dp, \quad \text{если } \bar{J}_f(p) > 0 \text{ в } R;$$

та же самая формула справедлива со знаком минус, если  $\bar{J}_f(p) < 0$  в  $R$ . Взяв функцию  $\varphi(p) = 1$  в  $R'$ , получаем также

$$(2) \quad |R'| = \int_{R'} dq = \int_R \bar{J}_f(p) dp, \quad \text{если } \bar{J}_f(p) > 0 \text{ в } R.$$

**10. Интегрирование на многообразиях.** В евклидовом пространстве простейшими областями интегрирования являются ориентированные полиэдральные клетки. На гладком многообразии  $M$  (II, 10) такими простейшими областями являются гладкие образы  $f\sigma$  ориентированных клеток  $\sigma$ . Если непрерывная  $r$ -форма  $\omega$  определена в окрестности образа  $f\sigma$ , где  $\sigma$  — ориентированная  $r$ -мерная клетка, то мы можем, как в (II, 12), определить  $r$ -форму  $f^*\omega$  и [в соответствии с формулой (7.1)] по определению положить

$$\int_{f\sigma} \omega = \int_{\sigma} f^* \omega.$$

Предположим теперь, что  $M$  — компактное ориентированное гладкое многообразие размерности  $n$ , а  $\omega$  — непрерывная  $n$ -форма на  $M$ ; мы определим интеграл  $\int_M \omega$ .

Пусть  $\text{spt}(\omega)$  — замыкание множества точек  $p \in M$ , в которых  $\omega(p) \neq 0$ . Допустим сначала, что это замыкание лежит в некоторой системе координат  $\chi^1$ . Тогда мы можем, пользуясь отображением  $\chi$ , определить  $\int_M \omega$ , как в (1). Таким образом,

$$(2) \quad \int_M \omega = \int_O \chi^* \omega, \quad \text{если } \text{spt}(\omega) \subset \chi(O).$$

Допустим, что и  $\text{spt}(\omega) \subset \chi'(O')$ . Тогда существуют такие окрестности  $R$  и  $R'$  множеств  $\chi^{-1}(\text{spt}(\omega))$  и  $\chi'^{-1}(\text{spt}(\omega))$  соответственно,

<sup>1)</sup> То есть в образе  $\chi(O)$  при гомеоморфизме  $\chi$  открытого множества  $O \subset \mathbb{A}^n$ . — Прим. перев.

что  $\psi = \chi'^{-1}\chi$  является взаимно однозначным регулярным отображением множества  $R$  на  $R'$ ; так как многообразие  $M$  ориентировано, то  $\bar{J}_\psi(x) > 0$  в  $R$ . В силу теоремы 7А

$$\int_{O'} \chi'^* \omega = \int_{R'} \chi'^* \omega = \int_R \psi^* \chi'^* \omega = \int_O \chi^* \omega;$$

тем самым показано, что определение интеграла  $\int_M \omega$  не зависит от выбора системы координат.

Чтобы интегрировать любую  $n$ -форму  $\omega$ , можно было бы взять некоторую триангуляцию многообразия  $M$  (IV, теорема 12А) и интегрировать отдельно по каждой клетке. Однако проще воспользоваться некоторым разложением  $\sum \varphi_i$  единицы [см. § 8 и (П. III, 2)]: представить форму  $\omega$  в виде  $\sum \omega_i$ ,  $\omega_i = \varphi_i \omega$ , причем каждое множество  $\text{spt}(\omega_i)$  содержится в некоторой системе координат, и сложить интегралы  $\int_M \omega_i$ . Покажем, как это сделать.

Пусть  $O$  и  $O'$  — открытые шары в  $\mathbb{A}^n$  с центром  $O$  радиуса 1 и 2 соответственно. Мы можем найти конечное множество таких систем координат  $\chi_1, \dots, \chi_m$ , каждая из которых определена в  $O'$ , что множества  $\chi_i(O)$  покрывают  $M$ . Определим, как в (П. III, 1), в пространстве  $\mathbb{A}^n$  гладкую неотрицательную функцию  $\Phi(x)$ , положительную в  $O$  и равную нулю в некоторой окрестности множества  $\mathbb{A}^n \setminus O'$ . Положим  $\varphi'_i(p) = \Phi(\chi_i^{-1}(p))$  в  $\chi_i(O')$  и  $\varphi'_i(p) = 0$  во всех остальных точках многообразия  $M$ . Тогда функции  $\varphi'_i$  являются гладкими в  $M$  и  $\varphi'_i > 0$  в  $\chi_i(O)$ . Поэтому мы можем положить  $\varphi_i(p) = \varphi'_i(p) / \sum \varphi'_j(p)$  на  $M$ ; теперь  $\varphi_i = 0$  вне  $\chi_i(O')$  и  $\sum \varphi_i(p) = 1$  на  $M$ .

Положим  $\omega_i(p) = \varphi_i(p) \omega(p)$  на  $M$ ; тогда  $\omega = \sum \omega_i$ . Мы можем определить каждый интеграл  $\int_M \omega_i$  и положить  $\int_M \omega = \sum \int_M \omega_i$ .

Чтобы показать, что результат не зависит от выбора систем координат  $\chi_i$  и функций  $\varphi_i$ , допустим, что  $\chi'_j$  и  $\varphi''_j$  ( $j = 1, \dots, m'$ ) — другие такие же системы координат и функции. Пользуясь доказанной выше инвариантностью, находим

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \int_{O'} \chi_i^* (\varphi_i \omega) &= \sum_{i,j} \int_{O'} \chi_i^* \left( \sum_j \varphi''_j \varphi_i \omega \right) = \sum_{i,j} \int_{O'} \chi_i^* (\varphi''_j \varphi_i \omega) = \\ &= \sum_{i,j} \int_{O'} \chi_j'^* (\varphi''_j \varphi_i \omega) = \sum_j \int_{O'} \chi_j'^* \left( \sum_i \varphi_i \varphi''_j \omega \right) = \sum_j \int_{O'} \chi_j'^* (\varphi''_j \omega), \end{aligned}$$

что и дает требуемый результат.

Рассмотрим теперь в ориентированном многообразии  $M$  открытое подмножество  $R$  с компактным замыканием  $\bar{R}$ . Пусть  $\omega$  — непрерывная  $n$ -форма, определенная в некоторой окрестности  $U$  замыкания  $\bar{R}$ . Мы можем, как и выше, выбрать системы координат  $\chi_1, \dots, \chi_m$  так, чтобы множества  $\chi_i(O)$  покрывали  $\bar{R}$ . Определим, как и прежде, функции  $\varphi'_i$  и  $\varphi_i$ ; для некоторой окрестности  $U' \subset U$  множества  $\bar{R}$  функции  $\varphi_i$  определены в  $U'$  и  $\sum \varphi_i(p) = 1$  в этой окрестности. Мы можем положить

$$(3) \quad \int_R \varphi_i \omega = \int_{\chi_i^{-1}(R)} \chi_i^* \varphi_i \omega, \quad \int_R \omega = \sum_i \int_R \varphi_i \omega;$$

в самом деле, величина  $|\chi_i^* \varphi_i \omega|$  конечна в  $U_i^* = \chi_i^{-1}(R)$  и объем  $|U_i^*|$  конечен. Теперь лемма 6d показывает, что каждый член суммы определен. Как и выше, определение интеграла  $\int_R \omega$  не зависит от выбора  $\chi_i$  и  $\varphi_i$ .

Возьмем, наконец, любое открытое подмножество  $R$   $n$ -мерного ориентированного гладкого многообразия  $M$  и допустим, что  $n$ -форма  $\omega$  непрерывна в  $R$ . Мы говорим, что форма  $\omega$  суммируема в  $R$ , если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое открытое множество  $R_0$  с компактным замыканием  $\bar{R}_0 \subset R$ , что для любого открытого множества  $R'$  с компактным замыканием  $\bar{R}'$

$$(4) \quad \left| \int_{R'} \omega - \int_{R_0} \omega \right| < \varepsilon, \quad \text{если } R_0 \subset R', \quad \bar{R}' \subset R.$$

Если это выполняется, то можно, как в § 6, единственным образом определить интеграл  $\int_R \omega$ , и свойства, установленные в § 6,

до леммы 6а включительно, сохраняются, только полиэдры нужно заменить открытыми множествами с компактными замыканиями; легко видеть, что сохранит силу и лемма 6с. В случае  $M = E^n$  это определение эквивалентно определению, приведенному в § 6, как это следует из леммы 6f.

Сформулируем обобщение теоремы 7А на случай рассматриваемой теперь ситуации.

**Теорема 10А.** Пусть  $M$  и  $M'$  — ориентированные гладкие многообразия размерности  $n$ , и пусть  $f$  — взаимно однозначное, регулярное, сохраняющее ориентацию отображение открытого подмножества  $R$  многообразия  $M$  на открытое

подмножество  $R'$  многообразия  $M'$ . Пусть  $\omega$  — непрерывная  $n$ -форма на  $R'$ , суммируемая в  $R'$ . Тогда форма  $f^*\omega$  суммируема в  $R$  и имеет место формула (7.1). Если отображение  $f$  изменяет ориентацию, то формула (7.1) имеет место со знаком минус.

С помощью систем координат эта теорема сразу следует из проведенного нами выше рассуждения и теоремы 7А.

Рассмотрим теперь интегрирование  $r$ -форм  $\omega$  на  $M$ . В качестве области интегрирования мы возьмем некоторое подмножество  $R$   $r$ -мерного ориентированного подмногообразия  $M'$  многообразия  $M$ , и пусть  $R$  открыто в  $M'$ . Допустим, что  $r$ -форма  $\omega$  непрерывна в некоторой окрестности  $U$  множества  $R$  в  $M$  (или просто  $\omega$  есть  $r$ -форма на  $M$ , определенная и непрерывная во всех точках множества  $R$ ). Мы можем подмногообразие  $M'$  рассматривать как образ  $fM'$ , где  $f$  — тождественное отображение. Теперь мы можем определить интеграл  $\int_R \omega$  как  $\int_R f^*\omega$  (что сводится к рассмотрению произведений  $\omega(p) \cdot \alpha$  только для  $r$ -векторов  $\alpha$  в касательном пространстве подмногообразия  $M'$  в точке  $p$ ).

**11. Теорема Стокса для параллелепипеда.** Мы докажем теорему Стокса для наиболее простого случая; тогда с помощью аппроксимаций и разложений единицы ее можно будет доказать с произвольной желаемой степенью общности. Мы говорим, что форма  $\omega$  является *гладкой в клетке  $Q$* , если производная  $\nabla_v \omega(p)$  непрерывна в  $Q$  для каждого  $v$ . Можно показать, что это имеет место в том и только в том случае, если <sup>1)</sup> форма  $\omega$  может быть продолжена до гладкой формы, определенной в некоторой окрестности клетки  $Q$ .

**Лемма 11а.** Пусть  $Q$  — ориентированный  $n$ -мерный параллелепипед в  $E^n$ , и пусть  $\omega$  — гладкая  $(n-1)$ -форма в  $Q$ . Тогда

$$(1) \quad \int_Q d\omega = \int_{\partial Q} \omega.$$

Мы дадим прямое доказательство, не ссылающееся на теорию повторного интегрирования. По поводу классической трактовки см. § 19—21 введения. Для более общего случая доказательство будет проведено в теореме (IX, 12В).

<sup>1)</sup> Whitney H., Functions differentiable on the boundaries of regions, *Ann. Math.*, 35 (1934), 482—485.

Параллелепипед  $Q$  состоит из всех точек  $p_0 + \sum a_i v_i$  ( $0 \leq a_i \leq 1$ ), где  $p_0$  — некоторая точка, а  $v_1, \dots, v_n$  — независимые векторы. Для каждого  $i$  имеются грани

$$A_i^-: \text{ все точки } p_0 + \sum_{j \neq i} a_j v_j, \quad A_i^+: \text{ все точки } p_0 + v_i + \sum_{j \neq i} a_j v_j.$$

Мы можем считать, что параллелепипед  $Q$  ориентирован упорядоченным множеством векторов  $(v_1, \dots, v_n)$ . Ориентируем грани  $A_i^-$  и  $A_i^+$  упорядоченным множеством  $(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$ . Мы имеем [см. (П. II, 7)]

$$(2) \quad \partial Q = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (A_i^+ - A_i^-).$$

Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . По лемме (II, 2a) мы можем выбрать такое число  $\zeta > 0$ , что каждое из чисел

$$|\omega(q) - \omega(p)|, \quad |\nabla_v \omega(q) - \nabla_v \omega(p)|, \quad |d\omega(q) - d\omega(p)|$$

не будет превосходить  $\varepsilon$ , если  $p, q \in Q$ ,  $|q - p| < \zeta$ ,  $|v| = 1$ .

Найдется такое  $m$ , что если мы с помощью  $(n-1)$ -мерных плоскостей, параллельных граням  $A_i^-$ , разобьем  $Q$  на  $m^n$  равных параллелепипедов  $Q_k$ , то для каждого  $k$  будет выполняться неравенство  $\text{diam}(Q_k) < \zeta$ .

Возьмем какой-либо параллелепипед  $Q_k$ ; пусть  $B_{ki}^-$  и  $B_{ki}^+$  — его грани, соответствующие граням  $A_i^-$  и  $A_i^+$ . Пусть  $p_k, p_{ki}^-, p_{ki}^+$  — центры параллелепипедов  $Q_k, B_{ki}^-$  и  $B_{ki}^+$  соответственно. Определим векторы  $v'_i$  условием

$$p_{ki}^+ - p_{ki}^- = v'_i = \frac{v_i}{m}.$$

В силу § 1 и теоремы (I, 9A)

$$\{Q_k\} = v'_1 \vee \dots \vee v'_n, \quad \{B_{ki}^-\} = \{B_{ki}^+\} = \beta_i = v'_1 \vee \dots \vee \hat{v}'_i \dots \vee v'_n.$$

Применяя теорему о конечном приращении к функции  $\omega(p) \cdot \beta_i$  на отрезке  $p_{ki}^- p_{ki}^+$  [или, что то же самое, пользуясь формулой (II, 1.3) и непрерывностью производной  $\nabla_{v'_i} \omega$ ], находим точку  $p_{ki}^*$  на этом отрезке, для которой

$$\omega(p_{ki}^+) \cdot \{B_{ki}^+\} - \omega(p_{ki}^-) \cdot \{B_{ki}^-\} = \nabla_{v'_i} \omega(p_{ki}^*) \cdot \beta_i.$$

Поэтому, сокращая запись  $\xi(p_k) \cdot \{Q_k\}$  до  $\xi \circ Q_k$  и т. д., на основании (II, 8.1) и (I, 12.16) мы получаем

$$\begin{aligned} |d\omega \circ Q_k - \omega \circ \partial Q_k| &= \left| \sum_i (-1)^{i-1} [\nabla_{v'_i} \omega(p_k) - \nabla_{v'_i} \omega(p_{ki}^*)] \cdot \beta_i \right| \leq \\ &\leq \sum_i \varepsilon |v'_i| |\beta_i| \leq n\varepsilon \frac{|v_1| \dots |v_n|}{m^n}. \end{aligned}$$

Далее,  $\sum Q_k$  есть подразделение параллелепипеда  $Q$  и, если через  $B'_j$  обозначить те должным образом ориентированные грани параллелепипедов  $Q_k$ , которые лежат в  $\partial Q$ , то  $\sum B'_j$  будет подразделением границы  $\partial Q$ . В силу выбора числа  $\zeta$  и леммы 4а

$$\begin{aligned} \left| \int_Q d\omega - d\omega \circ \sum Q_k \right| &\leq \varepsilon |Q|, \\ \left| \int_{\partial Q} \omega - \omega \circ \sum B'_j \right| &\leq \varepsilon |\partial Q|. \end{aligned}$$

Кроме того,  $\omega \circ \sum B'_j = \omega \circ \sum \partial Q_k$ , и по доказанному выше неравенству

$$|d\omega \circ \sum Q_k - \omega \circ \sum B'_j| \leq n\varepsilon |v_1| \dots |v_n|.$$

Эти неравенства дают

$$\left| \int_Q d\omega - \int_{\partial Q} \omega \right| \leq \varepsilon [ |Q| + |\partial Q| + n |v_1| \dots |v_n| ].$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  отсюда следует формула (1).

**12. Частный случай теоремы Стокса.** Мы распространим лемму 11а в двух направлениях: рассмотрим область с одной кривой, а не плоской гранью и не будем требовать, чтобы форма  $\omega$  была гладкой на этой грани. Однако мы будем предполагать, что  $\omega$  обращается в нуль на остальных гранях. Ниже в доказательстве теорем 14А и 18А никакие другие случаи теоремы Стокса не потребуются.

Пусть  $h(x^2, \dots, x^n)$  — гладкая функция, определенная при  $-2 < x^i < 2$  ( $i = 2, \dots, n$ ) и удовлетворяющая условию  $-1/2 < h(x^2, \dots, x^n) < 1/2$ . Пусть, далее,  $R$  — область в  $\mathbb{R}^n$ , определяемая неравенствами

$$h(x^2, \dots, x^n) < x^1 < 1, \quad -1 < x^i < 1 \quad (i = 2, \dots, n).$$

Пусть, наконец,  $A$  — грань, на которой  $x^1 = h(x^2, \dots, x^n)$ , а  $B$  — сумма всех остальных граней, причем  $A$  и  $B$  ориентиро-

ваны так, что  $\partial R = A \cup B$  для некоторой фиксированной ориентации области  $R$  (П. II, 5).

Лемма 12а. Пусть область  $R$  определена, как указано выше. Пусть  $\omega$  — непрерывная  $(n-1)$ -форма в  $\bar{R}$ , удовлетворяющая следующим условиям: форма  $\omega$  является гладкой в  $R$ , форма  $d\omega$  суммируема в  $R$  и  $\omega = 0$  в некоторой окрестности замкнутого множества  $B$ . Тогда

$$(1) \quad \int_A \omega = \int_R d\omega.$$

Замечание. Вместо предположения о гладкости формы  $\omega$  в  $R$  мы могли бы просто предположить, что форма  $\omega$  в  $R$  регулярна; см. ниже § 16. Доказательство при этом слегка упростилось бы, так как мы могли бы в этом случае заменить определенные ниже функции  $h_k(x^2, \dots)$  функциями  $h(x^2, \dots) + 1/k$ .

Пусть  $R'$  — область, определяемая неравенствами

$$0 < x^1 < 2, \quad -1 < x^i < 1 \quad (i = 2, \dots, n).$$

Мы аппроксимируем область  $R$  областями  $R_k$ , в которых форма  $\omega$  является гладкой, и сравним каждую область  $R_k$  с  $R'$ .

Пусть  $h_k(x^2, \dots, x^n)$  для каждого натурального числа  $k$  — некоторая 2-гладкая функция, аппроксимирующая функцию  $h(x^2, \dots, x^n) + 1/k$  вместе с ее первыми частными производными с погрешностью  $< 1/k$  на множестве  $-1 \leq x^i \leq 1$  ( $i \geq 2$ ) (П. III, лемма 4а). Пусть  $R_k$  — область, определяемая неравенствами

$$h_k(x^2, \dots, x^n) < x^1 < h_k(x^2, \dots, x^n) + 2, \quad -1 < x^i < 1 \\ (i = 2, \dots, n).$$

Положим  $\omega = 0$  на множестве  $\bar{R}_k \setminus R$ ; теперь форма  $\omega$  является гладкой в  $\bar{R}_k$ . Положим

$$(2) \quad f_k(x^1, x^2, \dots, x^n) = (x^1 + h_k(x^2, \dots, x^n), x^2, \dots, x^n) \text{ в } \bar{R}';$$

это — взаимно однозначное регулярное 2-гладкое отображение множества  $\bar{R}'$  на  $\bar{R}_k$ . Пусть  $A', A_k$  — грани областей  $R', R_k$ , соответствующие грани  $A$  области  $R$ . Так как отображение  $f_k$  является 2-гладким, а форма  $\omega$  гладка в  $R$ , то формула (II, 8.8) показывает, что  $df_k^* \omega = f_k^* d\omega$  в  $R'$ . Кроме того, и форма  $f_k^* \omega$  гладка в  $\bar{R}'$ . Поэтому в силу леммы 11а и теоремы 7А

$$\int_{A'} f_k^* \omega = \int_{\partial R'} f_k^* \omega = \int_{R'} df_k^* \omega = \int_{R'} f_k^* d\omega = \int_{R_k} d\omega.$$

Пусть теперь  $k \rightarrow \infty$ . Так как форма  $d\omega$  суммируема в  $R$ , то

$$\int_{R_k} d\omega \rightarrow \int_R d\omega.$$

Определим отображение  $f$ , как и  $f_k$  в (2), заменив только  $h_k$  на  $h$ . Это отображение мы будем рассматривать лишь в  $A'$ . Тогда  $f_k \rightarrow f$  и  $\nabla f_k \rightarrow \nabla f$  при  $k \rightarrow \infty$ , причем в обоих случаях сходимость равномерная. Поэтому

$f_k^* \omega(p) \cdot \alpha = \omega(f_k(p)) \cdot \nabla f_k(p, \alpha) \rightarrow \omega(f(p)) \cdot \nabla f(p, \alpha) = f^* \omega(p) \cdot \alpha$  равномерно в  $A'$ . Следовательно, по теореме 10А

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A'} f_k^* \omega = \int_{A'} f^* \omega = \int_A \omega.$$

Эти соотношения доказывают формулу (1).

**13. Множества нулевой  $s$ -протяженности.** Мы введем понятие, которое в каком-то смысле выражает малость  $s$ -мерного объема некоторого множества. В качестве настоящей меры  $s$ -мерного объема следует пользоваться хаусдорфовой мерой (см. Сакс, стр. 84, Халмош, стр. 58); но с вводимым здесь понятием проще обращаться, и оно достаточно для наших целей.

Пусть  $Q$  подмножество пространства  $E^n$  (или любого метрического пространства). Мы говорим, что  $Q$  имеет нулевую  $s$ -протяженность, если выполняется следующее. Для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\zeta_0 > 0$ , что для любого  $\zeta \leq \zeta_0$  существуют такие множества  $Q_1, \dots, Q_k$  ( $k$  — некоторое число), что

$$(1) \quad Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_k, \quad \text{diam}(Q_i) < \zeta \text{ для всех } i, \quad k\zeta^s < \varepsilon.$$

Заметим, что множество  $Q$  должно быть ограниченным. Очевидно, объединение конечного множества множеств нулевой  $s$ -протяженности имеет нулевую  $s$ -протяженность.

**Лемма 13а.** Любое ограниченное подмножество  $Q$  пространства  $E^{s-1}$  имеет нулевую  $s$ -протяженность. Если  $f$  — липшицевское отображение (II, 4) множества  $Q$  в пространство  $E^n$ , то  $f(Q)$  имеет нулевую  $s$ -протяженность.

Чтобы доказать второе утверждение (из которого следует первое), возьмем куб  $Q'$  диаметра  $\delta$ , содержащий  $Q$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  пусть  $\zeta_0$  — наименьшее из чисел  $\varepsilon/2^s \mathfrak{L}_f^{s-1} \delta^{s-1}$ ,  $\mathfrak{L}_f \delta$ . Возьмем теперь любое  $\zeta < \zeta_0$ . Существует такое целое число  $m \geq 0$ , что

$$\frac{\mathfrak{L}_f \delta}{2^m} \leq \zeta < \frac{\mathfrak{L}_f \delta}{2^{m-1}}.$$

Разобьем куб  $Q'$  на  $2^{(s-1)m}$  равных кубов; каждый из них имеет диаметр<sup>1)</sup>  $\delta/2^m \leq \zeta/\mathfrak{L}_f$ . Эти кубы разбивают множество  $Q$  на куски  $Q_1, \dots, Q_k$  диаметра  $\leq \zeta/\mathfrak{L}_f$ , причем  $k \leq 2^{(s-1)m}$ . Теперь

$$f(Q) = f(Q_1) \cup \dots \cup f(Q_k), \quad \text{diam}(f(Q_i)) \leq \zeta,$$

$$k\zeta^s < 2^{(s-1)m} \left( \frac{\mathfrak{L}_f \delta}{2^{m-1}} \right)^s \leq 2^s \mathfrak{L}_f^{s-1} \delta^{s-1} \zeta \leq \epsilon,$$

что и завершает доказательство.

Следующая лемма представляет интерес, но в дальнейшем она нам не понадобится.

*Лемма 13b. Ограниченное замкнутое подмножество  $Q$  пространства  $E^n$  имеет нулевую  $n$ -протяженность в том и только в том случае, если оно имеет лебегову меру нуль.*

Если  $Q$  имеет лебегову меру нуль, то оно может быть покрыто конечным множеством прямоугольных параллелепипедов сколь угодно малого общего объема; отсюда легко следует, что  $Q$  имеет нулевую  $n$ -протяженность. Обратное очевидно.

В оставшейся части этого параграфа мы будем пользоваться подразделением данного открытого множества  $R \subset E^n$  на кубы, которое строится следующим образом. Возьмем разбиение пространства  $E^n$  на кубы с ребром 1 и поэтому диаметра  $n^{1/2}$ . Пусть  $K'_0$  — это множество кубов, и пусть  $K_0$  — его подмножество, состоящее из тех кубов, которые содержатся в  $R$  и расстояние которых от  $E^n \setminus R$  не менее  $3n^{1/2}$ . Если уже определены множества кубов  $K'_0, K_0, \dots, K'_m, K_m$ , то разобьем каждый куб, входящий в  $K'_m \setminus K_m$ , на  $2^n$  равных кубов и обозначим через  $K'_{m+1}$  полученное множество кубов, через  $K_{m+1}$  его подмножество, состоящее из тех кубов, расстояние которых от множества  $E^n \setminus R$  не менее  $3n^{1/2}/2^{m+1}$ . Кубы из  $K_0, K_1, \dots$  покрывают множество  $R$ .

Каждый куб  $C$  из множества  $K_m$  имеет ребро  $1/2^m$  и диаметр  $n^{1/2}/2^m$ ; он лежит в  $R$  и

$$(2) \quad 3n^{1/2}/2^m \leq \rho(C, E^n \setminus R) < 7n^{1/2}/2^m \quad (m > 0).$$

Чтобы доказать последнее неравенство, допустим, что куб  $C$  образован при подразделении куба  $C'$  с ребром  $1/2^{m-1}$ , содержащимся в множестве  $K'_{m-1} \setminus K_{m-1}$ . Так как  $C'$  не содержится в  $K_{m-1}$ ,

1) Очевидно, можно предполагать, что  $\mathfrak{L}_f \neq 0$ . — Прим. ред.

то  $\rho(C', E^n \setminus R) < 3n^{1/2}/2^{m-1}$ . Но  $C' \subset \bar{U}_h(C)$ , где  $h = n^{1/2}/2^m$ ; поэтому

$$\rho(C, E^n \setminus R) < \frac{3n^{1/2}}{2^{m-1}} + \frac{n^{1/2}}{2^m} = \frac{7n^{1/2}}{2^m}.$$

Докажем, что

$$(3) \quad \rho(K_{m-1}, K_{m+1}) \geq \frac{2n^{1/2}}{2^m}.$$

Для любого куба  $C$ , входящего в  $K_{m+1}$ ,  $\rho(C, E^n \setminus R) < 7n^{1/2}/2^{m+1}$  и  $\text{diam}(C) = n^{1/2}/2^{m+1}$ ; поэтому  $K_{m+1} \subset U_h(E^n \setminus R)$ , где  $h = 4n^{1/2}/2^m$ . Далее, для кубов  $C'$  из множества  $K_{m-1}$  имеем  $\rho(C', E^n \setminus R) \geq 6n^{1/2}/2^m$ , и неравенство (3) доказано.

**Лемма 13с.** Пусть  $R$  — открытое множество в  $E^n$ , подразделенное указанным выше образом. Пусть множество  $Q \subset E^n \setminus R$  имеет нулевую  $s$ -протяженность. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует целое число  $m_0 \geq 0$ , обладающее следующим свойством. Возьмем любое  $m \geq m_0$ , и пусть  $N$  — число кубов из  $K_m$ , расстояние которых от  $Q$  не превосходит  $7n^{1/2}/2^m$ . Тогда  $N \leq 2^{sm\varepsilon}$ .

Положим  $a = 2 + 16n^{1/2}$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon/a^n$  и выберем  $\zeta_0$  так, чтобы при любом  $\zeta \leq \zeta_0$  выполнялось условие (1) с  $\varepsilon_1$  вместо  $\varepsilon$ . Выберем  $m_0$  так, чтобы было  $1/2^{m_0} < \zeta_0$ . Возьмем теперь любое  $m \geq m_0$ . Положим  $\zeta = 1/2^m$  и выберем множества  $Q_1, \dots, Q_k$ , для которых удовлетворяется условие (1) с  $\varepsilon_1$ . Пусть для каждого  $i$   $Q'_i$  — куб с ребром  $a/2^m$ , центром которого является некоторая точка из  $Q_i$ . Если куб  $C$  входит в  $K_m$ , то  $\text{diam}(C) = n^{1/2}/2^m$ ; поэтому, так как  $\text{diam}(Q_i) \leq \zeta = 1/2^m$ , то  $Q'_i$  содержит все такие кубы  $C$ , находящиеся от  $Q_i$  на расстоянии, не превышающем  $7n^{1/2}/2^m$ . Так как  $C$  имеет ребро  $1/2^m$ , то существует не более  $a^n$  таких кубов. Поэтому

$$N \leq a^n k < \frac{a^n \varepsilon_1}{\zeta^s} = 2^{sm\varepsilon}.$$

Определим в  $R$  разложение единицы, соответствующее рассматриваемому подразделению. Пусть  $C_1, C_2, \dots$  — кубы из всех  $K_m$ . Пусть для каждого  $i$   $C'_i$  есть куб, концентрический с  $C_i$  и имеющий ребра вдвое большей длины. Так как  $C'_i \subset U_h(C_i)$  (где  $h = n^{1/2}/2^m$ ), если  $C_i \in K_{m-1}$ , и аналогично для кубов из  $K_{m+1}$ , то неравенство (3) показывает, что

$$(4) \quad C'_i \cap C'_j = 0, \quad \text{если } C_i \in K_{m-1}, C_j \in K_{m+1}.$$

Пусть  $\Phi$  — бесконечно гладкая функция в  $\mathbb{R}^n$ , которая  $> 0$  в не-

котором кубе  $C$  и  $=0$  вне его (П. III, лемма 1b). Пользуясь аффинным отображением куба  $C$  на куб  $C'_i$ , получаем бесконечно гладкую функцию  $\varphi'_i$  в  $E^n$ , которая  $>0$  в кубе  $C'_i$  и  $=0$  вне его. Очевидно, для некоторого  $N_0$

$$|\nabla \varphi'_i| \leq 2^m N_0, \text{ если } C_i \in K_m.$$

Положим  $\varphi_i(p) = \varphi'_i(p) / \sum_k \varphi'_k(p)$  в  $R$ ; функция  $\varphi_i$  является бесконечно гладкой, она  $>0$  в кубе  $C'_i$  и  $=0$  вне его;  $\sum \varphi_i(p) = 1$  в  $R$ . Согласно (4), существует такое число  $c$ , что любая точка множества  $R$  содержится не более чем в  $c$  кубах  $C'_i$ . Следовательно, вблизи любой точки из  $R$  существует лишь конечное число комбинаций видов кубов. Это вместе с доказанным выше неравенством показывает, что существует такое число  $N_1$ , что

$$(5) \quad |\nabla \varphi_i| \leq 2^m N_1 \text{ в } R, \text{ если } C_i \in K_m.$$

**14. Теорема Стокса для стандартных областей.** В этом параграфе мы сформулируем теорему Стокса для областей в  $n$ -мерном пространстве, которые должны быть достаточно общими для всех обычных приложений; доказательство будет дано в следующем параграфе.

Под *стандартной областью* в  $n$ -мерном ориентированном пространстве  $E^n$  мы понимаем ограниченное связанное открытое множество  $R$ , обладающее следующими свойствами. Положим  $P^* \subset \bar{R} \setminus R$ . Существует замкнутое множество  $Q \subset P^*$  нулевой  $(n-1)$ -протяженности. Положим  $P = P^* \setminus Q$ . Для каждой точки  $p \in P$  существует такой единичный вектор  $v(p)$ , что если в  $E^n$  ось  $x^1$  идет в направлении вектора  $v(p)$ , то множество точек из  $P$ , лежащих в некоторой окрестности точки  $p$ , задается гладкой функцией  $x^1 = h(x^2, \dots, x^n)$ , а множество точек, принадлежащих  $R$  и лежащих в этой окрестности, задается неравенством  $x^1 < h(x^2, \dots, x^n)$ . Мы можем считать, что  $v(p)$  является внешней нормалью.

Так как топология множества  $P$  задается топологией окружающего пространства, то  $P$  сепарабельно; поэтому оно состоит из конечного или счетного множества гладких многообразий. Таким образом, стандартная область есть ограниченное связанное открытое множество, граница которого является объединением замкнутого множества нулевой  $(n-1)$ -протяженности и конечного или счетного множества гладких  $(n-1)$ -мерных многообразий, каждое из которых имеет рассматриваемое открытое множество только по одну сторону от себя.

В обычно встречающихся областях множество  $Q$  состоит из конечного множества многообразий размерности  $< n-1$ ; в силу леммы 13а и предшествующего ей замечания  $Q$  имеет нулевую  $(n-1)$ -протяженность, и, таким образом, в этом случае область будет стандартной. Мы могли бы включить в  $Q$  любое замкнутое подмножество множества  $P$ , имеющее  $(n-1)$ -мерную лебегову меру (в очевидном смысле), равную нулю; см. лемму 13b. (Мы не могли бы включить в  $Q$  большее множество; ср. ниже пример 2.)

Для каждой точки  $p \in P$  ориентация множества  $R$  и внешняя нормаль  $v(p)$  определяют ориентацию множества  $P$  вблизи  $p$  (П. II, 5). Таким образом,  $P$  становится множеством ориентированных многообразий.

**Теорема 14A<sup>1)</sup>.** Пусть  $R$  — стандартная область в  $E^n$ , и пусть  $\omega$  — такая  $(n-1)$ -форма, что

(а)  $\omega$  определена, непрерывна и ограничена в  $\bar{R} \setminus Q$  и гладка в  $R$ .

(б)  $\omega$  суммируема в  $P$ ,

(с) внешний дифференциал  $d\omega$  суммируем в  $R$ .

Тогда

$$(1) \quad \int_P \omega = \int_R d\omega.$$

**Замечания.** Мы могли бы предполагать, что форма  $\omega$  только регулярна, а не гладка в  $R$ ; см. ниже § 16 и теорему 18A. Если внешний дифференциал  $d\omega$  ограничен, то условие (с) выполняется автоматически. В обычных приложениях  $P$  будет иметь конечный  $(n-1)$ -мерный объем (определяемый с помощью интегрирования; нам нет необходимости уточнять это здесь); тогда условие (б) будет автоматически выполняться.

**Пример 1.** Как мы сейчас покажем, мы не можем отбросить предположение о том, что форма  $\omega$  ограничена. Пусть  $R$  — квадрат  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$  на плоскости и  $Q$  — множество, состоящее из его четырех вершин. Для каждой точки  $p \in \bar{R} \setminus Q$  пусть  $\theta(p)$  — ее полярный угол,  $0 \leq \theta(p) \leq \pi/2$ . Положим  $\omega(p) = \nabla \theta(p)$ . Тогда все условия выполнены с тем лишь исключением, что форма  $\omega(p)$  неограничена. Очевидно,  $d\omega = 0$  в  $R$ ,  $\int_P \omega = \pi/2$ ,

так что формула (1) неверна.

<sup>1)</sup> Весьма общая теорема была доказана Федерером [Federer H., The Gauss — Green Theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 58 (1945), 44—76].

Пример 2. Если мы чрезмерно ослабим предположения относительно множества  $Q$ , то теорема может оказаться неверной. Чтобы это показать, возьмем область  $R$  такой же, как и выше. На нижней стороне  $A$  следующим образом зададим множество  $Q_0$ . Выбросим открытый интервал длины  $1/4$  в середине стороны  $A$ . Затем выбросим средние интервалы длины  $1/4^2$  на каждой из двух оставшихся частей. Затем выбросим средние интервалы длины  $1/4^3$  на каждой из четырех оставшихся частей и т. д. Тогда через  $Q_0$  обозначим множество оставшихся точек, а через  $Q$  — множество  $Q_0$  вместе с остальными вершинами квадрата  $R$ . (Очевидно, мы могли бы в качестве  $Q_0$  взять любое замкнутое множество положительной лебеговой меры; ср. лемму 13b.)

Пусть  $\varphi$  — такая действительная функция, гладкая в  $\bar{R} \setminus Q_0$ , что

$$\varphi(x, y) = 1, \quad \text{если } (x, 0) \in Q_0, \quad \varphi(p) = 0 \text{ в } A \setminus Q_0,$$

$$0 \leq \varphi(p) \leq 1, \quad \frac{\partial \varphi(p)}{\partial y} \geq 0.$$

Мы можем построить  $\varphi$  следующим образом. Для каждого смежного интервала  $H_i = p_i p'_i$  множества  $A \setminus Q_0$  пусть  $q_i(t)$  — точка, находящаяся на расстоянии  $t |p'_i - p_i|$  над центром интервала  $H_i$ . Пусть  $C_i(t)$  — лежащая в  $R$  часть параболы, проходящей через точки  $p_i$ ,  $q_i(t)$  и  $p'_i$  ( $0 < t \leq 1$ ). Пусть  $\chi(t) = 2t - t^2$ ; положим  $\varphi(p) = \chi(t)$  на дуге  $C_i(t)$  (для всех  $i$ ),  $\varphi(p) = 0$  в  $A \setminus Q_0$  и  $\varphi(p) = 1$  во всех остальных точках множества  $\bar{R} \setminus Q$ .

Определим форму  $\omega$  в  $\bar{R} \setminus Q$  ее компонентами

$$\omega_1(p) = -\varphi(p), \quad \omega_2(p) = 0.$$

Тогда условия (а) и (b) теоремы 14А, очевидно, выполняются. Если  $R_h$  — часть квадрата  $R$ , для которой  $y > h$ , с верхней стороной  $B$  и нижней стороной  $A_h$ , то

$$\int_{R_h} d\omega = \int_{A_h} \omega - \int_B \omega, \quad \left| \int_{A_h} \omega \right| = \left| \int_0^1 \varphi(x, h) dx \right| \leq 1,$$

и поэтому интеграл  $\int_{R_h} d\omega$  ограничен. Далее,  $(d\omega)_{12}(p) = -\partial \omega_1(p) / \partial y \geq 0$ , следовательно, очевидно выполняется условие (с).

Возьмем любые  $h \geq 0$ ,  $\varepsilon > 0$ . Так как  $\varphi(x, 0) = 1$ , если  $(x, 0) \in Q_0$ , то  $\varphi(x, h) \geq 1 - \varepsilon$  всюду, за исключением конечного

числа открытых интервалов общей длины  $< \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i/4^{i+1}} = 1/2$ ; поэтому

$$\int_0^1 \varphi(x, h) dh \geq \frac{1}{2}, \quad \text{если } h > 0.$$

Так как  $\omega = 0$  в  $A \setminus Q_0$ , то<sup>1)</sup>

$$\int_R d\omega - \int_P \omega = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{R_h} d\omega + \int_B \omega = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{A_h} \omega \leq -\frac{1}{2},$$

и формула (1) неверна.

**15. Доказательство теоремы.** Возьмем  $R, P, Q, \omega$ , как в теореме 14А. Мы будем говорить, что форма  $\omega$  *Q-свободна*, если  $\omega = 0$  в некоторой окрестности множества  $Q$ . Мы докажем теорему сначала в том случае, когда форма  $\omega$  *Q-свободна*, а затем перейдем к общему случаю.

Допустим, что  $\omega$  *Q-свободна*; пусть, скажем,  $\omega = 0$  в  $U \cap \bar{R}$ , где  $Q \subset U$ . Выберем следующим образом кубы с центрами в точках множества  $\tilde{R} = \bar{R} \setminus U$ . Для каждой точки  $p \in R \cap \tilde{R}$  пусть  $U(p)$  и  $U'(p)$  — такие концентрические кубы с центром в  $p$ , что  $U(p) \subset U'(p) \subset R$ . Для каждой точки  $p \in P \cap \tilde{R}$  пусть  $v(p)$  — внешняя нормаль в  $p$ , и пусть  $U(p) \subset U'(p)$  — концентрические кубы с центром  $p$ , одна грань которых перпендикулярна к  $v(p)$ ; если эти кубы достаточно малы, то можем выбрать в  $E^n$  прямоугольные координаты так, чтобы область  $U'(p) \cap R$  была как раз областью  $R$  из § 12. Можно выбрать конечное число кубов  $U(p)$ , покрывающих все множество  $\tilde{R}$ ; пусть это будут кубы  $U_1, \dots, U_k$ ; концентрические им кубы обозначим через  $U'_1, \dots, U'_k$ . Пусть  $\varphi'_i(p)$  — бесконечно гладкая неотрицательная функция в  $E^n$ , которая  $> 0$  в  $\bar{U}_i$  и  $= 0$  в некоторой окрестности множества  $E^n \setminus U'_i$  (П. III, лемма 1b). Положим  $\varphi_i(p) = \varphi'_i(p) / \sum_j \varphi'_j(p)$  там, где эти функции определены. Тогда функции  $\varphi_i$  бесконечно гладки в некоторой окрестности  $U^*$  множества  $\tilde{R}$  и  $\sum \varphi_i(p) = 1$  в  $\tilde{R}$ . Положим

$$(1) \quad \omega_i(p) = \varphi_i(p) \omega(p) \text{ в } \tilde{R}, \quad \omega_i(p) = 0 \text{ в } E^n \setminus \tilde{R}.$$

Рассмотрим любую форму  $\omega_i$ ; сначала предположим, что  $U_i$  — куб с центром в некоторой точке множества  $P$ . Так как  $\nabla \varphi_i$  и  $\omega$

<sup>1)</sup> Здесь  $P = P^* \setminus Q$ ; см. начало параграфа. — Прим. ред.

ограничены, то форма  $\nabla\varphi_i \vee \omega$  суммируема в  $R \cap U'_i$ ; в силу леммы 6с это же верно и для формы  $\varphi_i d\omega$ . В силу (II, 8.6) и (II, 8.2)

$$(2) \quad d\omega_i = \nabla\varphi_i \vee \omega + \varphi_i d\omega;$$

таким образом, внешний дифференциал  $d\omega_i$  суммируем в  $R \cap U_i$ , и мы можем применить лемму 12а, которая дает

$$\int_P \omega_i = \int_{P \cap U'_i} \omega_i = \int_{R \cap U'_i} d\omega_i = \int_R d\omega_i.$$

Если  $U'_i \subset R$ , то по лемме 11а

$$\int_R d\omega_i = \int_{U'_i} d\omega_i = \int_{\partial U'_i} \omega_i = 0 = \int_P \omega_i.$$

Так как  $\sum \omega_i = \omega$ , то, складывая эти соотношения, мы получаем

$$\int_P \omega = \sum_i \int_P \omega_i = \sum_i \int_R d\omega_i = \int_R d\omega.$$

Рассмотрим теперь общий случай. Возьмем разбиение открытого множества  $E^n \setminus Q$  (не множества  $R$ ) на кубы и соответствующие функции  $\varphi_i$ , как в § 13. Для каждого целого числа  $m > 0$  положим

$$(3) \quad \psi_m(p) = \sum_i^{(m)} \varphi_i(p), \quad \psi'_m(p) = 1 - \psi_m(p) \quad \text{в } E^n \setminus Q,$$

где сумма берется по всем таким  $i$ , для которых  $C_i \in K_m$ , при некотором  $m' \leq m - 1$ . Положим

$$(4) \quad \omega_m = \psi_m \omega, \quad \omega'_m = \psi'_m \omega = \omega - \omega_m \quad \text{в } \bar{R} \setminus Q.$$

Тогда форма  $\omega_m$  является  $Q$ -свободной. Так как функция  $\psi_m$  и форма  $\omega$  ограничены, то будет ограничена и форма  $\omega_m$ ; так как, далее,  $\omega_m = 0$  вне компактного подмножества множества  $P$ , то форма  $\omega_m$  суммируема в  $P$ . Пользуясь формулой (2) для  $d\omega_m$  и ограниченностью формы  $\nabla\psi_i$ , мы видим, что внешний дифференциал  $d\omega_m$  суммируем в  $R$ . Поэтому мы можем применить к  $\omega_m$  нашу теорему, и она дает  $\int_P \omega_m = \int_R d\omega_m$ . Мы покажем, что

$$(5) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_P \omega_m = \int_P \omega, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_R d\omega_m = \int_R d\omega,$$

что и завершит доказательство.

Если множество  $P$  имеет конечный  $(n-1)$ -мерный объем, то первое из равенств (5) очевидно. В общем случае применяется метод доказательства леммы 6а (см. также лемму 6с и § 10).

Мы докажем теперь второе из равенств (5). Пусть  $H'_m$  — объединение всех кубов  $C'_i$ , для которых  $C_i \in K_{m'}$  при некотором  $m' \geq m$ ; положим  $H_m = H'_m \cap R$ . Тогда <sup>1)</sup> в силу (4), (3) и (13.4)

$$(6) \quad \omega'_m = 0 \text{ в } R \setminus H_m, \quad \omega'_m = \omega \text{ в } H_{m+1}.$$

Возьмем любое  $\varepsilon > 0$ . Так как внешний дифференциал  $d\omega$  суммируем в  $R$ , то мы можем выбрать  $m_0$  так, чтобы (см. лемму 6b)

$$(7) \quad \int_{H_{m_0}} |d\omega| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Каждая точка множества  $R$  принадлежит не более чем  $b$  кубам  $C'_i$ , где  $b$  — некоторое фиксированное число. Пусть  $|\omega| \leq N$  в  $R$ . Положим  $\varepsilon_1 = \varepsilon / (2^n b N_1 N)$ , где  $N_1$  — число, определенное, как в (13.5). По лемме 13с найдется такое число  $m_1 \geq m_0$ , что если  $m \geq m_1$ , то в  $K_m$  существует не более  $2^{(n-1)m} \varepsilon_1$  кубов. Так как множество  $H_m^* = H_m \setminus H_{m+1}$  покрывается кубами  $C'_i$ , для которых  $C_i \in K_m$  и  $|C'_i| = 1/2^{(m-1)n}$ , то мы имеем

$$(8) \quad |H_m^*| \leq \frac{2^{(n-1)m} \varepsilon_1}{2^{(m-1)n}} = 2^{n-m} \varepsilon_1, \quad \text{если } m \geq m_1.$$

Для любой точки  $p \in R$  сумма в (3) содержит не более  $b$  отличных от нуля членов. Поэтому в силу (13.5)  $|\nabla \psi'_m| \leq 2^{m-1} b N_1$  и, если  $m \geq m_1$  то

$$(9) \quad \int_{H_m^*} |\nabla \psi'_m \vee \omega| \leq 2^{m-1} b N_1 \cdot N \cdot 2^{n-m} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как  $|\psi'_m| \leq 1$ , то неравенство (7) дает

$$(10) \quad \int_{H_m^*} |\psi'_m d\omega| + \int_{H_{m+1}} |d\omega| \leq \int_{H_m} |d\omega| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

<sup>1)</sup> Первое соотношение в (6) ошибочно: должно быть  $\omega'_m = 0$  в  $R \setminus H_{m-1}$ . Поэтому ниже [см. соотношение, следующее за формулой (10)] оценка также некорректна. Нетрудно, однако, уточнить эту оценку (тем же методом), что и даст полное доказательство второго из равенств (5). — Прим. ред.

Поэтому [см. (2)] из (6), (9) и (10) получаем

$$\int_R |d\omega'_m| = \int_{H_m^*} |\nabla \psi'_m \vee \omega + \psi'_m d\omega| + \int_{H_{m+1}} |d\omega| < \varepsilon$$

при  $m \geq m_1$ , что завершает доказательство равенств (5) и, следовательно, теоремы 14А.

**16. Регулярные формы в евклидовом пространстве.** Так как определение  $r$ -формы  $\omega$  ( $r > 0$ ) на многообразии  $M$  требует его гладкости, а определение внешнего дифференциала  $d\omega$  требует 2-гладкости, то изучение форм на многообразиях в (II, 12) относится только к 2-гладким многообразиям. Чтобы получить аналогичную теорию для гладких многообразий, мы расширим определение внешнего дифференциала  $d\omega$ ; это определение принадлежит Э. Картану<sup>1)</sup>.

Нам понадобится лемма, показывающая, что непрерывная форма определяется интегралом от нее по симплексам (с таким же успехом мы могли бы пользоваться и параллелепипедами).

*Лемма 16а. Пусть  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — непрерывные  $r$ -формы в открытом множестве  $R$ , и пусть  $\int_{\sigma} \omega_1 = \int_{\sigma} \omega_2$  для всех ориентированных симплексов  $\sigma$  в  $R$ . Тогда  $\omega_1 = \omega_2$ .*

Возьмем любую точку  $p \in R$  и любое  $r$ -направление  $\alpha$ . Существует такая последовательность ориентированных симплексов  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  в  $R$  с  $r$ -направлениями  $\alpha = \{\sigma_i\} / |\sigma_i|$ , что  $\sigma_i \in U_{\zeta_i}(p)$ ,  $\zeta_i \rightarrow 0$ . В силу (4.1) и (4.4) для любой непрерывной  $r$ -формы  $\omega$

$$\frac{1}{|\sigma_i|} \int_{\sigma_i} \omega - \omega(p) \cdot \alpha = \frac{1}{|\sigma_i|} \int_{\sigma_i} [\omega(q) - \omega(p)] dq \rightarrow 0;$$

поэтому

$$(1) \quad \omega(p) \cdot \alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{|\sigma_i|} \int_{\sigma_i} \omega.$$

Применяя это к  $\omega_1$  и к  $\omega_2$ , мы видим, что  $\omega_1(p) \cdot \alpha = \omega_2(p) \cdot \alpha$  для всех  $r$ -направлений  $\alpha$ ; следовательно,  $\omega_1 = \omega_2$ .

<sup>1)</sup> См. Папу Г., *Formes différentielles extérieures ...*, *Bull. Soc. Math. Belgique*, 1953, 62—69 (1954) и ссылки, имеющиеся там. Мы следуем методу, предложенному А. Картаном в Записках лекций, прочитанных в Гарвардском университете в 1948 г.

Некоторая  $r$ -форма  $\omega$  в открытом множестве  $R \subset E^n$  называется *регулярной*, если она непрерывна в  $R$  и если в  $R$  существует такая непрерывная  $(r+1)$ -форма  $\omega'$ , что

$$(2) \quad \int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} \omega' \quad \text{для всех } (r+1)\text{-мерных симплексов } \sigma \subset R$$

(мы могли бы пользоваться параллелепипедами). Тогда в силу леммы 16а  $(r+1)$ -форма  $\omega'$  однозначно определена; мы называем ее *производной* формой  $d\omega$  формы  $\omega$ . Заметим, что равенство (2) достаточно доказать в некоторой окрестности каждой точки множества  $R$ . Можно было бы дать определение регулярности, не пользуясь интегралами; см. ниже лемму 16d.

Если  $r$ -форма  $\omega$  регулярна, то и производная форма  $d\omega$  регулярна, и  $dd\omega = 0$ . В самом деле, если  $\sigma$  — некоторый  $(r+2)$ -мерный симплекс, то  $\int_{\partial\sigma} d\omega = \int_{\partial\partial\sigma} \omega = 0$ .

Если форма  $\omega$  гладкая, то равенство (2) имеет место для формы  $\omega' = d\omega$ , определенной, как ранее; поэтому гладкие формы регулярны и новое определение формы  $d\omega$  является распространением определения, данного ранее.

При  $r > 0$  регулярная  $r$ -форма  $\omega$  не обязана быть гладкой. Например, при  $n=2$ ,  $r=1$  положим  $\omega = \omega_1(x^1)e^1 + \omega_2(x^2)e^2$ , где  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  — действительные функции, непрерывные, но не дифференцируемые. Тогда  $d\omega = 0$ . Вообще, если форма  $\omega$  гладкая, но не 2-гладкая, то производная форма  $d\omega$  является регулярной, но не гладкой.

При  $r=0$  регулярная форма всегда является гладкой. Чтобы это показать, возьмем произвольную точку  $p$  и вектор  $v \neq 0$ . Положим  $p_t = p + tv$ . Применяя формулу (2) при  $\sigma = pp_t$  и пользуясь равенством (1), получаем

$$\nabla_v \omega(p) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\omega(p_t) - \omega(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \int_{pp_t} \omega' = \omega'(p) \cdot v.$$

Это произведение линейно относительно  $v$  и непрерывно по  $p$ , откуда следует, что форма  $\omega$  гладкая.

Чтобы установить различные свойства регулярных форм  $\omega$ , мы сгладим их, беря средние  $A_t \omega$ , как в (П. III, 3). Напомним, что для произвольного множества  $R$   $R_\lambda$  есть множество таких точек  $p$ , для которых  $\bar{U}_\lambda(p) \subset R$ , и что

$$(3) \quad A_t \omega(p) = \int_{E^n} \chi'_t(q-p) \omega(q) dq = \int_{V^n} \chi'_t(v) \omega(p+v) dv$$

определено в  $R_{1/l}$ , если форма  $\omega$  определена в  $R$ . Кроме того, среднее  $A_l \omega$  является бесконечно гладким. Так как форма  $\omega$  непрерывна, то лемма (П. III, 3а) показывает, что

$$(4) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} A_l \omega = \omega \quad \text{р. к. м.,}$$

где буквы „р. к. м.“ означают „равномерно на компактных множествах“.

Лемма 16b. Если  $r$ -форма  $\omega$  регулярна в  $R$ , то

$$(5) \quad A_l d\omega = dA_l \omega \quad \text{в } R_{1/l}.$$

Для любого  $(r+1)$ -мерного симплекса  $\sigma$  в  $R_{1/l}$  мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} A_l d\omega(p) dp &= \int_{\sigma} \int_V \kappa'_i(v) d\omega(p+v) dv dp = \\ &= \int_V \kappa'_i(v) \int_{\sigma} d\omega(p+v) dp dv = \int_V \kappa'_i(v) \int_{\partial\sigma} \omega(p+v) dp dv = \\ &= \int_{\partial\sigma} \int_V \kappa'_i(v) \omega(p+v) dv dp = \int_{\partial\sigma} A_l \omega(p) dp = \int_{\sigma} dA_l \omega(p) dp, \end{aligned}$$

и равенство (5) следует из леммы 16а.

Лемма 16с. Если формы  $\omega_1, \omega_2, \dots$  регулярны и

$$(6) \quad \lim \omega_l = \omega, \quad \lim d\omega_l = \omega', \quad \text{и то и другое р. к. м.,}$$

то форма  $\omega$  регулярна и  $d\omega = \omega'$ .

Ввиду предположения о том, что сходимость р. к. м., формы  $\omega$  и  $\omega'$  непрерывны. Остается доказать равенство (2); мы имеем

$$\int_{\sigma} \omega' = \lim \int_{\sigma} d\omega_l = \lim \int_{\partial\sigma} \omega_l = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

Лемма 16d. Форма  $\omega$  регулярна и  $d\omega = \omega'$  в том и только в том случае, если существует такая последовательность  $\omega_1, \omega_2, \dots$  гладких форм, что  $\lim \omega_l = \omega$  и  $\lim d\omega_l = \omega'$  р. к. м.

Это следует из (4), (5) и предыдущей леммы.

Теорема 16А. Если формы  $\omega$  и  $\xi$  регулярны в  $R$ , то регулярна в  $R$  и форма  $\omega \vee \xi$ , и при этом производная форма  $d(\omega \vee \xi)$  задается формулой (II, 8.6). В частности, если  $\varphi$  — гладкая функция, а  $\omega$  — регулярная форма, то форма  $\varphi \omega$  регулярна.

В самом деле,

$$\lim (A_i \omega \vee A_i \xi) = \lim A_i \omega \vee \lim A_i \xi = \omega \vee \xi;$$

кроме того,  $\lim dA_i \omega = \lim A_i d\omega = d\omega$  и т. д., и поэтому

$$\begin{aligned} \lim d(A_i \omega \vee A_i \xi) &= \lim (dA_i \omega \vee A_i \xi \pm A_i \omega \vee dA_i \xi) = \\ &= d\omega \vee \xi \pm \omega \vee d\xi. \end{aligned}$$

Каждая точка  $p$  имеет такую окрестность  $U$ , что для некоторого  $i_0$   $U \subset R_{1/i}$  при  $i \geq i_0$ . Все рассматриваемые нами последовательности сходятся к своим пределам р. к. м. в  $U$ ; поэтому в силу леммы 16с форма  $\omega \vee \xi$ , как и требуется, регулярна в  $U$ , а следовательно, и в  $R$ .

Чтобы изучить гладкие отображения  $f$  открытых множеств пространства  $E^n$  в пространство  $E^m$ , мы прежде всего еще больше их сгладим с помощью  $A_i$ . В силу леммы (П. III, 3с) отображение  $A_i f$  бесконечно гладко и

$$(7) \lim A_i f(p) = f(p), \quad \lim \nabla (A_i f)(p, \alpha) = \nabla f(p, \alpha), \quad \text{и то и другое р. к. м.}$$

**Лемма 16е.** Пусть  $f$  — отображение, рассматриваемое ниже в теореме 16В, и пусть  $r$ -форма  $\omega$  непрерывна в  $R'$ . Тогда

$$(8) \quad \lim (A_i f)^* \omega = f^* \omega \quad \text{р. к. м. в } R.$$

Возьмем любую точку  $p \in R$  и любой  $r$ -вектор  $\alpha$ . При достаточно большом  $i$  вблизи  $p$  определено отображение  $f_i = A_i f$ , и на основании (7) мы получаем

$$\begin{aligned} \lim f_i^* \omega(p) \cdot \alpha &= \lim [\omega(f_i(p)) \cdot \nabla f_i(p, \alpha)] = \\ &= \omega(f(p)) \cdot \nabla f(p, \alpha) = f^* \omega(p) \cdot \alpha; \end{aligned}$$

очевидно, сходимости здесь р. к. м., и равенство (8) доказано.

**Лемма 16f.** Пусть  $f$  — отображение, рассматриваемое в теореме 16В, и пусть  $r$ -формы  $\omega_1, \omega_2, \dots$  непрерывны в  $R'$ . Тогда

$$(9) \quad \lim f^* \omega_i = f^* \omega \quad \text{р. к. м., если } \lim \omega_i = \omega \quad \text{р. к. м.}$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

**Теорема 16В.** Пусть  $f$  — гладкое отображение открытого множества  $R \subset E^n$  в открытое множество  $R' \subset E^m$ , и

пусть  $r$ -форма  $\omega$  регулярна в  $R'$ . Тогда  $r$ -форма  $f^*\omega$  регулярна в  $R$  и

$$(10) \quad df^*\omega = f^*d\omega.$$

Допустим сначала, что  $f$  есть 2-гладкое отображение. Применяя формулу (10) к гладкой форме  $A_i\omega$  (II, 8.8) и пользуясь формулами (5), (4) и последней леммой, получаем

$$\lim df^*A_i\omega = \lim f^*A_i d\omega = f^* \lim A_i d\omega = f^*d\omega,$$

а также  $\lim f^*A_i\omega = f^*\omega$ ; обе последовательности сходятся р. к. м. Равенство (10) следует теперь из леммы 16с.

Теперь рассмотрим общий случай. Применяя формулу (10) к 2-гладкому отображению  $A_if$  и пользуясь леммой 16е, получаем

$$\lim d(A_if)^*\omega = \lim (A_if)^*d\omega = f^*d\omega,$$

а также  $\lim (A_if)^*\omega = f^*\omega$ , и то и другое р. к. м. Затем снова применяем лемму 16с.

**17. Регулярные формы на гладких многообразиях.** Пусть  $\omega$  — некоторая  $r$ -форма в открытом множестве  $R$  на гладком многообразии  $M$ . Будем говорить, что форма  $\omega$  *регулярна*, если  $\omega$  непрерывна и если в  $R$  существует непрерывная  $(r+1)$ -форма  $\omega'$ , обладающая следующим свойством. Для любой системы координат  $\chi$  форма  $\chi^*\omega$  регулярна (там, где она определена) и  $d\chi^*\omega = \chi^*\omega'$ . Положим  $d\omega = \omega'$ ; форма  $\omega'$  однозначно определена и  $d\chi^*\omega = \chi^*d\omega$ .

Если это свойство вблизи  $p$  выполняется в одной системе координат  $\chi$ , то оно выполняется вблизи  $p$  и в любой другой системе координат  $\chi_1$ . В самом деле, если  $\psi = \chi^{-1}\chi_1$ , то  $\chi_1 = \chi\psi$ ,  $\chi_1^* = \psi^*\chi^*$  и, пользуясь формулой (16.10), мы получаем

$$d\chi_1^*\omega = d\psi^*\chi^*\omega = \psi^*d\chi^*\omega = \psi^*\chi^*\omega' = \chi_1^*\omega',$$

как и требовалось.

Определение регулярности с помощью интегралов будет дано ниже в лемме 17с. Если  $M$  — 2-гладкое многообразие, то в качестве определения можно было бы воспользоваться условием из леммы 16д.

Элементарные свойства регулярных форм сохраняются.

Мы докажем теоремы § 16 для гладких многообразий.

**Теорема 17А.** Если формы  $\omega$  и  $\xi$  регулярны в открытом множестве  $R \subset M$ , то и форма  $\omega \vee \xi$  регулярна в  $R$ , и

$$1) \quad d(\omega \vee \xi) = d\omega \vee \xi + (-1)^r \omega \vee d\xi, \text{ где } r = \deg \omega.$$

В самом деле, для любой системы координат  $\chi$  формы  $\chi^*\omega$  и  $\chi^*\xi$  регулярны; поэтому в силу теоремы 16А это верно и для их произведения, и

$$\begin{aligned} d\chi^*(\omega \vee \xi) &= d(\chi^*\omega \vee \chi^*\xi) = d\chi^*\omega \vee \chi^*\xi \pm \chi^*\omega \vee d\chi^*\xi = \\ &= \chi^*d\omega \vee \chi^*\xi \pm \chi^*\omega \vee \chi^*d\xi = \chi^*(d\omega \vee \xi \pm \omega \vee d\xi). \end{aligned}$$

Теорема 17В. Если  $f$  — гладкое отображение открытого множества  $R \subset M$  в  $M'$  (оба многообразия гладкие) и форма  $\omega$  регулярна в некоторой окрестности множества  $f(R)$ , то форма  $f^*\omega$  регулярна в  $R$  и

$$(2) \quad df^*\omega = f^*d\omega.$$

В самом деле, если задана точка  $p \in M$ , выберем систему координат  $\chi$  около точки  $p$  и систему координат  $\chi_1$  около точки  $f(p)$ ; тогда отображение  $g = \chi_1^{-1}f\chi$  будет гладким. Далее, форма  $\chi_1^*\omega$  регулярна, и поэтому регулярна и форма  $g^*\chi_1^*\omega = \chi^*f^*\omega$  (теорема 16В); так как

$$d\chi^*f^*\omega = dg^*\chi_1^*\omega = g^*\chi_1^*d\omega = \chi^*f^*d\omega,$$

то теорема доказана.

Гладким симплексом  $f\sigma$  в  $M$  называется взаимно однозначное регулярное отображение  $f$  симплекса  $\sigma$  в многообразие  $M$ . По определению мы полагаем  $\int_{f\sigma} \omega = \int_{\sigma} f^*\omega$ . Подобным же образом мы можем определить интеграл  $\int_{f\partial\sigma} \xi$ .

Лемма 17а. Если  $\omega$  — регулярная  $r$ -форма в открытом множестве  $R \subset M$  и  $f\sigma$  — гладкий  $(r+1)$ -мерный симплекс в  $R$ , то<sup>1)</sup>

$$(3) \quad \int_{\partial f\sigma} \omega = \int_{f\partial\sigma} \omega = \int_{f\sigma} d\omega.$$

В самом деле,

$$\int_{f\partial\sigma} \omega = \int_{\partial\sigma} f^*\omega = \int_{\sigma} df^*\omega = \int_{\sigma} f^*d\omega = \int_{f\sigma} d\omega.$$

Лемма 17б.  $\omega_1 = \omega_2$  в  $M$  в том и только в том случае, если  $\int_{f\sigma} \omega_1 = \int_{f\sigma} \omega_2$  для всех гладких  $r$ -мерных симплексов.

<sup>1)</sup> Первое равенство в (3) следует считать определением. — Прим. ред.

Допустим, что это условие выполняется. Если  $\chi$  — система координат и  $\sigma$  — симплекс в области ее определения, то

$$\int_{\sigma} \chi^* \omega_1 = \int_{\chi \sigma} \omega_1 = \int_{\chi \sigma} \omega_2 = \int_{\sigma} \chi^* \omega_2;$$

поэтому в силу леммы 16а  $\chi^* \omega_1 = \chi^* \omega_2$  и  $\omega_1 = \omega_2$ .

**Лемма 17с.** Пусть  $\omega$  и  $\xi$  — непрерывные формы соответственно степени  $r$  и  $r+1$  в открытом множестве  $R \subset M$ . Форма  $\omega$  регулярна и  $d\omega = \xi$  в том и только в том случае, если  $\int_{f\partial\sigma} \omega = \int_{f\sigma} \xi$  для всех гладких  $(r+1)$ -мерных симплексов  $f\sigma$  в  $R$ .

Необходимость условия следует из леммы 17а. Чтобы доказать достаточность, заметим, что из нашего предположения для симплексов  $\sigma$  в области определения любой системы координат  $\chi$  следует  $\int_{\partial\sigma} \chi^* \omega = \int_{\sigma} \chi^* \xi$ . Поэтому форма  $\chi^* \omega$  регулярна и  $d\chi^* \omega = \chi^* \xi$ , что и дает нам требуемый результат.

**18. Теорема Стокса для стандартных многообразий.** „Стандартное многообразие“ локально похоже на стандартную область. Под *частичной стандартной областью* в  $E^n$  мы понимаем множество  $R$ , которое вместе с множествами  $P$ ,  $Q$  обладает свойствами стандартной области с тем лишь отличием, что пространство  $E^n$  заменяется открытым множеством  $O$ . Таким образом,  $P^* = \bar{R} \cap O \setminus R$  и  $P^*$  и  $Q$  замкнуты в  $O$ , но, вообще говоря, не замкнуты в  $E^n$ . И теперь  $R$  является ориентированным открытым множеством (которое нет необходимости предполагать связным), а  $P$  есть некоторое множество  $(n-1)$ -мерных ориентированных гладких многообразий. Очевидно, пересечение любой стандартной области с открытым множеством является частичной стандартной областью.

*Стандартное  $n$ -мерное многообразие*  $M$  есть система следующего вида. Существует связное компактное топологическое пространство  $M$ , его замкнутое подмножество  $\partial M$  и некоторое замкнутое подмножество  $\partial_0 M$  множества  $\partial M$ . Существует конечное множество частичных стандартных областей  $R_i$  с соответствующими  $O'_i$ ,  $P_i$ ,  $Q_i$ , где  $O'_i$  — открытый шар. Для каждого  $i$  задано такое взаимно однозначное отображение  $\chi_i$  множества  $\bar{R}_i \cap O'_i$  в  $M$ , что

$$\chi_i(R_i) \subset M \setminus \partial M, \quad \chi_i(P_i) \subset \partial M \setminus \partial_0 M, \quad \chi_i(Q_i) \subset \partial_0 M.$$

Существуют внутренние концентрические шары  $O_i$ , для которых множества  $\chi_i(\bar{R}_i \cap O_i)$  покрывают пространство  $M$ . Положим  $\psi_{ij}(p) = \chi_j^{-1}(\chi_i(p))$  там, где это отображение определено. Тогда отображение  $\psi_{ij}$  является гладким там, где оно определено в  $R_i$ ,  $\nabla\psi_{ij}$  имеет непрерывные граничные значения в  $R_i \cup P_i$  и константа Липшица  $\mathfrak{L}_{\psi_{ij}}$  [см. (II, 4.14)] конечна.

Заметим, что системы координат  $\chi_i$  превращают  $M \setminus \partial M$  в гладкое многообразие; мы говорим, что  $M$  *ориентировано*, если ориентировано  $M \setminus \partial M$ . В силу предположения относительно  $\nabla\psi_{ij}$  пространство  $\partial M \setminus \partial_0 M$  является некоторым множеством гладких многообразий, причем, если ориентировано  $M$ , то все они ориентированы. Заметим также, что, так как множество  $Q_i$  имеет нулевую  $(n-1)$ -напряженность и константа Липшица  $\mathfrak{L}_{\psi_{ij}}$  конечна, то каждое множество<sup>1)</sup>  $\psi_{ij}(Q_i)$  в силу леммы 13а имеет нулевую  $(n-1)$ -протяженность.

На  $M \setminus \partial_0 M$  мы можем определить  $r$ -формы  $\omega$ . Мы говорим, что форма  $\omega$  *непрерывна*, если непрерывна каждая форма  $\omega_i^* = \chi_i^* \omega$ . Так как

$$(1) \quad \omega_j^*(p) \cdot \alpha = \psi_{ji}^* \omega_i^*(p) \cdot \alpha = \omega_i^*(\psi_{ji}(p)) \cdot \nabla\psi_{ji}(p, \alpha)$$

и дифференциал  $\nabla\psi_{ji}$  непрерывен там, где он определен в  $R_j \cup P_j$ , то определение непрерывности формы в точке множества  $\partial M \setminus \partial_0 M$  не зависит от выбора системы координат. Мы говорим, что форма  $\omega$  *ограничена*, если ограничена каждая форма  $\omega_i^*$ . Так как модуль  $|\nabla\psi_{ji}| \leq \mathfrak{L}_{\psi_{ij}}$  конечен, то мы снова имеем независимость от выбора системы координат.

**Теорема 18А.** Пусть  $M$  — ориентированное  $n$ -мерное стандартное многообразие, и пусть  $\omega$  — такая  $(n-1)$ -форма, что

(а)  $\omega$  определена, непрерывна и ограничена в  $M \setminus \partial_0 M$  и регулярна в  $M \setminus \partial M$ ,

(б)  $\omega$  суммируема в  $\partial M \setminus \partial_0 M$ ,

(с) форма  $d\omega$  суммируема в  $M \setminus \partial M$ .

Тогда

$$(2) \quad \int_{\partial M \setminus \partial_0 M} \omega = \int_{M \setminus \partial M} d\omega.$$

Чтобы доказать теорему, мы сначала следующим образом сведем ее к локальной задаче. Пусть  $\varphi_i''$  для каждого  $i$  есть глад-

<sup>1)</sup> Обозначение  $\psi_{ij}(Q_i)$  некорректно: множество  $Q_i$  нужно заменить его пересечением с областью определения отображения  $\psi_{ij}$ . — Прим. ред.

кая неотрицательная функция в  $E^n$ , которая  $> 0$  в  $O_i$  и  $= 0$  в некоторой окрестности множества  $E^n \setminus O'_i$ . Положим

$$\varphi'_i(p) = \begin{cases} \varphi''_i(\chi_i^{-1}(p)) & \text{в } \chi_i(O'), \\ 0 & \text{во всех остальных точках многообразия } M. \end{cases}$$

Функция  $\varphi'_i$  непрерывна в  $M$  и гладка в  $M \setminus \partial_0 M$ . Это же верно для функции  $\varphi_i(p) = \varphi'_i(p) / \sum_j \varphi'_j(p)$ ; кроме того,  $0 \leq \varphi_i(p) \leq 1$ ,  $\sum \varphi_i(p) = 1$  в  $M$ . Положим  $\omega_i^* = \chi_i^* \omega$  и

$$(3) \quad \omega_i(p) = \varphi_i(p) \omega(p) \quad \text{в } M \setminus \partial_0 M,$$

$$(4) \quad \omega'_i(q) = \chi_i^* \omega_i(q) = \varphi_i(\chi_i(q)) \omega_i^*(q) \quad \text{в } R_i.$$

Мы докажем:

$$(5) \quad \int_{P_i} \omega'_i = \int_{R_i} d\omega'_i,$$

$$(6) \quad \int_{\partial M \setminus \partial_0 M} \omega_i = \int_{P_i} \omega'_i, \quad \int_{M \setminus \partial M} d\omega_i = \int_{R_i} d\omega'_i,$$

причем все формы суммируемы; этим равенство (2) будет доказано для  $\omega_i$ , и, суммируя по  $i$ , мы получим равенство (2) для  $\omega$ .

Прежде всего, так как форма  $\omega$  суммируема в  $\partial M \setminus \partial_0 M$  и функция  $\varphi_i$  ограничена, то форма  $\varphi_i \omega = \omega_i$  суммируема в  $\partial M \setminus \partial_0 M$  (лемма 6с, § 10). Кроме того,  $\omega_i = 0$  вне  $\chi_i(O'_i)$ . В силу теоремы 10А форма  $\chi_i^* \omega_i$  суммируема в  $P_i$  и первое из равенств (6) выполняется.

Далее, положим

$$\varphi_i^*(q) = \chi_i^* \varphi_i(q) = \varphi_i(\chi_i(q)), \quad \varphi_{ij}(q) = \varphi'_j(\chi_i(q))$$

там, где эти функции определены в  $R_i$ . Тогда

$$\varphi_{ij}(q) = \varphi'_j(\chi_j(\psi_{ij}(q))) = \varphi''_j(\psi_{ij}(q)).$$

и, так как  $\nabla \varphi''_j$  и  $\nabla \psi_{ij}$  ограничены, то будет ограничен и дифференциал  $\nabla \varphi_{ij}$  (вне  $Q_i$ ). Равенство  $\varphi_i^* = \varphi_{ij} / \sum_j \varphi_{ij}$  показывает, что и дифференциал  $\nabla \varphi_i^*$  ограничен. По предположению форма  $\omega_i^*$  ограничена; следовательно, ограничена и форма  $\nabla \varphi_i^* \vee \omega_i^*$ . Поскольку область  $R_i$  ограничена, форма  $\nabla \varphi_i^* \vee \omega_i^* = \chi_i^*(\nabla \varphi_i \vee \omega)$

суммируема в  $R_i$ . Применяя к этой форме и к гладкому отображению  $\chi_i^{-1}$  теорему 10А, получаем

$$\int_{R_i} \nabla \varphi_i^* \vee \omega_i^* = \int_{\chi_i(R_i)} \chi_i^{-1*} \chi_i^* (\nabla \varphi_i \vee \omega) = \int_{M \setminus \partial M} \nabla \varphi_i \vee \omega.$$

Так как форма  $d\omega$  суммируема в  $M \setminus \partial M$  и функция  $\varphi_i$  ограничена, то форма  $\varphi_i d\omega$  суммируема в  $M \setminus \partial M$ . Применяя теорему 10А к отображению  $\chi_i$ , находим

$$\int_{M \setminus \partial M} \varphi_i d\omega = \int_{R_i} \chi_i^* (\varphi_i d\omega) = \int_{R_i} \varphi_i^* d\omega_i^*.$$

Так как  $d\omega_i = \nabla \varphi_i \vee \omega + \varphi_i d\omega$  и аналогично для  $d\omega'_i = d(\varphi_i^* \omega_i^*)$ , то, складывая найденные соотношения, мы получаем второе из равенств (6).

В силу предположений нашей теоремы условие (а) теоремы 14А выполняется для формы  $\omega'_i$  и частичной стандартной области  $R_i$ ; кроме того,  $\omega'_i = 0$  в некоторой окрестности  $U$  множества  $E^n \setminus O'_i$ . Мы только что доказали, что для формы  $\omega'_i$  выполняются условия (b) и (c) теоремы 14А. Рассматривая только столь малые кубы  $U'_j$ , чтобы любой куб  $U'_j$ , пересекающий множество  $O'_i \setminus U$ , лежал в  $O'_i$ , мы, следуя доказательству теоремы 14А, установим равенство (5) в случае, когда форма  $\omega'_i$  является  $Q$ -свободной. Последняя часть доказательства теоремы 14А проходит и в нашем случае; поэтому равенство (5) имеет место и наша теорема доказана.

**19. Повторный интеграл в евклидовом пространстве.** Пусть  $Q_1$  и  $Q_2$  — полиэдральные области в  $E^{n_1}$  и в  $E^{n_2}$  соответственно; их декартово произведение  $Q = Q_1 \times Q_2$  является полиэдральной областью в  $E^n$ ,  $n = n_1 + n_2$ . Рассматривая произвольную непрерывную  $n$ -форму  $\omega$  в  $Q$ , мы хотим придать смысл формуле

$$(1) \quad \int_Q \omega = \int_{Q_1 \times Q_2} \omega(p \times q) d(p \times q) = \int_{Q_2} \left[ \int_{Q_1 \times q} \omega(p \times q) dp \right] dq$$

и доказать ее. *Интеграл, зависящий от параметра,*

$$(2) \quad \Omega(q) = \int_{Q_1 \times q} \omega(p \times q) dp$$

должен быть определен в обобщенном смысле; это не число, а  $n_2$ -ковектор в  $Q_2$ . Рассматривая подразделения  $\sum \sigma_i$  области  $Q_1$ , степени мелкости которых  $\rightarrow 0$ , и взяв точки  $p_i \in \sigma_i$ , мы по определению полагаем

$$(3) \quad \Omega(q) = \lim \sum_i \omega(p_i \times q) \wedge \{\sigma_i\},$$

где мы пользуемся внутренним произведением из (1, 7). Теперь  $\Omega$  есть  $n_2$ -форма, и формула, которую мы собираемся доказать, принимает вид

$$(4) \quad \int_Q \omega = \int_{Q_2} \Omega(q) dq.$$

Если дан произвольный  $n_2$ -вектор  $\beta$  в  $E^{n_2}$ , то мы можем произведение  $\Omega(q) \cdot \beta$  записать в виде интеграла

$$(5) \quad \Omega(q) \cdot \beta = (-1)^{n_1 n_2} \int_{Q_1 \times q} \omega(p \times q) \wedge \beta dp.$$

Чтобы это показать, заметим, что в силу (1, 7.2) и (1, 6.2)

$$\begin{aligned} \Omega(q) \cdot \beta &= \lim \sum_i [\omega(p_i \times q) \wedge \{\sigma_i\}] \cdot \beta = \\ &= (-1)^{n_1 n_2} \lim \sum_i [\omega(p_i \times q) \wedge \beta] \cdot \{\sigma_i\}, \end{aligned}$$

и равенство (5) следует теперь из леммы 4а.

Чтобы доказать равенство (4), возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Положим  $\eta = \varepsilon / (|Q_2| + 2|Q|)$ . Из (5) мы видим, что форма  $\Omega$  непрерывна; поэтому мы можем выбрать такое число  $\zeta > 0$ , что

$$\begin{aligned} |\omega(p'') - \omega(p')| &< \eta, \quad \text{если } |p'' - p'| < 2^{1/2}\zeta, \\ |\Omega(q') - \Omega(q)| &< \eta, \quad \text{если } |q' - q| < \zeta. \end{aligned}$$

Пусть теперь  $\sum \sigma_i$  и  $\sum \tau_j$  — подразделения областей  $Q_1$  и  $Q_2$  соответственно, имеющие степень мелкости  $< \zeta$ . Возьмем точки  $p_i \in \sigma_i$ ,  $q_j \in \tau_j$ ; тогда  $p_i \times q_j \in \sigma_i \times \tau_j$ . По лемме 4а

$$\left| \int_{Q_2} \Omega - \sum_j \Omega(q_j) \cdot \{\tau_j\} \right| \leq \eta |Q_2|.$$

Если точки  $p$  и  $p'$  принадлежат одному и тому же симплексу  $\sigma_i$ , то в силу (1, 12.13) и доказательства неравенства (1, 14.4)

$$|\omega(p' \times q) \wedge \beta - \omega(p \times q) \wedge \beta| \leq |\omega(p' \times q) - \omega(p \times q)| \beta \leq \eta |\beta|;$$

поэтому в силу (5) и леммы 4а

$$|\Omega(q) \cdot \beta - (-1)^{n_1 n_2} \sum_i [\omega(p_i \times q) \wedge \beta] \cdot \{\sigma_i\}| \leq \eta |\beta| |Q_1|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \sum_j \Omega(q_j) \cdot \{\tau_j\} - \sum_{i,j} \omega(p_i \times q_j) \cdot [\{\sigma_i\} \vee \{\tau_j\}] \right| &\leq \sum_j \eta |\tau_j| |Q_1| = \\ &= \eta |Q_1| |Q_2| = \eta |Q|. \end{aligned}$$

Так как  $\sum_{ij} \sigma_i \times \tau_j$  есть подразделение области  $Q$ , имеющее степень мелкости  $< 2^{1/2} \eta$ , то

$$\left| \int_Q \omega - \sum_{i,j} \omega(p_i \times q_j) \cdot \{\sigma_i \times \tau_j\} \right| \leq \eta |Q|.$$

Так как, далее,  $\{\sigma_i \times \tau_j\} = \{\sigma_i\} \vee \{\tau_j\}$ , то, комбинируя выписанные выше неравенства, мы получаем  $\left| \int_Q \omega - \int_{Q_2} \Omega \right| \leq \varepsilon$ , что до-

казывает равенство (4).

Допустим, что рассматриваемые пространства ориентированы. Пусть  $\alpha_0$  — единичный  $n_1$ -вектор пространства  $E^{n_1}$ . Тогда для любого  $n_2$ -вектора  $\beta$  в  $E^{n_2}$ , пользуясь формулой (5), мы получаем выражение произведения  $\Omega(\alpha) \cdot \beta$  в виде интеграла Римана:

$$\begin{aligned} (6) \quad \Omega(q) \cdot \beta &= (-1)^{n_1 n_2} \int_{Q_1 \times q} [\omega(p \times q) \wedge \beta] \cdot \alpha_0 dp = \\ &= \int_{Q_1 \times q} \omega(p \times q) \cdot (\alpha_0 \vee \beta) dp. \end{aligned}$$

## IV. Гладкие многообразия

Эта глава делится на три части, каждая из которых посвящена одной из основных теорем теории гладких (т. е. дифференцируемых) многообразий. (Определения и простейшие свойства гладких многообразий приведены в § 10—12 гл. II.)

Одна лишь третья часть непосредственно относится к теории интегрирования. Ее цель—доказать теорему де Рама, описывающую когомологическое строение гладкого многообразия  $M$  в терминах дифференциальных форм на  $M$ . Интегрирование замкнутой формы по циклам дает периоды этой формы; благодаря этому пространства когомологий, определенные дифференциальными формами, становятся пространствами линейных функций, определенных на пространствах гомологий. Кроме того, произведения форм соответствуют произведению в алгебраических пространствах когомологий. Относительно применения весьма общей теории форм в теореме де Рама см. конец введения к гл. IX.

В настоящее время вошло в привычку излагать алгебраическую топологию с очень абстрактной точки зрения; применение нескольких основных свойств дифференциальных форм превращает теорему де Рама в следствие общих теорем. Однако трудность охвата обширной теории, требуемой в этом случае, и получающееся в результате отсутствие очевидного геометрического истолкования делают желательным прямое доказательство с помощью элементарных средств. Доказательство, которое мы приводим, тесно связано с оригинальным доказательством де Рама. Доказательство, в котором применяются потоки (а также доказательство теоремы о вложении), можно найти в книге де Рама.

Первоначальное топологическое изучение гладкого многообразия было проведено А. Пуанкаре с помощью триангуляции многообразия  $M$  (разбиения его на клетки); то, что триангуляция действительно всегда может быть сделана, впервые было доказано С. С. Кэрнсом. Быть может, отчасти ввиду трудности доказательства применение триангуляции вышло из моды. Однако и с точки зрения геометрической интуиции, и с точки зрения различных приложений триангуляции очень полезны. Определения и доказательства в третьей части этой главы основаны на них. По этой причине вторая часть посвящена доказательству существования триангуляций. Метод доказательства, как нам кажется, делает теорему интуитивно ясной;

этими методами, очевидно, можно воспользоваться для доказательства родственного теорема.

В теореме о триангуляции мы предполагаем многообразие  $M$  вложенным в евклидово пространство  $E$ . То, что это не является ограничением, доказывается в первой части. Здесь изучается также связь многообразия  $M$  с окружающим пространством. Эта теорема о вложении играет важную роль, потому что она позволяет перенести простые аналитические методы, имеющиеся в пространстве  $E$ , на его подмножество  $M$ .

Мы заканчиваем главу изучением инварианта Хопфа гладкого отображения сферы  $S^{2n-1}$  в сферу  $S^n$ .

### А. Многообразия в евклидовом пространстве

**1. Теорема о вложении.** Пусть  $f$  — гладкое отображение гладкого многообразия  $M$  в  $m$ -мерное евклидово пространство  $E^m$  (II, 10). Мы говорим, что  $f$  *регулярно в точке*  $p$  [ср. (II, 5)], если независимые векторы на  $M$  в точке  $p$  переходят в независимые векторы в  $E^m$  (II, 11);  $f$  *регулярно*, если оно регулярно во всех точках многообразия  $M$ . В случае компактного многообразия  $M$  мы говорим, что отображение  $f$  есть *вложение*, если оно взаимно однозначно и регулярно.

Чтобы рассмотреть некомпактный случай, мы дадим еще одно определение. *Предельное множество*  $L_f$  отображения  $f$  есть множество точек  $q \in E^m$ , обладающих следующим свойством: существует последовательность точек  $p_1, p_2, \dots$  многообразия  $M$ , не имеющая в  $M$  предельной точки, для которой  $f(p_i) \rightarrow q$ . (Если  $M$  компактно, то  $L_f$  пусто.) Например, если  $M = \mathbb{A}$  и  $f$  — тождественное отображение, то  $L_f$  пусто, но если  $f$  — взаимно однозначное отображение на открытый интервал  $0 < t < 1$ , то  $L_f$  содержит точки  $t = 0$  и  $t = 1$ .

Отображение  $f$  называется *собственным*, если  $L_f \cap f(M) = \emptyset$ . Если, например,  $f$  отображает  $\mathbb{A}$  в фигуру гомеоморфную шестерке, расположенную в  $E^2$ , то  $L_f$  содержит точку множества  $f(M)$  и отображение  $f$  не является собственным. Легко видеть, что взаимно однозначное отображение  $f$  является собственным в том и только в том случае, если обратное отображение  $f^{-1}$  непрерывно в  $f(M)$ , или же в том и только в том случае, если  $f^{-1}$  переводит компактные множества в компактные же множества.

*Вложение* есть взаимно однозначное собственное регулярное отображение.

**Теорема 1А.** Пусть  $M$  — некоторое  $\mu$ -гладкое многообразие размерности  $n$ ,  $\mu \geq 1$  или  $\mu = \infty$ . Тогда при  $m \geq 2n$  суще-

существует  $\mu$ -гладкое регулярное отображение  $f$  многообразия  $M$  в  $E^m$  без предельного множества, а при  $m \geq 2n+1$  существует  $\mu$ -гладкое вложение многообразия  $M$  в  $E^n$  без предельного множества.

**2. Компактный случай.** Мы дадим здесь короткое доказательство того, что если  $M$  компактно, то его можно вложить в некоторое пространство  $E^m$  1).

Пусть  $O_a$  — открытый шар радиуса  $a$  с центром в точке  $O$  в пространстве  $\mathbb{X}^n$ , и пусть  $\Phi(x)$  — бесконечно гладкая неотрицательная функция в  $\mathbb{X}^n$ , которая равна 1 в  $\bar{O}_1$ ,  $< 1$  в  $\mathbb{X}^n \setminus \bar{O}_1$  и равна нулю в  $\mathbb{X}^n \setminus O_2$  (П. III, лемма 1b). Пусть  $\chi_1, \dots, \chi_\nu$  — такие системы координат в  $M$ , определенные в  $O_3$ , что множества  $\chi_i(O_1)$  покрывают  $M$ . В каждом множестве  $U'_j = \chi_j(O_3)$  положим

$$1) f_{0j}(p) = \Phi(x), \quad f_{ij}(p) = x^i \Phi(x) \quad (i = 1, \dots, n), \quad p = \chi_j(x)$$

и  $f_{ij} = 0$  в  $M \setminus U'_j$ . Мы получили совокупность  $m = \nu(n+1)$  действительных  $\mu$ -гладких функций, определенных на  $M$ . Взятые в каком-либо порядке, они являются компонентами некоторого  $\mu$ -гладкого отображения  $F$  многообразия  $M$  в  $E^m$ ; это и есть требуемое вложение.

Чтобы показать, что отображение  $F$  регулярно, возьмем любую точку  $p \in M$ ; пусть, скажем,  $p = \chi_j(x)$ ,  $x \in O_1$ . Пусть  $F_j$  — отображение многообразия  $M$  в  $E^n$ , компонентами которого являются  $f_{1j}, \dots, f_{nj}$ . В  $O_1$  отображение  $F'_j(x) = F_j(p)$  ( $p = \chi_j(x)$ ) имеет компоненты  $f_{ij}(p) = x^i$ ; таким образом,  $F'_j$  является изометрическим отображением шара  $O_1$  в  $E^n$ , и поэтому оно в  $O_1$  регулярно. Следовательно,  $F_j$ , а поэтому и  $F$ , регулярны в точке  $p$ .

Чтобы показать, что отображение  $F$  взаимно однозначно, возьмем две различные точки  $p$  и  $q$  многообразия  $M$ . Если обе они принадлежат какому-либо множеству  $\bar{U}_j = \chi_j(\bar{O}_1)$ , то только что проведенное доказательство показывает, что  $F(p) \neq F(q)$ . Если же это не так, то пусть  $p$  принадлежит множеству  $\bar{U}_j$ , а  $q$  ему не принадлежит. Тогда  $f_{0j}(p) = 1$ , а  $f_{0j}(q) < 1$  и снова  $F(p) \neq F(q)$ .

1) Затем возможно (если  $\mu \geq 2$ ), проектируя в некоторое подпространство  $E^{2n+1} \subset E^m$ , получить вложение в  $E^{2n+1}$ ; см. Whitney H., *Ann. Math.*, 38 (1937), 809—818, гл. I книги де Рама и приложение I. (См. также Понтрягин Л. С., Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, АН СССР, 1955, вып. 45. — *Прим. ред.*) Доказательство теоремы 1A, которое мы даем ниже, является несколько упрощенным вариантом доказательства автора в *Annals of Mathematics*, 37 (1936), 645—68). См. эту статью по поводу дальнейших теорем, связанных с вложением и аппроксимацией. В частности, вложенное многообразие может быть сделано аналитическим.

**3. Разделение подмножеств пространства  $E^m$ .** Докажем две леммы, составляющие существенные части теоремы о вложении. Будем говорить, что подмножество  $S$  пространства  $E^m$  *нигде не плотно* в  $E^m$ , если  $\text{int}(S) = 0$ <sup>1)</sup>.

**Лемма 3а.** Пусть  $f$  — липшицевское отображение (II, 4) подмножества  $Q$  пространства  $E^s$  в пространство  $E^m$ ,  $s < m$ . Тогда  $f(Q)$  *нигде не плотно* в  $E^m$ .

Возьмем в  $E^m$  некоторый куб  $D$  с ребром длины  $\varepsilon$ ; мы найдем точку  $p \in D \setminus f(Q)$ . Допустим сначала, что множество  $Q$  ограничено; пусть  $C$  — куб, содержащий  $Q$ , и  $\delta$  — его диаметр. Выберем  $k$  так, чтобы было  $(2\mathfrak{L}_f \delta)^m / 2^k < \varepsilon^m$ . Разобьем куб  $C$  на  $\nu$  равных кубов  $C_1, \dots, C_\nu$  диаметра  $\delta/2^k$ ; тогда  $\nu = 2^{sk}$ . Положим  $Q'_i = f(Q \cap C_i)$ . Если при некотором  $i$   $Q'_i \neq \emptyset$ , то  $\text{diam}(Q'_i) \leq \mathfrak{L}_f \delta / 2^k$ , и поэтому  $Q'_i$  лежит в некотором кубе  $D_i$  с ребром длины  $2\mathfrak{L}_f \delta / 2^k$ . Сумма объемов всех таких кубов  $D_i$  равна

$$\sum |D_i| = 2^{sk} (2\mathfrak{L}_f \delta / 2^k)^m \leq \frac{(2\mathfrak{L}_f \delta)^m}{2^k} < \varepsilon^m.$$

Следовательно, в  $D$  имеется точка (в действительности куб), не принадлежащая ни одному  $D_i$  и поэтому не принадлежащая множеству  $f(Q)$ .

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть  $C_1, C_2, \dots$  — концентрические кубы в  $E^s$ , причем  $\text{diam}(C_i) \rightarrow \infty$ . По доказанному выше мы можем найти (замкнутый) куб  $D_1 \subset D$ , не содержащий точек множества  $f(Q \cap C_1)$ , замкнутый куб  $D_2 \subset D_1$ , не содержащий точек множества  $f(Q \cap C_2)$ , и т. д. Существует точка  $p$ , принадлежащая всем  $D_i$ ; она лежит в  $D \setminus f(Q)$ .

Для данного множества  $S \subset E^m$  и вектора  $v$  пусть  $T_v(S)$  обозначает множество точек  $p + v$ ,  $p \in S$  (сдвиг множества  $S$  на вектор  $v$ ).

**Лемма 3б.** Пусть  $Q$  и  $Q'$  — подмножества пространств  $E^n$  и  $E^{n'}$  соответственно; пусть  $f$  и  $f'$  — липшицевские отображения множеств  $Q$  и  $Q'$  соответственно в  $E^m$ , причем  $n + n' = s < m$ . Тогда в  $E^m$  существует такой сколь угодно малый вектор  $v$ , что множество  $T_v(f(Q))$  не пересекает множества  $f'(Q')$ .

<sup>1)</sup> Это расходится с обычной терминологией. Обычно (см., например, Александров П. С., Введение в общую теорию функций и множеств, М., 1948, стр. 250—251) подмножество  $S$  называется *нигде не плотным* в  $E^m$ , если  $\text{int}(\bar{S}) = 0$ , где  $\bar{S}$  — замыкание множества  $S$ . — *Прим. перев.*

Положим  $F(q \times q') = f'(q') - f(q)$  для  $q \in Q$ ,  $q' \in Q'$ ; это — липшицевское отображение декартова произведения  $Q \times Q' \subset E^s$  в  $V^m = V(E^m)$ . По предыдущей лемме существует сколь угодно малый вектор  $v$ , не принадлежащий множеству  $F(Q \times Q')$ ; это и есть искомый вектор.

**4. Регулярная аппроксимация.** Мы покажем, как найти регулярное отображение шара  $\bar{O}_1$  (см. § 2) в пространство  $E^m$  ( $m \geq 2n$ ), аппроксимирующее данное отображение.

Пусть  $\psi$  и  $\psi'$  — некоторые  $\mu$ -гладкие отображения окрестности множества  $Q \subset \mathbb{A}^n$  в пространство  $E^m$ , и пусть  $\eta(p)$  — положительная непрерывная в  $Q$  функция. Пользуясь фиксированной системой координат в  $E^m$ , мы говорим, что  $\psi'$  аппроксимирует  $(\psi, Q, \mu, \eta)$ , если компоненты отображения  $\Psi(p) = \psi'(p) - \psi(p)$  вместе со всеми их частными производными порядка  $\leq \mu$  не превосходят по абсолютной величине числа  $\eta(p)$  в каждой точке  $p \in Q$ .

**Лемма 4а.** Пусть  $\psi$  — произвольное  $\mu$ -гладкое отображение шара  $O_3$  в пространство  $E^m$ ,  $m \geq 2n$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\mu$ -гладкое отображение  $\psi'$  шара  $O_3$  в пространство  $E^m$ , аппроксимирующее  $(\psi, \bar{O}_2, \mu, \varepsilon)$  и регулярное в  $\bar{O}_1$ .

Если  $\mu = 1$ , то пусть  $\psi_0$  — некоторое 2-гладкое отображение шара  $O_3$ , аппроксимирующее  $(\psi, \bar{O}_2, 1, \varepsilon')$ , где  $\varepsilon' > 0$  — число, определяемое ниже (П. III, лемма 4а); если же  $\mu > 1$ , то пусть  $\psi_0 = \psi$ . Мы найдем одно за другим такие отображения  $\psi_1, \dots, \psi_n$ , что  $\psi_i$  аппроксимирует  $(\psi_{i-1}, \bar{O}_2, \mu, \varepsilon')$  и что векторы  $\partial\psi_i/\partial x^1, \dots, \partial\psi_i/\partial x^i$  независимы в  $\bar{O}_1$ ; отображения  $\psi_i$  являются  $\mu'$ -гладкими в  $O_3$ ,  $\mu' = \sup(2, \mu)$ . Если  $\varepsilon'$  достаточно мало, то  $\psi' = \psi_n$  есть искомое отображение.

Допустим, что отображение  $\psi_{i-1}$  найдено; покажем, как найти  $\psi_i$ . Положим

$$(1) \quad v_j(x) = \frac{\partial \psi_{i-1}(x)}{\partial x^j} \quad (j = 1, \dots, i);$$

тогда векторы  $v_1, \dots, v_{i-1}$  независимы в  $\bar{O}_1$ . Пусть  $P(x)$  — множество всех векторов

$$(2) \quad \varphi(\lambda^1, \dots, \lambda^{i-1}; x) = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda^j v_j(x) - v_i(x),$$

и пусть  $P$  — объединение всех множеств  $P(x)$  для  $x \in \bar{O}_1$ . Найдем сколь угодно малый вектор  $v$ , не принадлежащий  $P$ , и положим

$$(3) \quad \psi_i(x) = \psi_{i-1}(x) + x^i v.$$

Тогда при достаточно малом  $v$  отображение  $\psi_i$  аппроксимирует  $(\psi_{i-1}, \bar{O}_2, \mu, \varepsilon')$ . Кроме того,

$$\frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x^j} = v_j(x) \quad (j < i), \quad \frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x^i} = v_i(x) + v.$$

Так как для любой точки  $x \in \bar{O}_1$  вектор  $v$  не принадлежит  $P(x)$ , то вектор  $v_i(x) + v$  не является линейной комбинацией векторов  $v_1(x), \dots, v_{i-1}(x)$ . Поэтому отображение  $\psi_i$  обладает требуемыми свойствами.

Так как отображение  $\psi_{i-1}$  является 2-гладким, то  $v_j(x)$  являются гладкими, следовательно,  $\varphi$  есть гладкое отображение декартова произведения  $\mathcal{M}^{i-1} \times O_3$ . Поскольку  $i - 1 + n < m$ , лемма 3а показывает, что существует сколь угодно малый вектор  $v$ , не лежащий в  $\varphi(\mathcal{M}^{i-1} \times O_1) = P$ , что и завершает доказательство.

**5. Доказательство теоремы 1А, М компактно.** Пусть  $\chi_1, \dots, \chi_n$  — системы координат из § 2. Выберем точку  $q_0 \in E^m$  и положим  $f_0(p) = q_0$  ( $p \in M$ ); отображение  $f_0$  является  $\mu$ -гладким. Предполагая, что  $m \geq 2n$ , мы определим отображения  $f_1, \dots, f_n = f'$ , каждое из которых является  $\mu$ -гладким в  $M$ , причем  $f_i$  регулярно в  $Q_i = \bar{U}_1 \cup \dots \cup \bar{U}_i$  ( $U_i = \chi_i(O_1)$ ); тогда отображение  $f'$  регулярно в  $M$ .

Допустив, что у нас уже есть отображение  $f_{i-1}$ , построим отображение  $f_i$  следующим образом. Положим

$$(1) \quad \psi(x) = f_{i-1}(\chi_i(x)), \quad x \in O_3.$$

Для некоторого  $\varepsilon > 0$  мы найдем такое  $\mu$ -гладкое отображение  $\psi^*$  шара  $O_3$  в  $E^m$ , что

(а)  $\psi^*$  аппроксимирует  $(\psi, \bar{O}_2, 1, \varepsilon)$ ,

(б)  $\psi^* = \psi$  в  $O_3 \setminus O_2$ ,

(с)  $\psi^*$  регулярно в  $\bar{O}_1$ .

Тогда, если мы положим

$$(2) \quad f_i(p) = \psi^*(\chi_i^{-1}(p)) \text{ в } U'_i, \quad f_i = f_{i-1} \text{ в } M \setminus U'_i,$$

то отображение  $f_i$  будет  $\mu$ -гладким в  $M$  и регулярным в  $\bar{U}_i$ . Кроме того, так как отображение  $f_{i-1}$  регулярно в компактном множестве  $Q_{i-1}$ , то этим же свойством при достаточно малом  $\varepsilon$  будет обладать и  $f_i$ .

Для некоторого  $\varepsilon' > 0$  выберем отображение  $\psi'$  шара  $O_3$  по лемме 4а. Пусть  $\Phi$  — функция, определенная в § 2; положим

$$(3) \quad \psi^*(x) = \psi(x) + \Phi(x)[\psi'(x) - \psi(x)], \quad x \in O_3.$$

Тогда условие (а) выполняется, если  $\varepsilon'$  достаточно мало; условие (b) также выполняется и, так как  $\psi^* = \psi'$  в  $\bar{O}_1$ , то выполняется и условие (с). Таким образом, мы находим  $\psi^*$ , а значит,  $f_i$  и, наконец,  $f'$ .

Предполагая теперь, что  $m \geq 2n + 1$ , мы найдем вложение  $f$ . Так как отображение  $f'$  регулярно, то оно взаимно однозначно в некоторой окрестности каждой точки (II, теорема 7B). Поэтому мы можем выбрать новые системы координат  $\chi_1, \dots, \chi_v$  так, чтобы (сохраняются прежние обозначения) множества  $\bar{U}_i$  покрывали  $M$  и чтобы отображение  $f'$  было взаимно однозначным на  $U'_i \cup U'_j$ , если пересечение  $U'_i \cap U'_j$  непусто. Пусть  $x_1, \dots, x_\beta$  — взятые в каком-либо порядке пары чисел  $(i, j)$ ,  $i < j$ , для которых  $U'_i \cap U'_j = 0$ . Положим  $f'_0 = f'$ . Мы найдем такие  $\nu$ -гладкие регулярные отображения  $f'_1, \dots, f'_\beta$ , что каждое  $f'_k$  взаимно однозначно на каждом объединении  $U'_i \cup U'_j$ , если  $U'_i \cap U'_j \neq 0$ , и что для всякого  $k' \leq k$ , если  $x_{k'} = (i', j')$ , то  $f'_{k'}(\bar{U}_{i'}) \cap f'_{k'}(\bar{U}_{j'}) = 0$ . Тогда  $f = f'_\beta$  есть нужное нам вложение.

Если уже построено отображение  $f'_{k-1}$ , то мы строим  $f'_k$  следующим образом. Пусть  $x_k = (i, j)$ . Положим

$$(4) \quad \psi(x) = f'_{k-1}(\chi_j(x)), \quad x \in O_3.$$

Для некоторого  $\varepsilon > 0$  выберем по лемме 3b такой вектор  $v$ , что  $|v| < \varepsilon$  и

$$T_v(\psi(\bar{O}_1)) \cap f'_{k-1}(\bar{U}_i) = 0.$$

Положим  $\psi'(x) = \psi(x) + v$  и определим отображение  $\psi^*$  по формуле (3). [Таким образом,  $\psi^*(x) = \psi(x) + \Phi(x)v$ .] Как и раньше, оно определяет отображение  $f'_k$  на множестве  $U'_j$ ; далее полагаем  $f'_k = f'_{k-1}$  в  $M \setminus U'_j$ , в частности, в  $U'_i$ . Мы имеем  $f'_k(\bar{U}_i) \cap f'_k(\bar{U}_j) = 0$ . При достаточно малом  $\varepsilon$  требуемые условия, которым удовлетворяет  $f'_{k-1}$ , продолжают выполняться и для  $f'_k$ ; таким образом, отображение  $f'_k$  построено. Это завершает доказательство.

**6. Допустимые системы координат в  $M$ .** Мы говорим, что некоторое множество систем координат в  $M$  (каждая из которых определена в  $O_3$ ) *допустимо*, если оно конечно или счетно, множества  $U_i$  покрывают  $M$  и любое компактное подмножество многообразия  $M$  имеет общие точки только с конечным числом множеств  $U_i$  (обозначения такие же, как в § 2).

**Лемма 6а.** *Многообразие  $M$  имеет допустимое множество систем координат.*

Так как  $M$  может быть покрыто счетным множеством систем координат, то мы, очевидно, можем найти такие компактные подмножества  $H_1, H_2, \dots$  многообразия  $M$ , что  $H_i \subset \text{int}(H_{i+1})$  и  $H_1 \cup H_2 \cup \dots = M$ . Для каждого  $i$  существует конечное множество систем координат, для которых соответствующие  $U_k$  покрывают множество  $H_{i+1} \setminus H_i$  (мы считаем, что  $H_0 = 0$ ), а  $U'_k$  не пересекаются с  $H_{i-1}$  (при  $i > 1$ ). Множество всех этих систем координат является допустимым.

**7. Доказательство теоремы 1А,  $M$  не компактно.** Пусть  $\chi_1, \chi_2, \dots$  — допустимое множество систем координат в  $M$ . Сохраняя обозначения § 2, положим

$$(1) \quad \rho_i(p) = \begin{cases} \Phi(\chi_i^{-1}(p)) & \text{в } U'_i, \\ 0 & \text{в } M \setminus U'_i, \end{cases} \quad \rho(p) = \sum_{i=1}^{\infty} i \rho_i(p).$$

Выберем точку  $q_0 \in E^m$  и вектор  $v_0 \neq 0$  и положим

$$(2) \quad f_0(p) = q_0 + \rho(p) v_0;$$

тогда  $f_0$  есть  $\mu$ -гладкое отображение многообразия  $M$  в пространство  $E^m$  без предельного множества.

Определим отображения  $f_1, f_2, \dots$ , как в § 5;  $f_i$  регулярно в  $\bar{U}_1 \cup \dots \cup \bar{U}_i$ . Так как множество систем координат, которым мы пользуемся, допустимо, то отображение  $f' = \lim f_i$  существует, регулярно в  $M$  и не имеет предельного множества.

Теперь выберем системы координат  $\chi_1, \chi_2, \dots$ , как во второй части § 5; как легко видеть, мы можем предполагать, что множество этих систем счетно и что  $\bar{U}'_i$  компактны. Как в § 6, мы можем потребовать, чтобы это множество было допустимым. Определим пары чисел  $i_1, i_2, \dots$ , как и раньше, но будем рассматривать только такие пары  $(i, j)$ , для которых  $U'_i \cap U'_j = 0$ , а  $f(\bar{U}_i) \cap f(\bar{U}_j) \neq 0$ . Так как системы  $\chi_i$  допустимы и множество  $L_f$  пусто, то каждое целое число  $i$  входит не более чем в конечное число пар  $(i, j)$ .

Теперь, как ранее, определим отображения  $f'_1, f'_2, \dots$ . Как и выше, мы можем положить  $f(p) = \lim f'_i(p)$ ; это и есть исконое вложение.

**8. Локальные свойства многообразия  $M$  в пространстве  $E^m$ .** Пусть  $M_0$  — некоторое  $\mu$ -гладкое многообразие размерности  $n$ , и пусть  $f$  —  $\mu$ -гладкое вложение его в  $E^m$ . Мы хотим показать, что

множество точек  $M = f(M_0)$  имеет „дифференцируемое строение“, эквивалентное „дифференцируемому строению“, определяемому многообразием  $M_0$ .

Возьмем любую точку  $q_0 \in M_0$ ; положим  $p_0 = f(q_0)$ . Так как отображение  $f$  регулярно в точке  $q_0$ , то образы  $\nabla f(q_0, v)$  всех векторов  $v$  на  $M_0$  в точке  $q_0$  образуют векторное пространство  $V_{p_0}$  той же размерности  $n$ , что и  $M_0$ ; это — касательные векторы к  $M$  в точке  $p_0$ . Множество точек  $p_0 + w$  ( $w \in V_{p_0}$ ) образует касательную плоскость  $P_{p_0}$  к  $M$  в точке  $p_0$ . Пусть  $\pi_{p_0}$  — ортогональная проекция пространства  $E^m$  на  $P_{p_0}$ ; положим  $F_{p_0}(q) = \pi_{p_0}(f(q))$ ,  $q \in M_0$ . Так как  $\nabla F_{p_0}(q_0, v) = \nabla f(q_0, v)$ , то отображение  $F_{p_0}$  регулярно в точке  $q_0$ ; поэтому существует окрестность  $U_0$  точки  $q_0$  в  $M_0$ , которая при  $F_{p_0}$  взаимно однозначно отображается на некоторую окрестность  $U$  точки  $p_0$  в  $P_{p_0}$  (II, теорема 7A). Пусть  $F'_{p_0}$  — отображение окрестности  $U$  на  $U_0$ , обратное отображению  $F_{p_0}$ ; положим  $\psi_{p_0}(p) = f(F'_{p_0}(p))$ ;  $\psi_{p_0}$  отображает окрестность  $U$  на  $U^* \subset M$ . Тогда

$$(1) \quad \pi_{p_0} \psi_{p_0} = \pi_{p_0} f F'_{p_0} = F_{p_0} F'_{p_0} = \text{тождественному отображению в } U.$$

Итак, отображения  $\pi_{p_0}$  и  $\psi_{p_0}$  являются обратными одно по отношению к другому. Оба они являются  $\mu$ -гладкими.

Плоскость  $P_{p_0}$  и проекция  $\pi_{p_0}$  множества  $M$  определяются одним лишь точечным множеством  $M$ . Обратное отображение  $\psi_{p_0}$  окрестности  $U$  мы можем рассматривать как систему координат в  $M$ . Соответствующим отображением окрестности  $U$  в  $M_0$  является  $f^{-1} \psi_{p_0} = F'_{p_0}$ ; так как оно гладко, то система координат  $\psi_{p_0}$  в  $M$  дифференцируемо связана с системами координат в  $M_0$ . Мы можем называть  $M$  гладким многообразием в пространстве  $E^m$ .

Следующими леммами 8a, 8b и 8c мы воспользуемся при доказательстве теоремы о триангуляции. Для удобства мы предполагаем, что многообразие  $M$  компактно. В противном случае вместо числа  $\xi_0$  мы рассмотрели бы положительную непрерывную на  $M$  функцию  $\xi_0(p)$  и т. д. Положим

$$(2) \quad P_{p, \xi} = P_p \cap U_{\xi(p)}, \quad M_{p, \xi} = \psi_p(P_{p, \xi});$$

последнее множество определено, если  $\xi$  достаточно мало.

Лемма 8a. Пусть многообразие  $M$ , расположенное в пространстве  $E^m$ , компактно. Тогда существует такое число  $\xi_0 > 0$ , что множество  $M_{p, \xi_0}$  определено для всех  $p \in M$ . Кроме того,

$$(3) \quad \rho(p, M \setminus M_{p, \xi}) \geq \xi, \quad \xi \leq \xi_0.$$

Ясно, что для каждой точки  $p \in M$  существует такое число  $\eta > 0$ , что для всех точек  $p'$  некоторой окрестности точки  $p$  в  $M$  множество  $M_{p', \eta}$  определено. Так как  $M$  компактно, то множество  $M_{p, \xi'_0}$  при некотором  $\xi'_0$  существует для всех точек  $p \in M$ . Выберем  $\xi_0$  так, чтобы было

$$\rho(p, M \setminus M_{p, \xi'_0}) \geq \xi_0, \quad p \in M.$$

Так как

$$\rho(p, M_{p, \xi'_0} \setminus M_{p, \xi}) \geq \xi, \quad \xi < \xi'_0, \quad p \in M,$$

то  $\xi_0$  обладает требуемыми свойствами.

Пусть, как в (1, 15),  $\pi_p v$  — ортогональная проекция вектора  $v$  в плоскость  $P_p$ ; она равна  $\nabla \pi_p(q, v)$  для любой точки  $q \in E^m$ .

**Лемма 8b.** Пусть многообразие  $M$ , расположенное в пространстве  $E^m$ , компактно. Тогда для любого  $\lambda > 0$  существует число  $\xi_1 > 0$ , обладающее следующим свойством. Для любой точки  $p \in M$  и любого вектора  $v$ , касательного к  $M_{p, \xi_1}$ ,

$$(4) \quad |v - \pi_p v| \leq \lambda |\pi_p v| \leq \lambda |v|.$$

В качестве следствия получаем: касательные плоскости в близких точках почти параллельны. Так как для векторов  $v$ , касательных к  $M$  в точке  $p$ ,  $\pi_p v = v$ , то число  $\xi_1(p)$  для данной точки  $p \in M$  существует. Поскольку  $M$  компактно, существует и требуемое число  $\xi_1$ .

*Секущий вектор* к точечному множеству  $Q$  в пространстве  $E^m$  есть вектор вида  $a(q - p)$ , где  $p$  и  $q$  — точки множества  $Q$  и  $a$  — действительное число.

**Лемма 8с.** Пусть  $M$ ,  $\lambda$  и  $\xi_1$  — такие же, как в лемме 8b. Тогда любой секущий вектор  $v$  к множеству  $M_{p, \xi_1}$  удовлетворяет условию (4). Кроме того,

$$(5) \quad |p' - \pi_p(p')| < \lambda \xi, \quad p' \in M_{p, \xi}, \quad \xi \leq \xi_1,$$

$$(6) \quad M_{p, \xi} \subset U_{\lambda \xi}(P_{p, \xi}), \quad P_{p, \xi} \subset U_{\lambda \xi}(M_{p, \xi}), \quad \xi \leq \xi_1.$$

Допустим, что  $v = p_1 - p_0$ , причем точки  $p_0$  и  $p_1$  принадлежат  $M_{p, \xi_1}$ . Положим

$$q_0 = \pi_p(p_0), \quad q_1 = \pi_p(p_1), \quad w = q_1 - q_0 = \pi_p v,$$

$$q_t = (1 - t)q_0 + tq_1, \quad v_t = \nabla_w \psi_p(q_t).$$

Так как  $\pi_p \psi_p$  в  $P_{p, \xi_1}$  есть тождественное отображение, то  $\pi_p v_i = w = \pi_p v$ . Применяя к  $\psi_p$  формулу (II, 1.3), находим

$$v - \pi_p v = \int_0^1 (v_t - \pi_p v_t) dt.$$

Так как  $v_t$  — касательный вектор к  $M_{p, \xi_1}$ , то для него выполняется неравенство (4); следовательно, оно выполняется и для  $v$ , а поэтому и для любого секущего вектора  $av$ .

Возьмем теперь любую точку  $p' \in M_{p, \xi}$ , где  $\xi \leq \xi_1$ . Положим  $v = p' - p$ . Тогда  $v$  — секущий вектор, поэтому

$$|p' - \pi_p p'| = |v - \pi_p v| \leq \lambda |\pi_p v| < \lambda \xi$$

и неравенство (5) доказано. Включения (6) следуют из (5).

**9. О  $n$ -направлениях в  $E^m$ .** Возьмем в  $E^m$  фиксированную ортонормальную систему координат. В этом случае  $n$ -вектор  $\alpha$  в  $E^m$  будет задан, если указать его компоненты  $\alpha^\lambda$  ( $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ ); существует  $\nu = \binom{m}{n}$  таких множеств индексов  $\lambda$  (I, 3). Таким образом,  $n$ -вектору  $\alpha$  соответствует точка пространства  $\mathfrak{A}^\nu$ , и обратно. В силу (I, 12.7) метрика в пространстве  $V_{[n]}$  согласуется с метрикой в  $\mathfrak{A}^\nu$ .

$n$ -векторам, являющимся  $n$ -направлениями (I, 12), соответствует некоторое подмножество  $M_0$  пространства  $\mathfrak{A}^\nu$ . Мы покажем, что  $M_0$  является аналитическим многообразием в  $\mathfrak{A}^\nu$ .

Возьмем любое  $n$ -направление  $\alpha$  и выберем такое ортонормальное множество  $v_1, \dots, v_m$ , что  $\alpha = v_1 \vee \dots \vee v_n$ . Возьмем теперь любое  $n$ -направление  $\alpha'$ , для которого  $|\alpha' - \alpha| < 1/n$ . Запишем  $\alpha' = u_1 \vee \dots \vee u_n$ , где векторы  $u_i$  ортонормальны. Пусть  $\pi$  — ортогональная проекция в подпространство  $P$   $n$ -вектора  $\alpha$ ; положим  $u'_i = \pi u_i$ . Тогда неравенство (I, 15.7) дает

$$|u'_i - u_i| \leq |\alpha - \alpha'| |u_i| < \frac{1}{n},$$

и поэтому в силу (I, 12.17)

$$|u'_1 \vee \dots \vee u'_n - u_1 \vee \dots \vee u_n| < 1,$$

откуда вытекает, что  $u'_1 \vee \dots \vee u'_n \neq 0$ . Следовательно,  $\pi$  взаимно однозначно отображает подпространство  $P'$   $n$ -вектора  $\alpha'$  на  $P$ , и мы можем в  $P'$  найти такие векторы  $v'_1, \dots, v'_n$ , что  $\pi v'_i = v_i$ . Вектор  $v'_i - v_i$  ортогонален к  $P$ , и поэтому он является линейной

комбинацией векторов  $v_{n+1}, \dots, v_m$ . Кроме того,  $\alpha' = c(v'_1 \vee \dots \vee v'_n)$  при некотором  $c$ . Следовательно,

$$(1) \quad \alpha' = c \left( v_1 + \sum_{j=n+1}^m a_{1j} v_j \right) \vee \dots \vee \left( v_n + \sum_{j=n+1}^m a_{nj} v_j \right),$$

если  $|\alpha' - \alpha| < \frac{1}{n}$ .

Возьмем теперь любое аналогичное представление

$$\alpha' = c' (v''_1 \vee \dots \vee v''_n), \quad v''_i = v_i + \sum_{j=n+1}^m b_{ij} v_j.$$

Запишем  $v''_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} v'_j$ ; тогда

$$v_i = \pi v''_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \pi v'_j = \sum_{j=1}^n A_{ij} v_j,$$

чем доказано, что  $A_{ij} = \delta_i^j$  и  $v''_i = v'_i$ ,  $b_{ij} = a_{ij}$ ,  $c' = c$ . Таким образом, представление (1) для  $n$ -направления  $\alpha'$  единственно. Любой выбор множества, состоящего из  $\mu = n(m-n)$  чисел  $a_{ij}$  определяет по формуле (1) некоторое  $n$ -направление. Поэтому окрестность  $n$ -вектора  $\alpha$  в  $M_0$  определяется отображением открытого множества  $O \subset \mathfrak{U}^\mu$  в  $M_0$ . Мы воспользуемся им в качестве системы координат в  $M_0$ .

Из формулы (1, 2.5) для нахождения  $\alpha'^\lambda$  мы видим, что  $\alpha'^\lambda$  является аналитической (в действительности алгебраической) функцией от  $a_{ij}$ . Этим задается аналитическое отображение множества  $O$  в пространство  $\mathfrak{U}^\nu$ , которое, как легко видеть, регулярно. Поэтому будет аналитической и связь между перекрывающимися системами координат и многообразие  $M_0$  является аналитическим.

Найдем „проекцию“  $\pi_0$  окрестности многообразия  $M_0$  в пространстве  $\mathfrak{U}^\nu$  на  $M_0$ ; детали доказательства свойств отображения  $\pi_0$  такие же, как в доказательстве теоремы 10А (см. ниже). Так как  $M_0$  компактно, то мы можем выбрать число  $\rho_0 > 0$ , обладающее следующим свойством. Пусть  $P_p^*$  — нормальная плоскость к  $M_0$  в точке  $p \in M_0$  и  $Q_p^* = P_p^* \cap U_{\rho_0}(p)$ . Положим  $\pi_0(q) = p$  для  $q \in Q_p^*$ . Множества  $Q_p^*$  заполняют некоторую окрестность  $U_0$  многообразия  $M_0$  в  $\mathfrak{U}^\nu$ , попарно не пересекаясь, и  $\pi_0$  есть аналитическое отображение множества  $U_0$  на  $M_0$ .

Так как отображение  $\varphi(\alpha) = -\alpha$  переводит  $n$ -направления в  $n$ -направления, то

$$(2) \quad \pi_0(-\beta) = -\pi_0(\beta), \quad \beta \text{ и } -\beta \text{ в } U_0.$$

**10. Окрестность многообразия  $M$  в пространстве  $E^m$ .** Пусть многообразии  $M$   $\mu$ -гладко в  $E^m$ . Пусть  $P'_p$  — нормальная плоскость к  $M$  в точке  $p \in M$ ; ориентируем ее, и пусть  $\alpha'_p$  — ее  $(m-n)$ -направление<sup>1)</sup>. Рассмотрим  $\alpha'_p$  как точку многообразия  $M_0$ , где  $M_0$  определяется, как в § 9 (с заменой числа  $n$  на  $m-n$ ). Ориентируя так же плоскости  $P'_q$  в некоторой окрестности  $U$  точки  $p$ , мы получаем отображение окрестности  $U$  в  $M_0$ . Так как  $\alpha'_p$  зависит от первых производных в  $M$ , то  $\alpha'_p$  может быть только  $(\mu-1)$ -гладким в  $M$ . Иначе говоря, плоскость  $P'_p$  может только  $(\mu-1)$ -гладко зависеть от точки  $p$  в  $M$ . Мы определим семейство  $P^*_p$  приближенно нормальных плоскостей, которое будет  $\mu$ -гладко зависеть от  $p$ . (При  $\mu = \infty$  мы можем взять  $P^*_p = P'_p$ .) Вспомним обозначения из § 8.

**Теорема 10А.** Пусть  $M$  — некоторое  $\mu$ -гладкое  $n$ -мерное многообразие в пространстве  $E^m$ , и пусть  $\lambda_0 > 0$ . Тогда существует  $\mu$ -гладкое семейство  $(m-n)$ -мерных плоскостей  $P^*_p$  и положительная непрерывная функция  $\delta(p)$  ( $p \in M$ ), обладающие следующими свойствами. Для каждой точки  $p \in M$  плоскость  $P^*_p$  содержит  $p$  и

$$(1) \quad |\pi_p v| \leq \lambda_0 |v|, \text{ если } v \text{ лежит в } P^*_p.$$

Положим

$$(2) \quad Q^*_p = P^*_p \cap U_{\delta(p)}(p).$$

Множества  $Q^*_p$  заполняют некоторую окрестность  $U^*$  многообразия  $M$ , попарно не пересекаясь. Положим

$$(3) \quad \pi^*(q) = p, \text{ если } q \in Q^*_p.$$

Тогда  $\pi^*$  есть  $\mu$ -гладкое отображение окрестности  $U^*$  на  $M$  и

$$(4) \quad |\pi^*(q) - q| \leq 2\delta(q, M), \quad q \in U^*.$$

Мы можем выбрать такое число  $\lambda_1 \leq \lambda_0/2$ , что

$$(5) \quad U_1 = U_{\lambda_1}(M_0) \subset U_0, \quad |\pi_0 \alpha - \alpha| < \frac{\lambda_0}{2} \quad (\alpha \in U_1),$$

где  $M_0$  и т. д. — те же, что и в § 9. Так как плоскость  $P'_p$  непрерывно зависит от  $p$  в  $M$ , то мы можем выбрать в  $M$  такое допустимое множество систем координат  $\chi_1, \chi_2, \dots$  (§ 6), что для

<sup>1)</sup> Таким образом, многообразие  $M$  предполагается  $n$ -мерным. — Прим. ред.

произвольно выбранной точки  $p_i \in U'_i = \chi_i(O_3)$  и выбранных ориентаций плоскостей  $P'_p$  ( $p \in U'_i$ )

$$(6) \quad |\alpha'_p - \alpha'_{p_i}| < \lambda_1, \quad p \in U'_i.$$

Пусть  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — соответствующее  $\mu$ -гладкое разложение единицы. [Если  $\rho_i$  — функции, определенные в (7.1), то положим  $\varphi_i(p) = \rho_i(p) / \sum_j \rho_j(p)$ ; тогда  $0 \leq \varphi_i \leq 1$ ,  $\varphi_i > 0$  в  $\bar{U}_i$ ,  $\varphi_i = 0$  в  $M \setminus U'_i$  и  $\sum \varphi_i = 1$  в  $M$ .]

Для заданной точки  $p \in M$  определим плоскость  $P^*_p$  следующим образом. Пусть  $U'_{\lambda_1}, \dots, U'_{\lambda_s}$  — те из множеств  $U'_k$ , которые содержат  $p$ . Ориентируем плоскость  $P'_p$  и соответственно ориентируем плоскости  $P'_{p_{\lambda_i}}$  [эти ориентации определяются условием (6)].

Пользуясь  $\mathfrak{U}^\vee$  как векторным пространством, положим

$$(7) \quad \alpha''_p = \sum_i \varphi_{\lambda_i}(p) \alpha'_{p_{\lambda_i}}, \quad \alpha^*_p = \pi_0 \alpha''_p;$$

существование  $(m-n)$ -направления  $\alpha^*_p$  доказывается ниже. Пусть  $P^*_p$  —  $(m-n)$ -мерная плоскость, проходящая через  $p$ , которая при надлежащей ориентации имеет  $(m-n)$ -направление  $\alpha^*_p$ . Если бы мы взяли противоположную ориентацию плоскости  $P'_p$ , то ввиду (9.2) была бы найдена та же самая плоскость  $P^*_p$ .

Так как функции  $\varphi_i$  и отображение  $\pi_0$  являются  $\mu$ -гладкими, то плоскость  $P^*_p$  также  $\mu$ -гладко зависит от точки  $p \in M$ . В силу неравенства (6) и соотношений  $\varphi_j(p) \geq 0$ ,  $\sum \varphi_j(p) = 1$  мы имеем  $|\alpha''_p - \alpha'_{p_i}| < \lambda_1$ ; поэтому  $\alpha''_p \in U_1$  и неравенство (5) дает  $|\alpha^*_p - \alpha''_p| < \lambda_0/2$ ; следовательно,

$$(8) \quad |\alpha^*_p - \alpha'_p| < \lambda_0.$$

Пусть  $\pi'_p$  — ортогональная проекция в плоскость  $P'_p$ . Тогда для любого вектора  $v$ , лежащего в плоскости  $P^*_p$ , неравенство (I, 15.7) дает

$$|\pi_p v| = |v - \pi'_p v| \leq |\alpha^*_p - \alpha'_p| |v| \leq \lambda_0 |v|,$$

а это и есть неравенство (1).

Возьмем любую точку  $p_0 \in M$ . Определим  $\psi_{p_0}$ , как в § 8, и пусть  $\pi^{**}_p$  — ортогональная проекция в плоскость  $P^*_p$ . Для любого вектора  $v$  в  $E^m$  запишем

$$v = v' + v'', \quad v' \in P_{p_0}, \quad v'' \in P^*_{p_0}$$

и определим отображение  $\Psi$  некоторой окрестности точки 0 в  $V(E^m)$  в пространство  $E^m$ , положив

$$(9) \quad p = \psi_{p_0}(p_0 + v'), \quad q = \Psi(v) = p + \pi_p^{**}(v'').$$

[Мы можем считать, что в неравенстве (1)  $\lambda_0 < 1$ ; тогда  $P_{p_0}^*$  будет пересекать  $P_{p_0}$  лишь в одной точке.] Так как  $\psi_{p_0}$  и  $P_q^*$   $\mu$ -гладки, то  $\mu$ -гладкими будут и  $\pi_p^{**}$  и  $\Psi$ . Так как, далее,

$$\begin{aligned} \nabla_{v'} \psi_{p_0}(p_0) &= v', & \nabla_{v'} \Psi(0) &= v' \quad (v' \in P_{p_0}), \\ \pi_{p_0}^{**}(v'') &= v'', & \nabla_{v''} \Psi(0) &= v'' \quad (v'' \in P_{p_0}^*), \end{aligned}$$

то  $\nabla \Psi$  является тождественным отображением при  $v = 0$ ; поэтому отображение  $\Psi$  регулярно в точке 0. Следовательно (II, теорема 7А),  $\Psi$  вблизи 0 имеет  $\mu$ -гладкое обратное отображение; мы можем записать

$$(10) \quad v = v' + v'' = \Gamma_1(q) + \Gamma_2(q), \quad \Psi(\Gamma_1(q) + \Gamma_2(q)) = q.$$

Положим

$$(11) \quad \pi^*(q) = \Psi(\Gamma_1(q)) = \psi_{p_0}(p_0 + \Gamma_1(q))$$

вблизи  $p_0$ ; это —  $\mu$ -гладкое отображение некоторой окрестности точки  $p_0$  в многообразии  $M$ , при котором  $\pi^*(q) = p$ , если  $q \in P_p^*$ .

Это показывает, что для данной точки  $p_0 \in M$  существует такое  $\delta_0 > 0$ , что в  $U_{\delta_0}(p_0)$  множества  $Q_p^*$  обладают требуемыми свойствами. Поэтому, очевидно, существует функция  $\delta(p)$ , которая нам требовалась. (Этого могло бы и не быть, если бы  $M$  было образом многообразия при несобственном отображении.)

Очевидно, мы можем предполагать  $\lambda_0$  и  $\delta(p)$  настолько малыми, чтобы выполнялось неравенство (4). Доказательство можно провести следующим образом. Возьмем  $\lambda_0 < 1/4$ . Для  $\lambda = 1/8$  найдем  $\xi(p)$  по леммам 8а и 8с (некомпактный случай). Возьмем  $\delta(p) \leq \xi(p)/2$ . Теперь допустим, что  $p = \pi^*(q)$ ,  $v = q - p$ ,  $|v| = a$ . Тогда

$$\rho(q, P_p) = |v - \pi_p v| \geq |v| - \lambda_0 |v| \geq \frac{3a}{4},$$

$$M_{p, 2a} \subset U_{2a\lambda}(P_p), \quad \rho(q, M_{p, 2a}) \geq \frac{3a}{4} - \frac{a}{4} = \frac{a}{2}.$$

$$\rho(q, M \setminus M_{p, 2a}) \geq \rho(p, M \setminus M_{p, 2a}) - a \geq a,$$

и поэтому неравенство (4) выполняется.

Лемма 10а. Возьмем  $\lambda$  и  $\xi_1 \leq \xi_0$  такими же, как в § 8, и допустим, что  $\lambda + \lambda_0 < 1$ . Возьмем любые точки  $p, p' \in M$ ,

для которых  $|p' - p| < \xi_1$ . Тогда плоскость  $P_{p'}^*$  пересекает плоскость  $P_p$  в единственной точке и

$$(12) \quad |\pi_p v| \leq (\lambda + \lambda_0) |v|, \text{ если вектор } v \text{ лежит в } P_{p'}^*.$$

Запишем  $v = \pi_{p'} v + w$ . Возьмем в  $P_p$  произвольный единичный вектор  $u$ . Так как вектор  $w$  ортогонален к  $P_{p'}$ , то  $\pi_{p'} u \cdot w = 0$ . В силу (8.3)  $p \in M_{p', \xi_1}$ ; поэтому на основании неравенства (8.4)

$$|u \cdot w| = |(u - \pi_{p'} u) \cdot w| \leq \lambda |w| \leq \lambda |v|.$$

Следовательно,  $|\pi_p w| \leq \lambda |v|$ . В силу (1) имеем также  $|\pi_{p'} v| \leq \leq \lambda_0 |v|$ . Из этих неравенств следует неравенство (12). Если бы утверждение относительно пересечений было неверно, то существовал бы единичный вектор  $u$ , принадлежащий обоим плоскостям  $P_{p'}^*$ ,  $P_p$ . Но тогда из неравенства (12) мы получили бы  $|u| = |\pi_p u| < |u|$ , что невозможно.

Пример. Пусть  $M$  — гладкое одномерное многообразие в  $E^2$ , задаваемое уравнением  $y = |x|^{3/2}$ . Тогда нормаль к нему в начале координат пересекает соседние нормали в точках, сколь угодно близких к началу координат.

**11. Проекция вдоль плоскости.** Пусть  $P$  и  $P'$  — плоскости размерности  $n$  и  $m$  —  $n$  соответственно в пространстве  $E^m$ , имеющие лишь одну общую точку. Тогда каждой точке  $p \in E^m$  соответствует единственная такая точка  $q = \pi'(p) \in P$ , что  $q - p$  есть вектор, параллельный плоскости  $P'$ . Мы будем называть  $\pi'$  проекцией в плоскость  $P$  вдоль плоскости  $P'$ . Вспомним определение показателя независимости  $\text{ind}(P, P')$  в (П. II, 14).

Лемма 11а. Пусть дано многообразие  $M$  в пространстве  $E^m$ ; пусть  $\lambda$  и  $\xi_1$  — числа, указанные в лемме 8с. Возьмем точку  $p \in M$ , и пусть  $P'$  — такая  $(m - n)$ -мерная плоскость, что

$$(1) \quad \text{ind}(P_p, P') \geq \lambda' > \lambda.$$

Тогда проекция  $\pi'$ , рассматриваемая в  $M_{p, \xi_1}$ , является вложением в  $P_p$ . Мы имеем

$$(2) \quad |\pi'(q) - q| < \frac{\lambda \xi}{\lambda'}, \text{ если } q \in M_{p, \xi}, \quad \xi \leq \xi_1,$$

$$(3) \quad P_{p, c} \subset \pi'(M_{p, \xi}), \quad c = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right) \xi, \quad \xi \leq \xi_1.$$

Прежде всего, пусть  $v \neq 0$  — любой касательный или секущий вектор к  $M_{p, \xi_1}$ . Тогда имеет место неравенство (8.4) и, так как  $\lambda < \lambda'$ , то вектор  $v$  не принадлежит  $P'$ . Следовательно, проекция  $\pi'$  на множестве  $M_{p, \xi_1}$  регулярна и взаимно однозначна и поэтому является вложением.

Возьмем, далее, любую точку  $q \in M_{p,\xi}$ ,  $\xi \leq \xi_1$ ; положим

$$q' = \pi'(q), \quad q'' = \pi_p(q), \quad v = q - q'.$$

Тогда вектор  $v$  принадлежит  $P'$ , и поэтому

$$|q - q''| = |v - \pi_p v| \geq \lambda' |v|.$$

Пользуясь неравенством (8.5), получаем

$$|\pi'(q) - q| = |v| \leq \frac{|q - q''|}{\lambda'} < \frac{\lambda \xi}{\lambda'}.$$

Допустим, что включение (3) не имеет места; тогда возьмем точку  $p' \in P_{p,c}$ , не принадлежащую множеству  $\pi'(M_{p,\xi})$ . Отрезок  $pp'$  содержит некоторую точку  $p^*$ , являющуюся предельной для точек, лежащих в  $\pi'(\bar{M}_{p,\xi})$ , и для точек, не лежащих в  $\pi'(\bar{M}_{p,\xi})$ . Так как это множество компактно, то существует точка  $q \in \bar{M}_{p,\xi}$ , для которой  $\pi'(q) = p^*$ . Если бы было  $q \in M_{p,\xi}$ , то так как отображение  $\pi'$  регулярно в точке  $q$ , была бы покрыта некоторая окрестность точки  $p^*$ . Но это не так; поэтому  $|\pi_p(q) - p| = \xi$ . Однако

$$|p - \pi_p(q)| \leq |p - p^*| + |\pi'(q) - q| < c + \frac{\lambda \xi}{\lambda'} = \xi,$$

т. е. мы снова получаем противоречие; следовательно, включение (3) имеет место.

### В. Триангуляция многообразий

**12. Теорема о триангуляции.** Пусть  $M$  — некоторое  $\mu$ -гладкое многообразие. Под  $\mu$ -гладкой триангуляцией многообразия  $M$  мы понимаем пару, состоящую из симплициального комплекса  $K$  и гомеоморфизма  $\pi^*$  комплекса  $K$  на многообразие  $M$ , обладающего следующим свойством. Для каждого  $n$ -мерного симплекса  $\sigma$  комплекса  $K$  в многообразии  $M$  существует такая система координат  $\chi$  (определенная в некотором открытом множестве пространства  $\mathbb{A}^n$ ), что в некоторой окрестности образа  $\pi^*(\sigma)$  в  $M$  определено обратное отображение  $\chi^{-1}$  и отображение  $\chi^{-1}\pi^*$  является аффинным в  $\sigma$ .

**Теорема 12А<sup>1)</sup>.** Каждое  $\mu$ -гладкое многообразие  $M$  имеет  $\mu$ -гладкую триангуляцию.

**Замечания.** (а) В доказательстве, приводимом ниже,  $M$  является многообразием в пространстве  $E^m$ . Нетрудно было бы,

<sup>1)</sup> Cairns S. S., On the triangulation of regular loci, *Ann. Math.*, 35 (1934), 579—587; Triangulation of the manifold of class 1, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 41 (1935), 549—552. (Свойство аффинности здесь не рассматривается). По поводу усовершенствований в доказательстве см. Whitehead J. H. C., On  $C^1$ -complexes, *Ann. Math.*, 41 (1940), 809—824.

несколько усложнив доказательство, показать, что существует (криволинейная) триангуляция пространства  $E^m$ , некоторый подкомплекс которой соответствует многообразию  $M$ .

(б) Предположим, что  $M$  есть „многообразие с границей“; оно составлено из кусков многообразий  $M_i^r$  различных размерностей, простым образом приложенных один к другому. Можно сначала вложить его в  $E^m$ , а затем триангулировать.

(с) Можно было бы задать вопрос: существует ли триангуляция многообразия  $M$ , обладающая следующим свойством: для каждой вершины  $p_i$  комплекса  $K$  существует такая система координат  $\chi$ , содержащая звезду<sup>1)</sup>  $St(p_i)$ , что отображение  $\chi^{-1}\pi^*$  является аффинным на каждом симплексе этой звезды? Вообще говоря, такой триангуляции не существует; она невозможна ни для какого компактного односвязного многообразия, например для двумерной сферы<sup>2)</sup>.

**13. набросок доказательства.** В силу теоремы 1А мы можем считать, что  $M$  есть  $n$ -мерное многообразие в пространстве  $E^m$  ( $m = 2n + 1$ ) без предельного множества. Мы проведем доказательство во всех деталях для случая, когда многообразие  $M$  компактно; этот случай несколько менее сложен (см. ниже).

Выбирается некоторое достаточно мелкое разбиение  $L_0$  пространства  $E^m$  на кубы; пусть  $L$  — регулярное подразделение разбиения  $L_0$  (П. II, 3). Слегка передвинем вершины разбиения  $L$ , образовав новую триангуляцию  $L^*$  пространства  $E^m$ , которая будет находиться „в общем положении“ относительно  $M$ . В частности,  $M$  не пересекает ни одного симплекса из  $L^*$  размерности  $< s = m - n$ . Так как симплексы триангуляции  $L^*$  весьма малы по отношению к кривизне многообразия  $M$  и так как для каждого симплекса  $\sigma^s$ , который имеет с  $M$  общие точки,  $M$  находится на некотором положительном расстоянии от  $\partial\sigma^s$ , то  $M$  пересекает  $\sigma^s$  в единственной точке под не слишком малым углом. Пересечения многообразия  $M$  с симплексами триангуляции  $L^*$  приближенно являются выпуклыми клетками, и искомый комплекс  $K$  изоморфен регулярному подразделению этого множества клеток. Гомеоморфизм полиэдра  $K$  на  $M$  осуществляется отображением  $\pi^*$  теоремы 10А.

<sup>1)</sup> Точнее,  $\chi^{-1}$  должно быть определено на множестве  $\pi^*St(p_i)$ . — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Если  $n$ -мерное многообразие  $M$  является „локально аффинным“ в этом смысле и односвязным, то, как легко видеть, существует отображение многообразия  $M$  в  $E^n$ , являющееся локально аффинным и локально взаимно однозначным; поэтому многообразие  $M$  не компактно. (Этим доказательством я обязан Нейенхёйсу.)

Сделаем несколько замечаний по поводу доказательства для некомпактного случая. Возьмем точку  $p_0 \in E^m$ . В каждом шаре  $R_i = U_{2^i}(p_0)$  мы имеем компактную часть многообразия  $M$ , к которой применим описанный выше метод доказательства. Мы должны выбрать триангуляцию  $L$  пространства  $E^m$  так, чтобы доказательство (локальное по своему характеру) было согласованным в целом. Поэтому комплекс  $L_0$  должен состоять из кубов, которые становятся все мельче и мельче по мере того, как мы удаляемся от  $p_0$ . Мы можем выбрать их так, чтобы отношение длин ребер соседних кубов было равно  $1/2$ , или  $1$ , или же  $2$ . Тогда можно воспользоваться фиксированными числами  $\Theta_0$  и  $N$  (см. ниже). Остальные числа будут соответственно меньше. В леммах 8а и 8с вместо числа  $\xi$  нужно будет воспользоваться непрерывной функцией  $\xi(p)$ .

**14. Полнота.** И в теории площадей, и в теории интегрирования для случая нескольких переменных хорошо известно, что использование  $r$ -мерных множеств, у которых отношение объема к  $r$ -й степени диаметра очень мало, может привести к затруднениям. Например, если дана гладкая поверхность  $S$  в  $E^3$ , то в произвольной окрестности данной точки  $p$  поверхности  $S$ , где  $S$  не является плоской, можно найти треугольник с вершинами на  $S$ , почти перпендикулярный к  $S$ ; но указанное выше отношение в этом случае должно быть мало. Это — основание для примера Шварца полиэдральной поверхности, вписанной в цилиндр и имеющей произвольно большую площадь<sup>1)</sup>. Мы установим здесь некоторые свойства указанного выше отношения.

Пусть дан  $r$ -мерный симплекс  $\sigma$  ( $r > 0$ ) в евклидовом пространстве  $E^m$  [в качестве  $\sigma$  можно было бы взять любое множество, которому приписаны „размерность“  $r$ , „объем“  $|\sigma|$  и „диаметр“  $\text{diam}(\sigma)$ ]. Определим его *полноту*, полагая

$$(1) \quad \Theta(\sigma) = \frac{|\sigma|}{\delta_\sigma^r}, \quad \text{где } \delta_\sigma = \text{diam}(\sigma).$$

Если  $v_1, \dots, v_r$  — определяющее множество векторов для симплекса  $\sigma$ , то на основании (III, 1.3) и (I, 12.16) мы получаем

$$(2) \quad |\sigma| = \frac{|v_1 \vee \dots \vee v_r|}{r!} \leq \frac{|v_1| \dots |v_r|}{r!} \leq \frac{\delta_\sigma^r}{r!};$$

<sup>1)</sup> Schwarz H. A., Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe, *Gesammelte Math. Abhandl.*, I, 309—311. Этот пример описан, например, в книге Радона [Radon T., Length and area, *Amer. Math. Soc. Colloquium Publications*, 30 (1948), 6—7]. [См. также Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, М., 1956, стр. 304.—Прим. перев.]

поэтому

$$(3) \quad \Theta(\sigma) \leq \frac{1}{r!}, \text{ если } \dim(\sigma) = r.$$

Высота  $r$ -мерного симплекса  $\sigma$  в  $E^m$  есть расстояние от вершины до плоскости противоположной  $(r-1)$ -мерной грани.

Лемма 14а. Для любого  $r$ -мерного симплекса  $\sigma$  и любой высоты  $h$  симплекса  $\sigma$

$$(4) \quad h \geq r! \Theta(\sigma) \delta_\sigma.$$

Пусть, скажем,  $\sigma = p_0 \dots p_r$ ,  $\sigma' = p_1 \dots p_r$  и  $h$  — высота, опущенная из вершины  $p_0$ . Тогда

$$|\sigma| = \frac{h |\sigma'|}{r}, \quad |\sigma'| \leq \frac{\delta_\sigma^{r-1}}{(r-1)!},$$

и поэтому

$$h = \frac{r |\sigma|}{|\sigma'|} = \frac{r \Theta(\sigma) \delta_\sigma^r}{|\sigma'|} \geq r! \Theta(\sigma) \delta_\sigma.$$

В качестве непосредственного следствия из леммы получаем

$$(5) \quad |p_j - p_i| \geq r! \Theta(\sigma) \delta_\sigma, \text{ если } j \neq i, \sigma = p_0 \dots p_r.$$

Пусть  $\sigma^k$  — некоторая грань симплекса  $\sigma = \sigma^r$ . Выберем определяющее множество  $v_1, \dots, v_r$  векторов для  $\sigma$  так, чтобы  $v_1, \dots, v_k$  было определяющим множеством для  $\sigma^k$ . Неравенство (1, 12.14) показывает, что

$$\Theta(\sigma) = \frac{|v_1 \vee \dots \vee v_r|}{r! \delta_\sigma^r} \leq \frac{|v_1 \vee \dots \vee v_k|}{r! \delta_\sigma^k},$$

и поэтому

$$(6) \quad r! \Theta(\sigma^r) \leq k! \Theta(\sigma^k), \quad \sigma^k \text{ — грань симплекса } \sigma^r.$$

Лемма 14б. Для любого  $r$ -мерного симплекса  $\sigma = p_0 \dots p_r$  и любой точки <sup>1)</sup>  $p = \mu_0 p_0 + \dots + \mu_r p_r$  в  $\sigma$

$$(7) \quad \rho(p, \partial\sigma) \geq r! \Theta(\sigma) \delta_\sigma \inf \{\mu_0, \dots, \mu_r\}.$$

Пусть  $q$  — ближайшая к  $p$  точка границы  $\partial\sigma$ ; тогда отрезок  $pq$  параллелен некоторой высоте  $h$  симплекса  $\sigma$ , например высоте, опущенной из вершины  $p_0$ . Теперь неравенство (4) дает

$$\rho(p, \partial\sigma) = |q - p| = \mu_0 h \geq r! \Theta(\sigma) \delta_\sigma \inf \{\mu_i\}.$$

<sup>1)</sup> Предполагается, что  $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_r = 1$  [т. е.  $\mu_i$  — барицентрические координаты; см. (П. I, II)]; аналогичное замечание относится далее и ко всем случаям, когда точка симплекса выражается через его вершины. — Прим. ред.

Функция  $\Theta(\sigma)$  является, конечно, непрерывной относительно положения вершин симплекса  $\sigma$ . Установим условие равномерности.

**Лемма 14с.** Для данных  $r$ ,  $\Theta_0 > 0$  и  $\varepsilon > 0$  существует число  $\rho_0 > 0$ , обладающее следующим свойством. Возьмем любой симплекс  $\sigma = p_0 \dots p_r$  с полнотой  $\Theta(\sigma) \geq \Theta_0$  и любые точки  $q_0, \dots, q_r$ , для которых  $|q_i - p_i| \leq \rho_0 \delta_\sigma$  (при всех  $i$ ). Тогда  $\sigma' = q_0 \dots q_r$  есть симплекс и  $\Theta(\sigma') \geq \Theta_0 - \varepsilon$ .

Выберем  $\rho_0 < 1/2$  так, чтобы было

$$(8) \quad \frac{\Theta_0}{(1+2\rho_0)^r} - \frac{2\rho_0(1+2\rho_0)^{r-1}}{(r-1)!(1-2\rho_0)^r} > \Theta_0 - \varepsilon.$$

Возьмем теперь симплекс  $\sigma'$  и положим  $v_i = p_i - p_0$ ,  $w_i = q_i - q_0$ . Так как  $|w_i| \leq (1+2\rho_0)\delta_\sigma$ , то неравенство (1, 12.17) дает

$$|w_1 \vee \dots \vee w_r - v_1 \vee \dots \vee v_r| \leq r(1+2\rho_0)^{r-1} \delta_\sigma^{r-1} 2\rho_0 \delta_\sigma;$$

поэтому в силу (III, 1.3)

$$|\sigma'| \geq |\sigma| - \frac{2\rho_0(1+2\rho_0)^{r-1} \delta_\sigma^r}{(r-1)!}.$$

Так как  $(1-2\rho_0)\delta_\sigma \leq \delta_{\sigma'} \leq (1+2\rho_0)\delta_\sigma$ , то, применяя неравенство (8), получаем нужное нам неравенство.

**15. Линейные комбинации векторов-ребер симплексов.** Если векторы  $v_1, \dots, v_r$  ортонормальны и  $v = \sum a_i v_i$ , то  $|v| = (\sum a_i^2)^{1/2}$ . Если  $v_1, \dots, v_r$  — единичные, но не ортогональные векторы, то норма  $|v|$  может выражаться совсем не так, в частности, она может быть намного меньше (но она не равна нулю, если какое-либо  $a_k \neq 0$  и векторы  $v_i$  независимы). Мы хотим вывести некоторые неравенства.

**Лемма 15а.** Пусть даны векторы  $u_1, \dots, u_r$  и числа  $a_1, \dots, a_r$ ; тогда

$$(1) \quad \left| \sum a_i u_i \right| \geq \sup \{ |a_1|, \dots, |a_r| \} |u_1 \vee \dots \vee u_r|,$$

если  $|u_i| = 1$  для всех  $i$ .

Допустим, что это не так. Пусть  $a = |a_r|$  — наибольшая из абсолютных величин  $|a_i|$ . Положим

$$w = b_1 u_1 + \dots + b_{r-1} u_{r-1} + a_r u_r,$$

где  $b_i$  выбраны так, чтобы норма  $|\omega|$  была минимальной. Тогда

$$\begin{aligned} |\omega| &\leq \left| \sum a_i u_i \right| < a |u_1 \vee \dots \vee u_r| = \\ &= |u_1 \vee \dots \vee u_{r-1} \vee \omega| \leq |u_1| \dots |u_{r-1}| |\omega| = |\omega|, \end{aligned}$$

что противоречиво.

**Лемма 15b.** Пусть  $u_1, \dots, u_r$  — независимые единичные векторы, параллельные ребрам  $r$ -мерного симплекса  $\sigma$ . Тогда

$$(2) \quad \left| \sum a_i u_i \right| \geq r! \sup \{ |a_1|, \dots, |a_r| \} \Theta(\sigma),$$

$$(3) \quad |a_i| \leq \frac{\left| \sum a_j u_j \right|}{r! \Theta(\sigma)}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Пусть  $v_1, \dots, v_r$  — соответствующее определяющее множество векторов-ребер симплекса  $\sigma$ . Тогда  $u_i = v_i / |v_i|$  и, если  $a = \sup \{ |a_i| \}$ , предыдущая лемма дает

$$\begin{aligned} \left| \sum a_i u_i \right| &\geq a |u_1 \vee \dots \vee u_r| = a \frac{|v_1 \vee \dots \vee v_r|}{|v_1| \dots |v_r|} \geq \\ &\geq \frac{r! a |\sigma|}{\delta_\sigma^r} = r! a \Theta(\sigma), \end{aligned}$$

т. е. мы получаем неравенство (2). Из него следует и второе из наших неравенств.

Покажем теперь, что, если симплекс  $\sigma$  близок к некоторой плоскости и его полнота  $\Theta(\sigma)$  не слишком мала, то  $\sigma$  почти параллелен этой плоскости.

**Лемма 15с.** Пусть  $\pi$  — ортогональная проекция в плоскость  $P$ . Пусть  $\sigma = p_0 \dots p_r$  — такой симплекс, что

$$(4) \quad \sigma \subset U_\zeta(P), \quad |p_i - p_0| \geq \delta > 0 \quad (i = 1, \dots, r).$$

Тогда для любого единичного вектора  $u$ , расположенного в плоскости симплекса  $\sigma$ ,

$$(5) \quad |u - \pi u| \leq \frac{2\zeta}{(r-1)! \Theta(\sigma) \delta}.$$

Векторы  $v_i = p_i - p_0$  ( $i = 1, \dots, r$ ) образуют для  $\sigma$  определяющее множество. Полагая  $u_i = v_i / |v_i|$ , имеем

$$|u_i - \pi u_i| = \frac{|v_i - \pi v_i|}{|v_i|} \leq \frac{2\zeta}{\delta}.$$

Пусть, скажем,  $u = \sum a_i u_i$ . Тогда неравенство (3) дает

$$|u - \pi u| = \left| \sum a_i (u_i - \pi u_i) \right| \leq r \frac{1}{r! \Theta(\sigma)} \frac{2\sigma}{\delta},$$

и мы получили неравенство (5).

**16. Величины, используемые в доказательстве.** Мы укажем каким образом различные величины входят в доказательство. Кубы разбиения  $L_0$  имеют длину ребра  $h$ ; симплексы триангуляции  $L$  имеют диаметр  $\delta$ . Для получения вершин триангуляции  $L^*$  вершины триангуляции  $L$  сдвигаются на расстояния, не превосходящие  $\rho_0 \delta$ ; тогда каждый симплекс триангуляции  $L^*$  имеет полноту  $\geq \Theta_0$  (лемма 14с). К каждой вершине триангуляции  $L^*$  примыкает не более чем  $N$  симплексов из  $L^*$ .

Сдвигая вершину  $p_i$  триангуляции  $L$  в вершину  $p_i^*$  триангуляции  $L^*$ , мы должны избежать попадания точки  $p_i^*$  не более чем в  $N$  множеств  $Q_j$ , общий объем которых меньше объема шара радиуса  $\rho_0 \delta$ ; поэтому вершина  $p_i^*$  может быть найдена. Объем множества  $Q_j$  определяется числом  $\rho_1$ . Расстояния от  $M$  до нульмерного остова, одномерного остова, и т. д. триангуляции  $L^*$  определяются последовательно с помощью леммы (П. II, 14b) и индукции. Граница для каждого из этих расстояний получается из предыдущей умножением на  $\rho = \rho_1 \rho_0 / 4$ . Наконец, расстояние от  $M$  до  $(s-1)$ -мерного остова триангуляции  $L^*$  не менее  $4\alpha\delta = 2a$ . Расстояние от той части касательной плоскости  $P_p$  к многообразию  $M$  в любой точке  $p$ , которая лежит не далее чем на  $7\delta = \xi - \delta$  от  $p$ , до этого остова не меньше  $a$ .

Каждый симплекс  $\sigma$  комплекса  $K$  имеет высоту, не меньшую, чем  $b = \beta\delta$ ; его полнота не менее  $\Theta_1$ . Центр  $p_1$  любого  $n$ -мерного симплекса  $\sigma_i$  комплекса  $K$  находится на расстоянии  $\geq c = \gamma\delta$  от  $\partial\sigma_i$ ; этим мы пользуемся, когда применяем лемму (П. II, 15а). Доказательство указанных выше свойств и требование, чтобы симплексы из  $K$  были почти касательными к  $M$  и т. д., налагают условие на степень поворота касательных плоскостей к  $M$  по отношению к размерам симплекса комплекса  $K$ . Таким образом определяется некоторое число  $\lambda$ , дающее в соответствии с леммами 8а и 8с число  $\xi$ , а поэтому  $h$  и  $\delta$ .

**17. Комплекс  $L$ .** Если мы возьмем некоторое кубическое разбиение пространства  $E^m$  и регулярное подразделение  $\mathfrak{S}$  этого разбиения, то все <sup>1)</sup> симплексы из  $\mathfrak{S}$  будут иметь одну и ту же полноту, которую мы обозначим через  $2\Theta_0$ . [В действительности

<sup>1)</sup>  $m$ -мерные. — Прим. ред.

$2\Theta_0 = 1/(m! m^{m/2})$ .] Пусть  $N$  — наибольшее число симплексов в любой звезде вершины подразделения  $\mathfrak{S}$ .

Выберем по лемме 14с такое число  $\rho_0 < 1/(4m^{1/2})$ , что для любого  $n$ -мерного симплекса  $\sigma = p_0 \dots p_n$ , если  $\Theta(\sigma) \geq 2\Theta_0$  и  $|q_i - p_i| \leq \leq \rho_0 \delta_\sigma$ , то  $\tau = q_0 \dots q_n$  есть симплекс с полнотой  $\Theta(\tau) \geq \Theta_0$ ; при этом мы будем считать, что  $\rho_0 \leq 2\rho^*/m^{1/2}$ , где число  $\rho^*$  выбрано, как в лемме (П. II, 16а).

Существует число  $\rho_1 > 0$ , обладающее следующим свойством. Пусть  $Q$  — любой шар в  $E^m$  произвольного радиуса  $a$ , и пусть  $Q'$  — часть шара  $Q$ , заключенная между любыми двумя параллельными  $(m-1)$ -мерными плоскостями, находящимися одна от другой на расстоянии  $\leq 2\rho_1 a$ . Тогда мы имеем неравенство для объемов

$$(1) \quad |Q'| < \frac{|Q|}{N}.$$

Положим <sup>1)</sup>

$$(2) \quad \rho = \frac{\rho_0 \rho_1}{4}, \quad \alpha_r = \frac{\rho^r \rho_0 \rho_1}{2}, \quad \alpha = \frac{\alpha_s - 1}{4},$$

$$(3) \quad \beta = \frac{\Theta_0 \alpha}{m^{1/2} N}, \quad \Theta_1 = \frac{\beta^n}{2^n}, \quad \gamma = \frac{(n-1)! \Theta_1 \beta}{2}.$$

Выберем  $\rho'_0 \leq 1/4$  по лемме 14с, взяв в этой лемме  $n$ ,  $\Theta_1$  и  $\Theta_1/2$  вместо  $r$ ,  $\Theta_0$  и  $\varepsilon$ . Положим

$$(4) \quad \lambda = \inf \left\{ \frac{\alpha \gamma}{128}, \frac{\rho'_0 \alpha \beta}{8} \right\}.$$

Пусть проекция  $\pi^*$ , рассматривавшаяся в теореме 10А, определена в окрестности  $U^* = U_{\partial_0}(M)$ ; мы берем в этой теореме  $\lambda_0 < 1/4$ .

Выберем  $\xi_0$  по лемме 8а, выберем затем  $\xi_1 \leq \xi_0$  по лемме 8б и положим

$$(5) \quad \xi = \inf \left\{ \xi_1, \frac{\alpha \delta_0}{3\lambda} \right\}, \quad \delta = \frac{\xi}{8}, \quad h = \frac{2\delta}{m^{1/2}},$$

$$(6) \quad a = 2\alpha\delta, \quad b = \beta\delta, \quad c = \gamma\delta.$$

Пусть  $L_0$  — кубическое разбиение пространства  $E^m$ , кубы которого имеют ребро длины  $h$ , и пусть  $L$  — регулярное подразделение разбиения  $L_0$ . Тогда каждый одномерный симплекс из  $L$  имеет длину  $\geq h/2$ , а  $m$ -мерные симплексы имеют диаметр  $\delta$  <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Напомним, что  $s = m - n$  (см. § 13). — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Следует отметить, что все введенные ранее константы  $\Theta_0$ ,  $N$ ,  $\rho_0$  и т. д. относятся к *любому* кубическому разбиению пространства  $E^m$  и его регулярному подразделению (независимо от длины ребра), в частности, к  $L_0$  и  $L$ . — *Прим. ред.*

**18. Комплекс  $L^*$ .** Пусть вершинами комплекса  $L$  являются точки  $p_1, p_2, \dots$ . Выберем новые точки  $p_1^*, p_2^*, \dots$ , удовлетворяющие условию

$$(1) \quad |p_i^* - p_i| < \rho_0 \delta \quad (\text{для всех } i).$$

В силу выбора числа  $\rho_0$  тем самым определяется некоторая новая триангуляция  $L^*$  пространства  $E^m$ , и, пользуясь неравенством  $\rho_0 \delta < h/8$  и неравенством (14.6), мы для всех симплексов  $\tau$  комплекса  $L^*$  размерности  $\geq 1$  получаем

$$(2) \quad \frac{h}{4} < \text{diam}(\tau) < 2\delta, \quad \Theta(\tau) \geq \Theta_0.$$

Мы покажем, что можно также добиться выполнения неравенств

$$(3) \quad \rho(M, \tau^r) > \alpha_r \delta \quad \text{для всех } \tau^r \text{ в } L^*, \quad r \leq s-1,$$

откуда, обозначая  $(s-1)$ -мерный остов комплекса  $L^*$  через  $L^{*s-1}$ , найдем

$$(4) \quad \rho(M, L^{*s-1}) > 2a.$$

Допустим, что вершины  $p_1^*, \dots, p_{i-1}^*$  уже построены так, что комплекс  $L_{i-1}^*$ , имеющий эти вершины, удовлетворяет условию (3); построим вершину  $p_i^*$  так, чтобы комплекс  $L_i^*$  удовлетворял этому условию.

С л у ч а й I,  $\rho(p_i, M) \geq 3\delta$ . Тогда мы полагаем  $p_i^* = p_i$ . Ввиду (2) условие (3) будет для  $L_i^*$  выполняться.

С л у ч а й II, существует точка  $p \in M$ ,  $|p - p_i| < 3\delta$ . Пусть  $P_0$  — касательная плоскость  $P_p$  (§ 8). Пусть  $\tau'_1, \dots, \tau'_v$  ( $v \leq N-1$ ) — симплексы комплекса  $L_{i-1}^*$  размерности  $\leq s-2$ , для которых  $\tau_j = p_i^* \tau'_j$  будет симплексом комплекса  $L_i^*$ . Пусть  $P_j$  — плоскость, порожденная симплексом  $\tau'_j$  и плоскостью  $P_p$  ( $j \geq 1$ ); ее размерность не превосходит  $(s-2) + n + 1 < m$ . Положим

$$(5) \quad Q_j = U_{\rho_0 \delta}(p_i) \cap U_{\rho_1 \rho_0 \delta}(P_j), \quad j = 0, 1, \dots, v.$$

В силу выбора числа  $\rho_1$  имеем  $|Q_j| < |U_{\rho_0 \delta}(p_i)|/N$ ; поэтому существует такая точка  $p_i^*$ , удовлетворяющая условию (1), что

$$(6) \quad \rho(p_i^*, P_j) > \rho_1 \rho_0 \delta, \quad j = 0, 1, \dots, v.$$

Покажем теперь, что

$$(7) \quad \rho(\tau'_j, P_p) > \frac{2\alpha_{r-1}\delta}{3}, \quad \text{если } \dim(\tau'_j) = r-1.$$

Так как  $\tau'_j$  — симплекс комплекса  $L_{i-1}^*$ , то  $\rho(\tau'_j, M) > \alpha_{r-1}\delta$ . В силу (8.6)  $P_{p,\xi} \subset U_{\lambda\xi}(M)$ ; поскольку  $\lambda < \alpha_{s-1}/24$ , мы имеем  $\lambda\xi < \alpha_{r-1}\delta/3$  и неравенство (7) выполняется, если  $P_p$  заменить на  $P_{p,\xi}$ . Так как  $|p - p_i| < 3\delta$  и  $\text{diam}(p_i\tau'_j) < 2\delta$ , то  $\rho(\tau'_j, P_p \setminus P_{p,\xi}) > 3\delta$ , откуда и следует неравенство (7).

Применяя лемму (П. II, 14b), получаем

$$\rho(\tau_j, P_p) \geq \frac{\rho(\tau'_j, P_p) \rho(p_i^*, P_j)}{\text{diam}(\tau_j)} > \frac{2\alpha_{r-1}\delta}{3} \cdot \frac{\rho_1\rho_0\delta}{2\delta} = \frac{4\alpha_{r-1}\rho\delta}{3} = \frac{4\alpha_r\delta}{3}.$$

Так как  $\lambda\xi < \alpha_r\delta/3$ , то с помощью (8.6) и (8.3) и того же рассуждения, что и выше, получаем неравенство (3) для  $\tau' = \tau_j$ ,  $j \geq 1$ . Полагая в (6)  $j = 0$ , снова с помощью того же рассуждения мы получаем неравенство (3) для  $\tau' = p_i^*$ ; итак, неравенства (3) и (4) доказаны.

**19. Пересечения многообразия  $M$  с  $L^*$ .** Установим некоторые свойства пересечений многообразия  $M$  и его касательных плоскостей с симплексами комплекса  $L^*$ .

(а) Для любой точки  $p \in M$  и любого  $r$ -мерного симплекса  $\tau'$  комплекса  $L^*$

$$(1) \quad \rho(P_p, \tau') > a, \text{ если } \tau' \subset U_{7\delta}(p), \quad r \leq s-1.$$

В самом деле,  $\rho(P_p \setminus P_{p,\xi}, \tau') > \xi - 7\delta > a$  и  $P_{p,\xi} \subset U_{\lambda\xi}(M)$ ,  $\lambda\xi < a$ ; из (18.4) получаем неравенство (1).

(б) Если многообразие  $M$  пересекает симплекс  $\tau'$  и  $p \in M$  — такая точка, что  $\tau' \subset U_{7\delta}(p)$ , то плоскость  $P_p$  пересекает  $\tau'$ . В самом деле, если  $p' \in M \cap \tau'$ , то в силу (8.3)  $p' \in M_{p,\xi}$ . В силу (8.6)  $\rho(p', P_p) < \lambda\xi < a$ . Пусть  $\tau^t$  — грань наименьшей размерности симплекса  $\tau'$ , для которой  $\rho(\tau^t, P_p) \leq a$ . В силу (1)  $t \geq s$ , и по лемме (П. II, 14a) плоскость  $P_p$  пересекает  $\tau^t$ .

(с) Если в (б)  $r = s$  и  $P(\tau^s)$  есть плоскость симплекса  $\tau^s$ , то

$$(2) \quad \text{ind}(P_p, P(\tau^s)) > \alpha.$$

Это следует из только что упомянутой леммы и неравенств (1) и (18.2).

(д) Если  $p \in M$ ,  $\tau' \subset U_{7\delta}(p)$  и плоскость  $P_p$  пересекает симплекс  $\tau'$ , то  $r \geq s$  и  $M_{p,\xi}$  пересекает  $\tau'$ . Пусть  $\tau^t$  — грань наименьшей размерности симплекса  $\tau'$ , для которой  $\rho(P_p, \tau^t) \leq a$ . В силу неравенства (1) и леммы (П. II, 14a)  $t = s$  (и, следовательно,  $r \geq s$ ), плоскость  $P_p$  имеет общую точку  $p'$  с симплексом  $\tau^s$  и выпол-

няется неравенство (2). Пусть  $\pi'$  — проекция в плоскость  $P_p$  вдоль плоскостей, параллельных  $\tau^s$  (§ 11). По лемме 11а множество  $\pi'(M_{p,\xi})$  покрывает  $P_{p,\eta}$ , где  $\eta = (1 - \lambda/\alpha)\xi > 7\delta$ . Так как  $|p' - p| < 7\delta$ , то существует точка  $p^* \in M_{p,\xi}$ , для которой  $\pi'(p^*) = p'$ ; поэтому  $p^* \in P(\tau^s)$ . В силу (11.2)

$$|p' - p^*| < \frac{\lambda\xi}{\alpha} \leq \rho'_0\beta\delta < \beta\delta < \alpha.$$

Так как  $p' \in \tau^s$ , то неравенство (18.4) показывает, что  $p^* \in \tau^s$ .

(е) Многообразие  $M$  пересекает любой симплекс  $\tau^s$  не более чем в одной точке. В самом деле, допустим, что  $M$  имеет две различные точки  $p, p'$  в симплексе  $\tau^s$ . Тогда в силу (8.3)  $p' \in M_{p,\xi}$ , и потому  $M_{p,\xi}$  имеет в  $\tau^s$  секущий вектор  $v = p' - p$ . По лемме 8с  $|v - \pi_p v| \leq \lambda|v|$ . Но неравенство (2) дает  $|v - \pi_p v| > \alpha|v| > \lambda|v|$ , т. е. противоречие.

(f) Если многообразие  $M$  пересекает симплекс  $\tau^r = q_0 \dots q_r$ , то для каждого  $k$  многообразие  $M$  пересекает некоторую  $s$ -мерную грань симплекса  $\tau^r$ , содержащую вершину  $q_k$ . В самом деле, возьмем точку  $p \in M \cap \tau^r$ . Пусть  $\tau^t$  — грань наименьшей размерности симплекса  $\tau^r$ , содержащая  $q_k$  и пересекающаяся с плоскостью  $P_p$ . Допустим, что  $t > s$ . Тогда, если  $\tau^{t-1}$  — грань симплекса  $\tau^t$ , противоположная вершине  $q_k$ , то плоскость  $P_p$  пересекает некоторую  $s$ -мерную грань симплекса  $\tau^{t-1}$ . Ввиду (с) плоскость  $P_p$  содержит внутренние точки симплекса  $\tau^t$  и поэтому пересекает  $\partial\tau^t \setminus \tau^{t-1}$ ; мы пришли к противоречию. Поэтому  $t = s$ . В силу (d) многообразие  $M$  также пересекает  $\tau^s$ .

**20. Комплекс  $K$ .** В каждом симплексе  $\tau$  комплекса  $L^*$ , пересекающем  $M$ , мы определим некоторую точку  $\psi(\tau)$ ; эти точки будут вершинами комплекса  $K$ . Для каждой последовательности  $\tau_0 \subset \tau_1 \subset \dots \subset \tau_r$  различных симплексов комплекса  $L^*$ , для которой многообразие  $M$  пересекает  $\tau_0$  (а поэтому и все  $\tau_i$ ),

$$(1) \quad \sigma^r = \psi(\tau_0) \dots \psi(\tau_r)$$

будет симплексом комплекса  $K$ .

Прежде всего, для каждого симплекса  $\tau^s$ , пересекающего  $M$ , в силу (19 (е)) существует в точности одна точка пересечения; пусть  $\psi(\tau^s)$  — эта точка. Далее, для любого симплекса  $\tau^r$  ( $r > s$ ), пересекающего  $M$ , пусть  $\tau_1^s, \dots, \tau_k^s$  — все  $s$ -мерные грани симплекса  $\tau^r$ , пересекающие  $M$  [см. (19 (f))]; положим

$$(2) \quad \psi(\tau^r) = \frac{1}{k}\psi(\tau_1^s) + \dots + \frac{1}{k}\psi(\tau_k^s).$$

Покажем, что для любого симплекса  $\tau^s = q_0 \dots q_s$  комплекса  $L^*$ , пересекающего многообразие  $M$ ,

$$(3) \quad \mu_k > 2\alpha \quad (k = 0, \dots, s), \quad \text{если} \quad \psi(\tau^s) = \sum \mu_i q_i.$$

В самом деле, обозначим  $(s-1)$ -мерную грань, противоположную вершине  $q_k$ , через  $\tau_k$ . Пусть  $A_k$  и  $A'_k$  — высоты, опущенные соответственно из  $q_k$  и из  $\psi(\tau^s)$  на  $P(\tau_k)$ . В силу (18.4) и (18.2)

$$\mu_k = \frac{A'_k}{A_k} > \frac{2\alpha}{2\delta} = 2\alpha.$$

Далее, если многообразие  $M$  пересекает симплекс  $\tau^r = q_0 \dots q_r$ , то

$$(4) \quad \mu_k > \frac{2\alpha}{N} \quad (k = 0, \dots, r), \quad \text{если} \quad \psi(\tau^r) = \sum \mu_i q_i.$$

Для данного  $k$  пусть  $\tau^s$  — некоторая  $s$ -мерная грань симплекса  $\tau^r$ , содержащая вершину  $q_k$  и пересекающая  $M$  (19 (f)). В силу (3) барицентрическая координата  $\mu'$  точки  $\psi(\tau^s)$ , соответствующая вершине  $q_k$ , будет не меньше  $2\alpha$ . По формуле (2)  $\mu_k$  является средним арифметическим не более чем  $N$  барицентрических координат, одной из которых является  $\mu'$ ; таким образом, неравенство (4) выполняется.

Вершины каждого симплекса  $\sigma$  комплекса  $K$  имеют естественный порядок; пусть  $\text{alt}(\sigma)$  — высота, опущенная из последней вершины (вершины, принадлежащей симплексу наивысшей размерности комплекса  $L^*$ ). Докажем, что

$$(5) \quad \text{alt}(\sigma^r) \geq rb.$$

В самом деле, если  $\sigma^r$  — симплекс вида (1), то его  $(r-1)$ -мерная грань  $\sigma^{r-1}$ , противоположная вершине  $\psi(\tau_r)$ , лежит в  $\tau_{r-1}$ . Если  $\dim(\tau_r) = t \geq r$ , то из леммы 14b и неравенств (4) и (18.2) получаем

$$\text{alt}(\sigma^r) \geq \rho(\psi(\tau_r), \partial\tau_r) \geq t! \Theta(\tau_r) \delta_{\tau_r} \frac{2\alpha}{N} \geq r \Theta_0 \frac{\delta}{2m^{1/2}} \cdot \frac{2\alpha}{N} = rb.$$

Так как  $|\sigma^r| = \text{alt}(\sigma^r) |\sigma^{r-1}|/r$ , то по индукции мы сразу видим, что  $|\sigma^r| \geq b^r$ , и поэтому

$$(6) \quad \Theta(\sigma^r) \geq \frac{b^r}{(2\delta)^r} = \frac{\beta^r}{2^r} \geq \Theta_1.$$

**21. Вложение симплексов в  $M$ .** Мы покажем, что комплекс  $K$  близок к  $M$  и что отображение  $\pi^*$  осуществляет вложение в  $M$  любого  $n$ -мерного симплекса, близкого к какому-либо  $n$ -мерному симплексу комплекса  $K$ .

Докажем сначала, что для любого симплекса  $\sigma$  комплекса  $K$ ,

$$(1) \quad \text{если } \sigma \subset U_{6\xi}(p), \quad p \in M, \quad \text{то } \sigma \subset U_{\lambda\xi}(P_{p,\xi}).$$

Пусть, скажем, симплекс  $\sigma$  содержится в симплексе  $\tau$  комплекса  $L^*$ ; тогда  $\tau \subset U_{8\xi}(p)$ . Каждая вершина  $p_i$  симплекса  $\tau$  является средним арифметическим нескольких точек  $\psi(\tau_j^s)$ , которые содержатся в  $M_{p,\xi}$  и поэтому в  $U_{\lambda\xi}(P_{p,\xi})$ ; следовательно, включение (1) имеет место для каждой вершины  $p_i$ , а поэтому и для  $\sigma$ . В качестве следствия отсюда и из (10.4) получаем

$$(2) \quad K \subset U_{2\lambda\xi}(M), \quad |\pi^*(q) - q| < 4\lambda\xi \quad (q \in K).$$

*Лемма 21а. Пусть  $\sigma = p_0 \dots p_n$  — некоторый  $n$ -мерный симплекс комплекса  $K$  (вершины взяты в порядке возрастания), и пусть  $p'_0, \dots, p'_n$  — некоторые точки, удовлетворяющие условиям*

$$|p'_i - p_i| \leq \frac{\lambda\xi}{\alpha}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Тогда  $\sigma' = p'_0 \dots p'_n$  есть симплекс, лежащий в  $U^*$ , и отображение  $\pi^*$  осуществляет вложение симплекса  $\sigma'$  в  $M$ .

Прежде всего, так как  $\lambda\xi/\alpha \leq \rho'_0 \beta\xi/8 = \rho'_0 b$ ,  $\Theta(\sigma) \geq \Theta_1$  и в силу (20.5)  $\text{diam}(\sigma) \geq b$ , то выбор числа  $\rho'_0$  дает  $\Theta(\sigma') \geq \Theta_1/2$ .

Далее, ввиду (2) и (17.5)  $\sigma' \subset U_\eta(M)$ , где

$$(4) \quad \eta = \frac{\lambda\xi}{\alpha} + 2\lambda\xi < \frac{3\lambda\xi}{\alpha} \leq \delta_0;$$

поэтому  $\sigma' \subset U^*$  и отображение  $\pi^*$  на  $\sigma'$  определено.

Возьмем теперь любую точку  $q \in \sigma'$ . Пусть, скажем,  $q \in Q_p^*$ ,  $p \in M$ . Тогда  $\pi^*(q) = p$ . В силу (10.4) и первого из неравенств (4)

$$|q - p| \leq 2\frac{3\lambda\xi}{\alpha} < \delta,$$

поэтому  $\sigma \subset U_{4\delta}(p)$  и утверждение (1) дает  $\sigma \subset U_{\lambda\xi}(P_p)$ . Следовательно,  $\sigma' \subset U_{2\lambda\xi/\alpha}(P_p)$ . Кроме того <sup>1)</sup>, в силу (20.5)  $|p_i - p_0| \geq b$ , поэтому

$$|p'_i - p'_0| \geq b - \frac{2\lambda\xi}{\alpha} \geq b - 2\rho'_0 b \geq \frac{b}{2}.$$

<sup>1)</sup> Здесь нечеткость в обозначениях: для того чтобы из (20.5) получить неравенства  $|p_i - p_0| \geq b$ , следует считать  $p_0$  последней (а не первой, как в формулировке леммы 21а) вершиной. — Прим. ред.

Следовательно, если  $u$  — любой единичный вектор в плоскости симплекса  $\sigma'$ , то по лемме 15с получаем

$$|u - \pi_p u| \leq \frac{2(2\lambda\xi/\alpha)}{(n-1)!(\theta_1/2)(b/2)} = \frac{64\lambda}{\alpha\gamma} \leq \frac{1}{2}.$$

Так как мы взяли  $\lambda_0 < 1/4$ , то неравенство (10.1) показывает, что  $u$  не лежит в  $Q_p^*$ . Следовательно,  $\pi^*$  отображает каждый ненулевой вектор в симплексе  $\sigma'$ , взятый в точке  $q$ , в ненулевой вектор, и поэтому  $\pi^*$  регулярно в точке  $q$ . Далее, если  $q'$  — другая точка симплекса  $\sigma'$ , то, взяв вектор  $v = q' - q$ , мы найдем, что  $q'$  не лежит в  $Q_p^*$ , и поэтому  $\pi^*(q') \neq \pi^*(q)$ . Это завершает доказательство.

**22. Комплексы  $K_p$ .** Для каждой точки  $p \in M$  обозначим через  $L_p^*$  подкомплекс комплекса  $L^*$ , содержащий все симплексы, пересекающиеся с  $\bar{U}_{4\delta}(p)$ , и все грани этих симплексов; тогда

$$(1) \quad L_p^* \subset U_{6\delta}(p).$$

Пусть  $K_p''$  — комплекс в плоскости  $P_p$ , образованный пересечениями плоскости  $P_p$  с симплексами комплекса  $L_p^*$ , и  $K_p'$  — регулярное подразделение комплекса  $K_p''$ . Из свойств (b) и (d) § 19 следует, что плоскость  $P_p$  пересекает симплекс, входящий в  $L_p^*$ , в том и только в том случае, если этот симплекс пересекает  $M$ . Поэтому, если  $K_p$  — подкомплекс комплекса  $K$ , содержащий его симплексы с вершинами  $\psi(\tau)$ , где  $\tau$  — симплексы из  $L_p^*$ , то существует взаимно однозначное соответствие  $\varphi_p$  между вершинами комплекса  $K_p$  и вершинами комплекса  $K_p'$ , и это соответствие определяет симплициальное отображение  $\varphi_p$ , являющееся изоморфизмом комплекса  $K_p$  на комплекс  $K_p'$ .

Докажем, что

$$(2) \quad |\varphi_p(q) - q| < \frac{\lambda\xi}{\alpha}, \quad q \in K_p.$$

Допустим сначала, что  $q = \psi(\tau^s)$  для некоторого симплекса  $\tau^s$  комплекса  $L_p^*$ . Тогда вектор  $v = q - \varphi_p(q)$  содержится в  $\tau^s$  и из (8.6) и (19(c)) следует

$$\lambda\xi > |q - \pi_p(q)| = |v - \pi_p v| \geq \alpha|v|,$$

т. е. неравенство (2). Далее, если  $q = \psi(\tau^r)$ ,  $r > s$ , то определения (20.2) и (П. II, 1.2) показывают, что  $q$  и  $\varphi_p(q)$  являются средними арифметическими множеств, состоящих из одного и того же числа точек, причем каждая соответствующая пара точек удо-

влетворяет неравенству (2); поэтому неравенство (2) выполняется для  $q = \psi(\tau')$ . Наконец, каков бы ни был симплекс комплекса  $K_p$ , неравенство (2) выполняется для его вершин и, следовательно, для всех его точек.

Мы должны показать, что

$$(3) \quad K \cap U_{2\delta}(p) \subset K_p.$$

В самом деле, возьмем любую точку  $q$  в симплексе  $\sigma = \psi(\tau_0) \dots \psi(\tau_r)$  комплекса  $K$ ,  $|q - p| < 2\delta$ . Тогда  $\tau' \subset U_{4\delta}(p)$ , поэтому  $\tau'$  входит в комплекс  $L_p^*$  и, следовательно,  $\sigma$  и  $q$  содержатся в  $K_p$ .

Выберем некоторую ориентацию плоскости  $P_p$  и соответствующим образом ориентируем все  $n$ -мерные симплексы комплекса  $K_p'$ . Теперь  $K_p'$  является  $n$ -мерным ориентированным псевдомногообразием (П. II, 15), и включение (1) и определение комплекса  $L_p^*$  показывают, что

$$(4) \quad K_p' \subset U_{6\delta}(p), \quad \partial K_p' \subset P_p \setminus \overline{U_{4\delta}}(p).$$

Определим отображение  $\pi_p^*$  комплекса  $K_p$  в плоскость  $P_p$  следующим образом. Каждая точка  $q \in K_p$  содержится в единственном множестве  $Q_p^*$ ; здесь  $p' = \pi_p^*(q)$ . В силу (1)  $|q - p| \leq 6\delta$  и в силу (21.2)  $|p' - q| < 4\lambda\xi < \delta$ ; поэтому  $|p' - p| < \xi$ . По лемме 10а плоскость  $P_p'$  пересекает плоскость  $P_p$  в единственной точке, которую мы обозначим через  $\pi_p^*(q)$ . Мы докажем, что

$$(5) \quad |\pi_p^*(q) - q| < 6\lambda\xi, \quad q \in K_p.$$

Ввиду (21.2) нам нужно только доказать, что  $|v| < 2\lambda\xi$ , где  $v = p' - \pi_p^*(q)$ . Так как  $\lambda + \lambda_0 < 1/2$ , то неравенство (10.12) дает  $|\pi_p v| \leq |v|/2$ . В силу (8.5)  $|v - \pi_p v| < \lambda\xi$ . Следовательно,  $|v| < |v|/2 + \lambda\xi$ , и наше утверждение доказано.

**23. Доказательство теоремы.** Если дана точка  $p \in M$ , мы выберем некоторую ориентацию плоскости  $P_p$  и соответствующим образом ориентируем  $n$ -мерные симплексы комплексов  $K_p'$  и <sup>1)</sup>  $K_p$ . Теперь  $K_p$  является ориентированным псевдомногообразием (П. II, 15). Доказательство теоремы 12А опирается на следующие леммы.

**Лемма 23а.**  $\pi_p^*$  есть симплексно-положительное отображение комплекса  $K_p$  в плоскость  $P_p$ .

<sup>1)</sup> Симплексы комплекса  $K_p$  ориентируются так, что отображение  $\varphi_p: K_p \rightarrow K_p'$  сохраняет ориентации симплексов. — Прим. ред.

Возьмем любой  $n$ -мерный симплекс  $\sigma$  комплекса  $K_p$ . Положим

$$(1) \quad \varphi_{p,t}(q) = (1-t)q + t\varphi_p(q) \quad \text{в } \sigma, \quad \sigma_t = \varphi_{p,t}(\sigma).$$

Так как отображение  $\varphi_p$  аффинно в  $\sigma$ , то и  $\varphi_{p,t}$  аффинно в  $\sigma$  и  $\sigma_t$  есть симплекс. Пусть, скажем,  $\sigma = q_0 \dots q_n$ . Для любого  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) положим  $q_{it} = \varphi_{p,t}(q_i)$ ; тогда  $\sigma_t = q_{0t} \dots q_{nt}$ . В силу (22.2)  $|q_{it} - q_i| < \lambda \xi / \alpha$ . По лемме 21а отображение  $\pi_p^*$  осуществляет вложение симплекса  $\sigma_t$  в  $M$ ; поэтому (на основании доказательства этой леммы)  $\pi_p^*$  осуществляет вложение симплекса  $\sigma_t$  в  $P_p$ . Так как  $\sigma_1$  содержится в  $P_p$ , то отображение  $\pi_p^*$  на  $\sigma_1$  является тождественным отображением, и поэтому  $\bar{J}_{\pi_p^*} > 0$  на  $\sigma_1$ . Так как  $\bar{J}_{\pi_p^*} \neq 0$  в  $\sigma_t$  при всех  $t$ , то  $\bar{J}_{\pi_p^*} > 0$  в  $\sigma_0 = \sigma$ , как и требовалось.

Для каждой точки  $p \in M$  пусть  $R_p$  есть множество тех точек  $q \in K_p$ , для которых  $\pi_p^*(q) \subset P_{p,3\sigma}$ .

Лемма 23б. Для каждой точки  $p \in M$  отображение  $\pi_p^*$ , рассматриваемое только на  $R_p$ , является взаимно однозначным отображением на множество  $P_{p,3\sigma}$ .

Прежде всего, пусть  $\sigma_1$  — некоторый  $n$ -мерный симплекс комплекса  $K_p^1$ , содержащий  $p$ ; пусть, например,  $\sigma_1 = \varphi_p(\sigma_0)$  ( $\sigma_0$  в  $K_p$ ) и  $p_0$  — центр симплекса  $\sigma_0$ . В силу (14.7), (20.6), (20.5) и (17.3)

$$\rho(p_0, \partial\sigma_0) \geq \frac{n! \Theta_1 b}{n+1} \geq c.$$

Поэтому в силу (22.2)

$$(2) \quad \rho(\varphi_p(p_0), \partial\sigma_1) > c - \frac{2\lambda\xi}{\alpha} = c'.$$

Теперь возьмем любую точку  $q \in K_p - \sigma_0$ . Так как  $\varphi_p$  — изоморфизм, то неравенство (2) показывает, что  $|\varphi_p(q) - \varphi_p(p_0)| > c'$ . В силу (17.4), (17.5) и (17.6)

$$\frac{4\lambda\xi}{\alpha} + 12\lambda\xi < \frac{16\lambda\xi}{\alpha} \leq \gamma\delta = c.$$

Следовательно, в силу (22.2) и (22.5)

$$|\pi_p^*(q) - \pi_p^*(p_0)| > c' - 2\left(\frac{\lambda\xi}{\alpha} + 6\lambda\xi\right) > 0,$$

и, таким образом,  $\pi_p^*(q) \neq \pi_p^*(p_0)$ . Отсюда видно, что точка

$p^* = \pi_p^*(p_0)$  покрывается при отображении  $\pi_p^*$  в точности одним симплексом из  $K_p$ . Далее,

$$|p^* - p| \leq |\pi_p^*(p_0) - \varphi_p(p_0)| + \text{diam}(\sigma_1) < 3\delta,$$

и поэтому  $p^* \in P_{p, 3\delta}$ .

В силу (22.4), (22.2) и (22.5) и неравенства  $2(\lambda\xi/\alpha + 6\lambda\xi) < \delta$  мы имеем

$$(3) \quad \pi_p^*(\partial K_p) \subset P_p - \overline{U_{3\delta}}(p).$$

Наша лемма теперь следует из леммы 23а и леммы (П. II, 15а).

Теперь мы докажем теорему. Прежде всего, если дана точка  $p \in M$ , то последняя лемма показывает, что  $\pi_p^*(q) = p$  для некоторой точки  $q \in K_p$ ; поэтому  $\pi^*(q) = p$ , и  $\pi^*$  является отображением полиэдра  $K$  на все многообразие  $M$ . Далее, допустим, что также  $\pi^*(q') = p$ ,  $q' \in K$ . В силу (21.2)  $|q' - p| < 4\lambda\xi < \delta$ , поэтому в силу (22.3)  $q' \in K_p$  и, следовательно,  $q' \in R_p$ . По лемме 23b  $q' = q$ . Это доказывает, что  $\pi^*$  является взаимно однозначным отображением.

Наконец, возьмем любой  $n$ -мерный симплекс  $\sigma$  комплекса  $K$ . По лемме 21а отображение  $\pi^*$  взаимно однозначно и регулярно в  $\sigma$  и поэтому в некоторой окрестности  $U$  симплекса  $\sigma$  в плоскости  $P(\sigma)$  этого симплекса. Пусть  $\varphi$  — аффинное отображение пространства  $\mathbb{R}^n$  на  $P(\sigma)$ ; положим  $U_0 = \varphi^{-1}(U)$ . Тогда отображение  $\chi = \pi^*\varphi$  определено в  $U_0$  и является системой координат в  $M$ , а отображение  $\chi^{-1}\pi^* = \varphi^{-1}$  является аффинным в  $\sigma$ . Это завершает доказательство.

### С. Когомологии в многообразиях

**24.  $\mu$ -регулярные формы.** Теорема де Рама (теорема 29А, см. ниже) связывает когомологии в гладких многообразиях, определенные алгебраически, с когомологиями, определенными с помощью дифференциальных форм. Мы должны пользоваться некоторым классом форм, инвариантным по отношению к операции  $d$  внешнего дифференцирования. Мы выбираем „ $\mu$ -регулярные формы“. Если бы многообразие было бесконечно гладким, мы могли бы, очевидно, пользоваться бесконечно гладкими формами.

Предположим, что многообразие  $M$  является  $(\mu + 1)$ -гладким, где  $\mu$  — некоторое целое число  $\geq 0$ . Тогда  $r$ -форма  $\omega$ , определенная в открытом подмножестве  $R$  многообразия  $M$ , называется  $\mu$ -регулярной в  $R$ , если верно следующее. Если  $\mu = 0$ , то форма  $\omega$  регулярна (III, 17); если  $\mu > 0$ , то и  $\omega$  и  $d\omega$  являются  $\mu$ -гладкими. Если это выполняется, то форма  $d\omega$  однозначно определена и  $\mu$ -регулярна. При  $r = 0$  форма  $\mu$ -регулярна в том и только в том

случае, если она  $(\mu + 1)$ -гладка, так как компоненты формы  $d\omega$  в некоторой системе координат являются частными производными от  $\omega$ .

Мы говорим, что форма  $\omega$  замкнута, если  $d\omega = 0$ ;  $\omega$  является производной, если  $\omega = d\xi$ , причем форма  $\xi$   $\mu$ -регулярна.

Из (II, 8) (при  $\mu > 0$ ) и (III, 17) (при  $\mu = 0$ ) получаем следующие факты. Если  $\omega$  и  $\xi$  — произвольные  $\mu$ -регулярные формы, то форма  $\omega \vee \xi$  также  $\mu$ -регулярна. Если  $f$  — некоторое  $(\mu + 1)$ -гладкое отображение открытого подмножества  $R$   $(\mu + 1)$ -гладкого многообразия  $M$  в  $(\mu + 1)$ -гладкое многообразие  $M'$  и форма  $\omega$   $\mu$ -регулярна в окрестности множества  $f(R)$  в многообразии  $M'$ , то форма  $f^*\omega$  также  $\mu$ -регулярна в  $R$ . Имеют место обычные формулы для  $d(\omega \vee \xi)$  и  $df^*\omega$ .

Мы говорим, что некоторая форма обладает данным свойством вблизи данного замкнутого множества  $Q$ , если она обладает им в некоторой окрестности множества  $Q$ .

**Лемма 24а.** Пусть  $\omega$  — некоторая  $\mu$ -регулярная форма вблизи замкнутого множества  $Q$  в  $M$ . Тогда существует такая  $\mu$ -регулярная форма  $\omega_1$  в  $M$ , что  $\omega_1 = \omega$  вблизи  $Q$ . Мы можем сделать  $\omega_1 = 0$  вне произвольной окрестности  $U$  множества  $Q$ .

Выберем такую окрестность  $U_1 \subset U$  множества  $Q$ , что форма  $\omega$   $\mu$ -регулярна в некоторой окрестности замыкания  $\bar{U}_1$ . Пусть  $\varphi$  — такая  $(\mu + 1)$ -гладкая действительная функция в  $M$ , что  $\varphi(p) = 1$  в  $Q$  и  $\varphi(p) = 0$  в  $M - U_1$ . (Например, пусть отображение  $f$  в соответствии с теоремой 1А осуществляет вложение многообразия  $M$  в  $E^m$ ; определим по лемме (П. III, 1с) функцию  $\varphi'$  в  $E^m$  так, чтобы  $\varphi'(q) = 1$  в  $f(Q)$  и  $\varphi'(q) = 0$  в  $f(M - U_1)$ , и положим  $\varphi(p) = \varphi'(f(p))$  в  $M$ .) Положим  $\omega_1(p) = \varphi(p)\omega(p)$  в  $U_1$  и  $\omega_1(p) = 0$  в  $M - U_1$ ; тогда форма  $\omega_1$  будет обладать требуемыми свойствами.

**25. Замкнутые формы в звездообразных множествах.** (Ср. § 22 введения). Мы говорим, что множество  $R \subset E^n$  звездообразно, если существует такая точка  $p_0 \in R$ , что для каждой точки  $p \in R$  отрезок  $p_0p$  содержится в  $R$ .

**Лемма 25а.** Пусть  $R$  — звездообразное открытое множество в  $E^n$ , и пусть  $\omega$  — некоторая  $\mu$ -регулярная замкнутая  $r$ -форма в  $R$ ,  $r > 0$ . Тогда  $\omega$  является  $\mu$ -производной в  $R$ .

Мы определим в  $R$  такую  $\mu$ -регулярную  $(r - 1)$ -форму  $\omega_1$ , что

$$(1) \quad \int_{\partial\sigma} \omega_1 = \int_{\sigma} \omega \text{ для всех } r\text{-мерных симплексов } \sigma \text{ в } R.$$

Тогда  $d\omega_1 = \omega$  по определению, если  $\mu = 0$ , и по теореме Стокса и лемме (III, 16a), если  $\mu > 0$ .

Пусть, скажем,  $R$  звездобразно относительно точки  $p_0$ . Определим аффинное отображение  $g$  декартова произведения  $\mathfrak{A} \times E^n$  в  $E^n$  формулой

$$(2) \quad g(t \times p) = (1-t)p_0 + tp.$$

Для каждой точки  $p \in R$  существует такое число  $\eta_p > 0$ , что  $g(t \times p) \in R$  при  $-\eta_p < t < 1 + \eta_p$ . Поэтому существует такая окрестность  $U$  множества  $I \times R$  в  $\mathfrak{A} \times E^n$  ( $I$  — отрезок  $[0, 1]$ ), которую  $g$  отображает в  $R$ . Тогда форма  $g^*\omega$  регулярна в  $U$ .

Определим  $\omega_1(p)$  как интеграл, зависящий от параметра (III, 19),

$$(3) \quad \omega_1(p) = \int_{I \times p} g^*\omega(t \times p) dt, \quad p \in R;$$

тогда форма  $\omega_1$  является  $\mu$ -регулярной в  $R$ . [При  $\mu = 0$  ее  $\mu$ -регулярность будет следовать из (1); при  $\mu > 0$  из формул (3) или (6) вытекает, что форма  $\omega_1$  является  $\mu$ -гладкой;  $\mu$ -регулярность будет следовать из того, что  $d\omega_1 = \omega$ .]

Возьмем произвольный  $(r-1)$ -мерный ориентированный симплекс  $\tau$  в  $R$ . Допустим сначала, что его плоскость  $P(\tau)$  не содержит точки  $p_0$ ; пусть  $p_0\tau = J(p_0, \tau)$  — соединение точки  $p_0$  с  $\tau$  (П. II, 10). При очевидном выборе ориентаций отображение  $g$ , рассматриваемое на  $\text{int}(I \times \tau)$ , оказывается сохраняющим ориентацию гладким гомеоморфизмом на множество  $\text{int}(p_0\tau)$ . Поэтому в силу теоремы (III, 7A), леммы (III, 6f) и формулы (III, 19.1)

$$(4) \quad \int_{p_0\tau} \omega = \int_{I \times \tau} g^*\omega = \int_{\tau} \omega_1.$$

Если  $p_0 \in P(\tau)$ , то  $p_0\tau = 0$  (П. II, 10) и интеграл  $\int_{p_0\tau} \omega$  по определению равен нулю; далее, если рассматривать  $g$  только на  $I \times \tau$ , то якобиан  $J_g = 0$ , поэтому (II, 6.6)  $g^*\omega = 0$  и  $\int_{\tau} \omega_1 = 0$ .

Теперь возьмем в  $R$  любой  $r$ -мерный симплекс  $\sigma$ . В силу формул (4), (П. II, 10.3) и теоремы Стокса

$$\int_{\sigma} \omega - \int_{\partial\sigma} \omega_1 = \int_{\sigma - J(p_0, \partial\sigma)} \omega = \int_{\partial J(p_0, \sigma)} \omega = \int_{J(p_0, \sigma)} d\omega = 0,$$

что и доказывает равенство (1).

Мы выведем явную формулу для  $\omega_1(p) \cdot \beta$ , где  $\beta$  — произвольное  $(r-1)$ -направление. Пусть, скажем,  $\beta = e_1 \vee \dots \vee e_{r-1}$ . Пусть  $e_0$  — единичный вектор в  $I$ . Мы имеем

$$\nabla g(t \times p, e_0) = \frac{\partial}{\partial t} g(t \times p) = p - p_0,$$

$$\nabla g(t \times p, e_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [g(t \times (p + he_i)) - g(t \times p)] = te_i$$

при  $i \geq 1$ , и поэтому

$$(5) \quad \nabla g(t \times p, e_0 \vee \beta) = t^{r-1}(p - p_0) \vee \beta.$$

Мы можем определить форму  $\omega_1$  равенством

$$(6) \quad \omega_1(p) \cdot \beta = \int_0^1 t^{r-1} \omega(g(t \times p)) \cdot [(p - p_0) \vee \beta] dt.$$

Чтобы показать, что это та же форма  $\omega_1$ , что и раньше, докажем равенство (4). Полагая  $\beta = \{\tau\}/|\tau|$  и пользуясь интегралом Римана (III, 5) и формулой (II, 4.4), получаем

$$\begin{aligned} \int_{p_0\tau} \omega &= \int_{I \times \tau} g^* \omega(t \times p) \cdot (e_0 \vee \beta) = \int_{I \times \tau} \omega(g(t \times p)) \cdot \nabla g(t \times p, e_0 \vee \beta) = \\ &= \int_{I \times \tau} t^{r-1} \omega(g(t \times p)) \cdot [(p - p_0) \vee \beta] dt dp = \int_{\tau} \omega_1(p) dp, \end{aligned}$$

по крайней мере в том случае, если соединение  $p_0\tau$  не вырождается. В противном же случае  $\int_{p_0\tau} \omega = 0$  и, так как  $(p - p_0) \vee \beta = 0$ ,

$$\text{то } \int_{\tau} \omega_1 \cdot \beta = 0.$$

**26. Продолжение форм.** Мы докажем две леммы о продолжении на окрестность симплекса форм, определенных вблизи границы этого симплекса.

**Лемма 26а.** Пусть  $\omega$  — замкнутая  $\mu$ -регулярная  $r$ -форма вблизи  $d\sigma$  ( $\sigma = \sigma^s \subset E^n$ ), где  $r \geq 0$ ,  $s \geq 1$ . Допустим, что

$$(1) \quad \int_{d\sigma} \omega = 0, \quad \text{если } s = r + 1.$$

Тогда существует замкнутая  $\mu$ -регулярная форма  $\omega'$  вблизи  $\sigma$ , которая равна  $\omega$  вблизи  $d\sigma$ .

Лемма 26b. Пусть  $\omega$  — замкнутая  $\mu$ -регулярная  $r$ -форма вблизи симплекса  $\sigma = \sigma^s \subset E^n$ , где  $r \geq 1$ ,  $s \geq 1$ , и пусть  $\xi$  — такая  $\mu$ -регулярная  $(r-1)$ -форма вблизи  $\partial\sigma$ , что  $d\xi = \omega$  вблизи  $\partial\sigma$ . Допустим, что

$$(2) \quad \int_{\partial\sigma} \xi = \int_{\sigma} \omega, \quad \text{если } s = r.$$

Тогда существует такая  $\mu$ -регулярная форма  $\xi'$  вблизи  $\sigma$ , что  $\xi' = \xi$  вблизи  $\partial\sigma$  и  $d\xi' = \omega$  вблизи  $\sigma$ .

Пусть символы  $(a_r)$  и  $(b_r)$  обозначают эти леммы для  $r$ -форм (при всех  $s$ ). Мы докажем  $(a_0)$ , затем  $(b_r)$ , предполагая справедливость леммы  $(a_{r-1})$ , и, наконец,  $(a_r)$ , предполагая доказанной лемму  $(b_r)$ . Тем самым обе леммы будут установлены.

Доказательство леммы  $(a_0)$ . Так как  $d\omega = 0$ , то вблизи любой связной части границы  $\partial\sigma$  форма  $\omega$  постоянна. Если  $s > 1$ , то форма  $\omega$  постоянна вблизи  $\partial\sigma$ , и мы можем взять форму  $\omega'$  равной той же постоянной вблизи  $\sigma$ . Если  $s = 1$  и  $\sigma = p_0 p_1$ , то

$$\omega(p_1) - \omega(p_0) = \int_{\partial\sigma} \omega = 0$$

и снова форма  $\omega'$  существует.

Доказательство леммы  $(b_r)$ . В силу леммы 25a вблизи  $\sigma$  существует такая  $\mu$ -регулярная  $(r-1)$ -форма  $\xi_1$ , что  $d\xi_1 = \omega$  вблизи  $\sigma$ . Положим  $\eta = \xi - \xi_1$  вблизи  $\partial\sigma$ ; тогда форма  $\eta$  замкнута вблизи  $\partial\sigma$ . Если  $s = r$ , то

$$\int_{\partial\sigma} \eta = \int_{\partial\sigma} \xi - \int_{\partial\sigma} \xi_1 = \int_{\sigma} \omega - \int_{\sigma} d\xi_1 = 0.$$

Поэтому в силу  $(a_{r-1})$  вблизи  $\sigma$  существует замкнутая  $\mu$ -регулярная форма  $\eta'$ , равная  $\eta$  вблизи  $\partial\sigma$ . Положим  $\xi' = \xi_1 + \eta'$  вблизи  $\sigma$ ; тогда форма  $\xi'$  обладает требуемыми свойствами.

Доказательство леммы  $(a_r)$ ,  $r > 0$ <sup>1)</sup>. Пусть, скажем,  $\sigma = p_0 \dots p_s$ ; положим  $\sigma' = p_1 \dots p_s$ . Пусть  $Q$  — объединение всех собственных граней симплекса  $\sigma$ , имеющих  $p_0$  своей вершиной. (Таким образом, при  $s = 2$   $Q = p_0 p_1 \cup p_0 p_2$ .) Для некоторого  $\varepsilon > 0$  форма  $\omega$  определена и замкнута в  $U = U_\varepsilon(Q)$ . Очевидно, окрестность  $U$  звездобразна (относительно  $p_0$ ); поэтому по лемме 25a существует такая  $\mu$ -регулярная форма  $\xi_0$ , что  $d\xi_0 = \omega$  в  $U$ . Это выполняется, в частности, вблизи  $\partial\sigma'$ .

<sup>1)</sup> В доказательстве неявно предполагается, что  $s \geq 2$  (ибо к симплексу  $\sigma'$  размерности  $s-1$  применяется лемма  $(b_r)$ ); в случае же  $s = 1$ ,  $r > 0$  лемма 26a непосредственно доказывается с помощью лемм 25a и 24a. — Прим. ред.

Если  $s-1=r$ , то, обозначая через  $A$  цепь  $\partial\sigma - \sigma'$ , имеем  $\partial\sigma' = -\partial A$ , и поэтому

$$\int_{\sigma'} \omega - \int_{\partial\sigma'} \xi_0 = \int_{\sigma'} \omega + \int_A d\xi_0 = \int_{\partial\sigma} \omega = 0;$$

следовательно, мы можем к симплексу  $\sigma'$  применить лемму ( $b_r$ ) и получить вблизи  $\sigma'$  такую  $\mu$ -регулярную форму  $\xi_1$ , что  $\xi_1 = \xi_0$  вблизи  $\partial\sigma'$  и  $d\xi_1 = \omega$  вблизи  $\sigma'$ . Существует окрестность  $U'$  границы  $\partial\sigma'$ , в которой обе формы  $\xi_1$  и  $\xi_0$  определены и совпадают; пусть  $\xi'$  — их общее значение в этой окрестности, и пусть  $\xi' = \xi_0$  вблизи  $Q \setminus U'$  и  $\xi' = \xi_1$  вблизи  $\sigma' \setminus U'$ . Тогда форма  $\xi'$  является  $\mu$ -регулярной и  $d\xi' = \omega$  вблизи  $\partial\sigma$ . По лемме 24а вблизи  $\sigma$  существует  $\mu$ -регулярная форма  $\xi$ , равная  $\xi'$  вблизи  $\partial\sigma$ . Положим  $\omega' = d\xi$  вблизи  $\sigma$ ; тогда форма  $\omega'$  обладает требуемыми свойствами.

**27. Элементарные формы.** В силу теоремы 12А существует следующая триангуляция многообразия  $M$ . Имеется симплициальный комплекс  $K$  и гомеоморфизм  $\pi$  полиэдра  $K$  на  $M$ . Для каждого симплекса  $\tau$  комплекса  $K$  множество  $\sigma = \pi(\tau)$  есть гладкий симплекс в  $M$  (III, 7), и в  $M$  существует такая система координат  $\chi$ , содержащая  $\sigma$ , что отображение  $\chi^{-1}\pi$  аффинно на  $\tau$ .

Гладкие симплексы  $\sigma = \pi(\tau)$  образуют „криволинейный комплекс“  $L$ ; мы можем определить на  $L$  алгебраические цепи  $A = \sum a_i \sigma'_i$  и интегрировать  $r$ -формы  $\omega$  по  $A$ ; имеет место теорема Стокса  $\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega$  (III, 17.3).

Для данной  $r$ -формы  $\omega$  на  $M$  функция  $\int_A \omega$   $r$ -мерной цепи комплекса  $L$  линейна и поэтому определяет  $r$ -мерную коцепь  $\psi\omega$  комплекса  $L$  (П. II, 6):

$$(1) \quad \psi\omega \cdot A = \int_A \omega.$$

Так как для любой  $(r+1)$ -мерной цепи  $B$

$$\psi d\omega \cdot B = \int_B d\omega = \int_{\partial B} \omega = \psi\omega \cdot \partial B = \partial\psi\omega \cdot B,$$

то мы имеем

$$(2) \quad \psi d\omega = d\psi\omega.$$

Обратно, мы хотим определить формы  $\varphi X$ , соответствующие коцепям  $X$  комплекса  $L$  и обладающие следующими свойствами:

$$(3) \quad \varphi\sigma = 0 \quad \text{вблизи} \quad M - \text{St } \sigma \quad (\sigma \text{ в } L).$$

$$(4) \quad \varphi dX = d\varphi X,$$

$$(5) \quad \psi \varphi X = X,$$

$$(6) \quad \varphi I^0 = 1,$$

где  $I^0$  — единичная нульмерная коцепь комплекса  $L$  (П. II, 6), а 1 — действительная функция, равная 1 на многообразии  $M$ . Для получения пространств дифференциальных когомологий будет достаточно „элементарных форм“  $\varphi \sigma$  (§ 29).

Построим некоторое разложение единицы на  $M$  [ср. (П. III, 2), (III, 10)]. Пусть  $p_1, p_2, \dots$  — вершины комплекса  $K$ ; точки  $q_i = \pi(p_i)$  являются вершинами комплекса  $L$ . Для каждой точки  $q = \pi(p)$  многообразия  $M$ , используя запись  $p = \sum \mu_i(p) p_i$  (П. II, 2.1), мы положим

$$(7) \quad \nu_i(q) = \mu_i(p), \quad q = \sum \nu_i(q) q_i.$$

Таким образом, мы ввели в  $L$  „барицентрические координаты“. Для каждого  $i$  пусть  $Q_i$  и  $Q'_i$  — подмножества многообразия  $M$ , определяемые следующим образом:

$$(8) \quad Q_i: \nu_i(q) \geq \frac{1}{n+1}, \quad Q'_i: \nu_i(q) \leq \frac{1}{n+2}.$$

Тогда

$$(9) \quad Q_i \subset \text{St}(q_i), \quad \text{int}(Q'_i) \supset M - \text{St}(q_i).$$

Пусть  $\varphi'_i(p)$  — некоторая  $(\mu+1)$ -гладкая неотрицательная действительная функция на  $M$ , положительная в  $Q_i$  и равная нулю в  $Q'_i$  (см. доказательство леммы 24а); положим

$$(10) \quad \varphi_i(p) = \frac{\varphi'_i(p)}{\sum_j \varphi'_j(p)}.$$

Возьмем любую точку  $p \in M$ ; так как  $p$  имеет не более  $n+1$  отличной от нуля барицентрической координаты, то по крайней мере одна из них, скажем  $\nu_j(p)$ , не меньше  $1/(n+1)$ ; поэтому  $p \in Q_j$ ,  $\varphi'_j(p) > 0$ , и, значит, функции  $\varphi_i(p)$  определены для всех  $i$ . Далее, функции  $\varphi_i$  являются  $(\mu+1)$ -гладкими и

$$(11) \quad \sum \varphi_i(p) = 1, \quad \sum d\varphi_i(p) = 0 \text{ в } M.$$

Для каждого ориентированного симплекса  $\sigma = q_{\lambda_0} \dots q_{\lambda_r}$  комплекса  $L$  положим <sup>1)</sup>

$$(12) \quad \varphi(q_{\lambda_0} \dots q_{\lambda_r}) = r! \sum_{i=0}^r (-1)^i \varphi_{\lambda_i} d\varphi_{\lambda_0} \vee \dots \widehat{d\varphi_{\lambda_i}} \dots \vee d\varphi_{\lambda_r}.$$

<sup>1)</sup> Ср. Weil A., Sur les théorèmes de de Rham, *Comm. Math. Helv.*, 26 (1952), формула на стр. 127.

Например,

$$(13) \quad \varphi(q_i) = \varphi_i, \quad \varphi(q_i q_j) = \varphi_i d\varphi_j - \varphi_j d\varphi_i.$$

В силу формулы (I, 1.13) и леммы (П. II, 5а) любая перестановка вершин или оставляет неизменным или же изменяет знак одновременно и  $q_{\lambda_0} \dots q_{\lambda_r}$ , и правой части равенства (12); поэтому форма  $\varphi \sum a_i \varphi_i$  определена корректно, и мы можем положить  $\varphi \sum a_i \varphi_i = \sum a_i \varphi \varphi_i$ .

Чтобы доказать (3), возьмем любой симплекс  $\sigma = q_{\lambda_0} \dots q_{\lambda_r}$  и любую точку  $p$ , для которой  $\nu_{\lambda_j}(p) < 1/(n+2)$  при некотором  $j$ . Тогда  $p \in Q'_{\lambda_j}$ ,  $\varphi_{\lambda_j} = 0$  вблизи  $p$  и  $(\varphi \sigma)(p) = 0$ .

В силу (13) равенство (6) является просто первым из равенств (11).

Чтобы доказать (4), нам достаточно только рассмотреть случай  $X = \sigma = q_{\lambda_0} \dots q_{\lambda_r}$ . Заметим прежде всего, что, применяя  $d$  к обеим частям равенства (12), получаем

$$(14) \quad d\varphi(q_{\lambda_0} \dots q_{\lambda_r}) = (r+1)! d\varphi_{\lambda_0} \vee \dots \vee d\varphi_{\lambda_r}.$$

Пользуясь равенством (П. II, 7.5), обоими равенствами (11) и тем фактом, что  $\varphi_j = 0$  вне звезды  $\text{St}(p_j)$  и что  $d\eta \vee d\eta = 0$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{\varphi d(q_{\lambda_0} \dots q_{\lambda_r})}{(r+1)!} &= \frac{\sum_k^* \varphi(q_k q_{\lambda_0} \dots q_{\lambda_r})}{(r+1)!} = \sum^* [\varphi_k d\varphi_{\lambda_0} \vee \dots \vee d\varphi_{\lambda_r} - \\ &- \sum_{i=0}^r (-1)^i \varphi_{\lambda_i} d\varphi_{\lambda_k} \vee d\varphi_{\lambda_0} \vee \dots \hat{i} \dots \vee d\varphi_{\lambda_r}] = \\ &= \sum_{k \neq \lambda_0, \dots, \lambda_r} [\varphi_k d\varphi_{\lambda_0} \vee \dots \vee d\varphi_{\lambda_r} + \\ &+ \sum_{i=0}^r (-1)^i \varphi_{\lambda_i} \sum_{j=0}^r d\varphi_{\lambda_j} \vee d\varphi_{\lambda_0} \vee \dots \hat{i} \dots \vee d\varphi_{\lambda_r}] = \\ &= \sum_{k \neq \lambda_0, \dots, \lambda_r} \varphi_k d\varphi_{\lambda_0} \vee \dots \vee d\varphi_{\lambda_r} + \\ &+ \sum_{i=0}^r \varphi_{\lambda_i} d\varphi_{\lambda_0} \vee \dots \vee d\varphi_{\lambda_r} = d\varphi_{\lambda_0} \vee \dots \vee d\varphi_{\lambda_r} = \frac{d\varphi(q_{\lambda_0} \dots q_{\lambda_r})}{(r+1)!}, \end{aligned}$$

как и требовалось.

Чтобы доказать (5), допустим сначала, что  $r = 0$ . Взяв  $X = q_i$  и пользуясь формулой (1) для  $A = q_j$  и формулой (13), мы видим, что нам нужно доказать лишь последнее из равенств

$$\varphi(q_i) \cdot q_j = [\varphi(q_i)](q_j) = \varphi_i(q_j) = \delta_i^j.$$

Так как  $\varphi_i = 0$  вне звезды  $\text{St}(q_i)$ , то это равенство следует из (11).

Теперь проведем индукцию по  $r$ . Нам нужно доказать, что

$$(15) \quad \psi \varphi \sigma_i^r \cdot \sigma_j^r = \int_{\sigma_j^r} \varphi \sigma_i^r = \delta_i^j.$$

Если  $j \neq i$ , то это следует из (3); допустим, что  $j = i$ . Пусть, скажем,  $\sigma = \sigma_i^r$ ,  $\partial \sigma = \sigma' + \dots$ . По формулам (4) и (3) в обеих размерностях  $r$  и  $r - 1$  находим

$$\int_{\sigma} \varphi \sigma = \int_{\sigma} \varphi d\sigma' = \int_{\sigma} d\varphi \sigma' = \int_{\partial \sigma} \varphi \sigma' = \int_{\sigma'} \varphi \sigma' = 1.$$

## 28. Некоторые замкнутые формы являются производными.

Докажем лемму.

**Лемма 28а.** Пусть  $\omega$  — замкнутая  $\mu$ -регулярная  $r$ -форма на  $M$  ( $r > 0$ ), и пусть  $Y$  — алгебраическая  $(r - 1)$ -мерная коцепь комплекса  $L$ , для которой  $\psi \omega = dY$ . Тогда на  $M$  существует такая  $\mu$ -регулярная  $(r - 1)$ -форма  $\xi$ , что  $d\xi = \omega$  и  $\psi \xi = Y$ .

Мы определим последовательно такие формы  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ , что

(а) форма  $\xi_s$  определена и  $\mu$ -регулярна вблизи  $s$ -мерного остова  $L^s$  комплекса  $L$ ;

(b)  $d\xi_s = \omega$  вблизи  $L^s$  и  $\xi_s = \xi_{s-1}$  вблизи  $L^{s-1}$  ( $s > 0$ );

(с)  $\psi \xi_{r-1} = Y$ .

Тогда  $\xi = \xi_n$  есть искомая форма.

Прежде всего выберем в соответствии с леммой 25а (пользуясь системой координат  $\chi$ , как и в следующем доказательстве) такую форму  $\xi'_0$  вблизи каждой вершины  $q_i$  комплекса  $L$ , что  $d\xi'_0 = \omega$  вблизи  $q_i$ . Если  $r = 1$ , то выберем числа  $a_i$  таким образом, чтобы для формы  $\xi_0 = \xi'_0 + a_i$ , определенной вблизи  $q_i$ , было справедливо равенство  $\psi \xi_0 = Y$ ; если же  $r > 1$ , то положим  $\xi_0 = \xi'_0$ .

Теперь допустим, что форма  $\xi_{s-1}$  уже построена и построим форму  $\xi_s$ . Достаточно определить формы  $\xi_s = \xi_{s,i}$  вблизи каждой  $s$ -мерной клетки  $\sigma_i^s$  комплекса  $L$ ; так как вблизи  $(s - 1)$ -мерного остова  $L^{s-1}$  они совпадают, то из них может быть составлена единственная форма  $\xi_s$  вблизи  $s$ -мерного остова  $L^s$ .

Заметим, что в случае  $s = r$  равенство (с) дает для любого симплекса  $\sigma = \sigma_i^r$ :

$$(1) \quad \int_{\partial\sigma} \xi_{r-1} = \psi \xi_{r-1} \cdot \partial\sigma = Y \cdot \partial\sigma = \psi \omega \cdot \sigma = \int_{\sigma} \omega.$$

Пусть  $\chi$  — такая система координат, содержащая  $\sigma = \sigma_i^s$ , что если  $\theta = \chi^{-1}$ , то отображение  $\theta\pi$  аффинно на  $\pi^{-1}(\sigma)$ ; тогда  $\tau = \theta(\sigma)$  есть  $s$ -мерный симплекс в пространстве  $\mathcal{A}^n$ . Положим

$$\omega^* = \chi^* \omega, \quad \xi_{s-1}^* = \chi^* \xi_{s-1} \quad \text{вблизи } \partial\tau.$$

Тогда  $d\xi_{s-1}^* = \chi^* d\xi_{s-1} = \omega^*$  вблизи  $\partial\tau$ , причем если  $s = r$ , то равенство (1) и теорема (III, 10A) [примененная к  $\text{int}(\sigma)$  и к  $\text{int}(\sigma_j^{r-1})$  для каждой грани симплекса  $\sigma$ ] дают

$$\int_{\partial\tau} \xi_{r-1}^* = \int_{\partial\sigma} \xi_{r-1} = \int_{\sigma} \omega = \int_{\tau} \omega^*.$$

Поэтому в силу леммы 26b вблизи  $\tau$  существует такая  $\mu$ -регулярная форма  $\xi_{s,i}^*$ , что  $\xi_{s,i}^* = \xi_{s-1}^*$  вблизи  $\partial\tau$  и  $d\xi_{s,i}^* = \omega^*$  вблизи  $\tau$ . Положим

$$\xi'_{s,i} = \theta^* \xi_{s,i}^* \quad \text{вблизи } \sigma;$$

тогда  $d\xi'_{s,i} = \theta^* \omega^* = \omega$  вблизи  $\sigma$ , и, если  $s \neq r-1$ , мы можем положить  $\xi_s = \xi'_{s,i}$  вблизи  $\sigma$ .

Допустим, что  $s = r-1$ . Образует из форм  $\xi'_{r-1,i}$  форму  $\xi'_{r-1}$ . Мы можем определить интегралы  $\int_{\sigma_j^{r-1}} \xi'_{r-1}$  и, следовательно, определить коцепь  $\psi \xi'_{r-1}$ . Положим

$$Z = Y - \psi \xi'_{r-1}, \quad \xi_{r-1} = \xi'_{r-1} + \varphi Z \quad \text{вблизи } L^{r-1}.$$

В силу (27.3)  $\xi_{r-1} = \xi'_{r-1}$  и, следовательно,  $\xi_s = \xi_{s-1}$  вблизи  $L^{r-2} = L^{s-1}$ . Кроме того, пользуясь формулой (27.4) и тем фактом, что [в силу (27.3)]  $\varphi dZ = 0$  вблизи  $L^s$ , мы имеем

$$d\xi_{r-1} = d\xi'_{r-1} + \varphi dZ = \omega \quad \text{вблизи } L^s.$$

Далее, в силу (27.5)

$$\psi \xi_{r-1} = \psi \xi'_{r-1} + Z = Y;$$

таким образом, форма  $\xi_{r-1} = \xi_s$  удовлетворяет всем требуемым условиям. Лемма доказана.

**29. Изоморфизм колец когомологий.** Если дано  $(\mu + 1)$ -гладкое многообразие  $M$ , триангулированное как в § 27, то мы имеем комплекс  $L$ , и поэтому, как в параграфе (П. II, 8), пространства „алгебраических“ когомологий  $H^r(L)$ ; как в параграфе (П. II, 9), они образуют кольцо операторов на пространствах гомологий  $H_r(L)$ .

Подобным же образом мы определим кольцо  $\mu$ -регулярных дифференциальных когомологий  $H_\mu^*$  многообразия  $M$ . При каждом  $r$  замкнутые  $\mu$ -регулярные  $r$ -формы на  $M$  образуют линейное пространство, а  $\mu$ -производные  $\mu$ -регулярные формы образуют его подпространство; фактор-пространство (П. I, 5) обозначается через  $H_\mu^r$ ; наконец,  $H_\mu^*$  есть прямая сумма этих фактор-пространств. Тогда каждая замкнутая  $\mu$ -регулярная форма  $\omega$  определяет некоторый элемент пространства  $H_\mu^r$  и формы  $\omega$  и  $\omega'$  определяют один и тот же элемент в том и только в том случае, если форма  $\omega' - \omega$  является  $\mu$ -производной.

Допустим, что элементы  $h \in H_\mu^r$  и  $h' \in H_\mu^s$  определяются формами  $\omega$  и  $\omega'$  соответственно. Тогда  $\omega \vee \omega'$  есть замкнутая  $\mu$ -регулярная  $(r + s)$ -форма, определяющая некоторый элемент  $h''$  пространства  $H_\mu^{r+s}$ . Формула (II, 8.6) показывает, что этот элемент зависит только от  $h$  и  $h'$ ; мы назовем его *произведением*  $h \cup h'$  элементов  $h$  и  $h'$ . С этим произведением прямая сумма  $H_\mu^*$  становится кольцом.

0-форма замкнута в том и только в том случае, если она постоянна (многообразие  $M$  предполагается связным); никакая 0-форма, отличная от нулевой, не является производной. Поэтому (если мы условимся считать, что 0-форма, тождественно равная нулю, является производной) пространство  $H_\mu^0$  изоморфно пространству  $\mathbb{A}$  действительных чисел; элемент, соответствующий функции 1, тождественно равной единице на  $M$ , является единицей в кольце  $H_\mu^*$ .

В силу (27.2) линейное отображение  $\psi$  определяет при каждом  $r$  линейное отображение  $\Psi$  пространства  $H_\mu^r$  в пространство  $H^r$ ; если элемент  $h$  определяется замкнутой  $\mu$ -регулярной формой  $\omega$ , то  $\Psi h$  определяется как класс когомологий коцепи  $\psi\omega$ .

Теорема де Рама <sup>1)</sup> формулируется следующим образом:

**Теорема 29А.** Пусть  $M$  — некоторое  $(\mu + 1)$ -гладкое многообразие ( $\mu \geq 0$ ), и пусть  $L = \pi(K)$  — какая-либо триангуляция многообразия  $M$ , построенная в соответствии с теоремой 12А.

<sup>1)</sup> De Rham G., Sur l'analyse situs des variétés à  $n$  dimensions, *J. Math. Pures et Appl.* (9), 10 (1931), 115—120. Ср. гл. IV книги де Рама.

Тогда определенное выше отображение  $\Psi$  является изоморфизмом кольца  $H_\mu^*$  на кольцо  $H^*$ .

Этим устанавливается также, что две любые такие триангуляции дают изоморфные кольца алгебраических когомологий и что пространства  $H_\mu^*$  не зависят от  $\mu$ .

Докажем, что  $\Psi$  есть отображение на все кольцо  $H^*$ . Если дан элемент  $h \in H'$ , определяемый коциклом  $X$ , то положим  $\omega = \varphi X$ . Тогда  $d\omega = \varphi dX = 0$  и форма  $\omega$  определяет некоторый элемент  $h'$  пространства  $H_\mu'$ . В силу (27.5)  $\psi\omega = X$ ; следовательно,  $\Psi h' = h$ .

Докажем, что отображение  $\Psi$  взаимно однозначно. Допустим, что  $\Psi h = 0$ ,  $h \in H_\mu'$ . Пусть форма  $\omega$  определяет элемент  $h$ ; положим  $X = \psi\omega$ . Тогда коцикл  $X$  определяет элемент  $\Psi h$ . Допустим сначала, что  $r = 0$ . Тогда  $X = 0$ , и поэтому  $\omega(q_i) = X \cdot q_i = 0$  для каждой вершины  $q_i$  комплекса  $L$ . Так как  $d\omega = 0$ , то форма  $\omega$  постоянна; следовательно,  $\omega = 0$  и потому  $h = 0$ . Теперь предположим, что  $r > 0$ . Тогда  $X = dY$  для некоторой  $(r-1)$ -мерной коцепи  $Y$ . В силу леммы 28а форма  $\omega$  является  $\mu$ -производной и, следовательно,  $h = 0$ .

Заметим, что, как видно из этого доказательства, отображение  $\varphi$  определяет изоморфизм  $\Phi$  кольца  $H^*$  на кольцо  $H_\mu^*$ , обратный изоморфизму  $\Psi$ .

Докажем, что отображение  $\Psi$  сохраняет произведения. Определим в  $H^*$  операцию произведения, положив

$$(1) \quad X \cup Y = \psi(\varphi X \vee \varphi Y).$$

В силу (27.3)  $\varphi\sigma^r \vee \varphi\sigma^s \neq 0$  только в  $\text{St}(\sigma^r) \cap \text{St}(\sigma^s)$ , и потому произведение (1) обладает свойством (а) из (II, II, 9). Свойство (b) будет следовать из (II, 8.6), если воспользоваться формулами (27.2) и (27.4). Свойство (с) следует из (27.6) и (27.5). Таким образом, это произведение определяет в  $H^*$  операцию произведения. Теперь равенство (1) (вместе с тем фактом, что  $\Phi$  и  $\Psi$  взаимно обратны) показывает, что  $\Psi$  сохраняет эту операцию:  $\Psi(h_1 \cup h_2) = \Psi h_1 \cup \Psi h_2$ . Это завершает доказательство.

**З а м е ч а н и е.** Если многообразие  $M$  некомпактно, то комплекс  $L$  бесконечен; коцепи могут иметь бесконечное число отличных от нуля коэффициентов. Мы можем, однако, ограничиться, с одной стороны, конечными коцепями, а, с другой, компактными формами (формами, равными нулю вне какого-либо компактного множества). Наше доказательство обнаруживает, что при этих ограничениях теорема остается справедливой.

**30. Периоды форм.** Если  $\omega$  — замкнутая  $r$ -форма, то интегралы  $\int_A \omega$  по  $r$ -мерным циклам  $A$  в многообразии  $M$  (например, по циклам комплекса  $L$ ) являются „периодами“ формы  $\omega$ . Сразу ясно, что если  $A - B = \partial C$ , то  $\int_A \omega = \int_B \omega$ , и если  $\omega - \xi = d\eta$ , то  $\int_A \omega = \int_A \xi$ ; поэтому периоды зависят только от класса когомологий формы  $\omega$  и класса гомологий цикла  $A$ . Так как  $\int_A \omega = \psi \omega \cdot A$ , то эта операция соответствует операции, показывающей, что пространство  $H^*$  изоморфно пространству, сопряженному к пространству гомологий  $H$ ; см. (П. II, 8.3). Таким образом, различные линейные функции на  $H$  задаются различными классами когомологий замкнутых  $\mu$ -регулярных форм на  $M$ . Это — первоначальная формулировка теоремы (без упомянутого произведения).

**31. Инвариант Хопфа.** В качестве примера применения форм на гладких многообразиях мы найдем некоторое число  $\gamma_f$ , определяемое гладким отображением  $f$  ориентированной  $(2n-1)$ -мерной сферы  $S'$  в  $n$ -мерную ориентированную сферу  $S$  ( $n \geq 2$ ) и остающееся инвариантным<sup>1)</sup> при гомотопиях отображения  $f$ ;  $\gamma_f$  есть целое число (см. § 33). Мы следуем методу, принадлежащему Уайтхеду<sup>2)</sup>.

Теория допускает значительные обобщения<sup>3)</sup>; мы могли бы также, очевидно, пользоваться „бемольными формами“ и аппаратом гл. X.

Все формы, которые мы будем рассматривать, регулярны; см. § 24 и (III, 17). Примеры отображений  $f$ , для которых  $\gamma_f \neq 0$ , см. в цитированных статьях Хопфа и Уайтхеда.

Если задано отображение  $f$ , то мы определим  $\gamma_f$  следующим образом. Пусть  $\omega$  — такая  $n$ -форма на  $S$ , для которой  $\int_S \omega = 1$ . Тогда  $f^*\omega$  есть  $n$ -форма на  $S'$  (III, 17) и  $df^*\omega = f^*d\omega = 0$ . Так

<sup>1)</sup> Hopf H., Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, *Math. Ann.*, **104** (1931), 639—665; Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedriger Dimension, *Fundam. math.*, **25** (1935), 427—440.

<sup>2)</sup> Whitehead J. H. C., An expression of Hopf's invariant as an integral, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **33** (1947), 117—123.

<sup>3)</sup> См. Steenrod N., Cohomology invariants of mappings, *Ann. Math.*, **50** (1949), 954—988.

как группы когомологий сферы  $S'$  в размерностях, заключенных между 0 и  $2n - 1$ , нулевые (это — элементарный факт алгебраической топологии), то теорема де Рама показывает, что на  $S'$  существует такая  $(n - 1)$ -форма  $\xi$ , что  $d\xi = f^*\omega$ . Положим

$$(1) \quad \gamma_f = \int_{S'} \xi \vee f^*\omega.$$

Мы докажем прежде всего, что число  $\gamma_f$  не зависит от выбора формы  $\xi$ . Допустим, что также  $d\xi' = f^*\omega$ . Тогда  $d(\xi' - \xi) = 0$ , и поэтому существует такая  $(n - 2)$ -форма  $\eta$  на  $S'$ , что  $d\eta = \xi' - \xi$ . Рассматривая  $S'$  как цепь, мы имеем  $\partial S' = 0$ ; так как  $df^*\omega = 0$ , то, пользуясь формулой для  $d(\eta \vee f^*\omega)$ , мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{S'} \xi' \vee f^*\omega - \int_{S'} \xi \vee f^*\omega &= \int_{S'} d\eta \vee f^*\omega = \\ &= \int_{S'} [d(\eta \vee f^*\omega) \pm \eta \vee df^*\omega] = \int_{\partial S'} \eta \vee f^*\omega = 0. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что мы исходили из формы  $\omega'$  вместо формы  $\omega$ . Тогда  $\int_S (\omega' - \omega) = 0$ . Если  $X$  есть  $n$ -мерный коцикл, соответствующий форме  $\omega' - \omega$ , то  $X \cdot S = 0$ ; поэтому коцикл  $X$  когомологичен нулю и, значит,  $\omega' - \omega = d\zeta$  для некоторой  $(n - 1)$ -формы  $\zeta$  на  $S$ . Пусть, скажем,  $d\xi = f^*\omega$ . Так как  $\zeta \vee \omega'$  и  $\omega \vee \zeta$  являются формами степени  $2n - 1 > n$  на  $S$ , то они равны нулю; поэтому  $d\xi \vee f^*\zeta = f^*(\omega \vee \zeta) = 0$ ,

$$\begin{aligned} (\xi + f^*\zeta) \vee f^*\omega' - \xi \vee f^*\omega &= \xi \vee f^*(\omega' - \omega) + f^*(\zeta \vee \omega') = \\ &= \xi \vee f^*d\zeta = \pm d(\xi \vee f^*\zeta) \pm d\xi \vee f^*\zeta = \pm d(\xi \vee f^*\zeta) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\int_{S'} (\xi + f^*\zeta) \vee f^*\omega' = \int_{S'} \xi \vee f^*\omega.$$

Кроме того,

$$d(\xi + f^*\zeta) = d\xi + f^*(\omega' - \omega) = f^*\omega';$$

следовательно, два написанных выше интеграла определяют  $\gamma_f$  с помощью  $\omega'$  и  $\omega$  соответственно, и эти определения числа  $\gamma_f$  совпадают.

Мы должны еще показать, что

$$(2) \quad \gamma_{f_0} = \gamma_{f_1}, \text{ если отображение } f_0 \text{ гомотопно отображению } f_1.$$

Пусть  $I$  — единичный отрезок  $[0, 1]$ . Существует такое непрерывное отображение  $F$  прямого произведения  $I \times S'$  (являющегося многообразием с краем) в сферу  $S$ , что  $F(0, p) = f_0(p)$  и  $F(1, p) = f_1(p)$ . Допустим сначала, что отображение  $F$  является гладким.

Выберем на  $S$  форму  $\omega$ , для которой  $\int_S \omega = 1$ . Так как  $dF^*\omega = 0$ , то мы можем найти такую форму  $\xi$  на  $I \times S'$ , для которой  $d\xi = F^*\omega$ . (Мы можем определить отображение  $F$  на множестве  $I' \times S'$ , где  $I'$  — открытый интервал, содержащий отрезок  $I$ ; тогда  $I' \times S'$  есть гладкое многообразие, к которому мы можем применить теорему де Рама и получить форму  $\xi$ .) Так как

$$\partial(I \times S') = 1 \times S' - 0 \times S', \quad dF^*\omega = 0, \quad \omega \vee \omega = 0,$$

то мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{1 \times S'} \xi \vee F^*\omega - \int_{0 \times S'} \xi \vee F^*\omega &= \int_{I \times S'} d(\xi \vee F^*\omega) = \\ &= \int_{I \times S'} d\xi \vee F^*\omega = \int_{I \times S'} F^*(\omega \vee \omega) = 0. \end{aligned}$$

Форма  $F^*\omega$ , рассматриваемая только на  $0 \times S'$ , совпадает с формой  $f_0^*\omega$  на  $S'$ , а форма  $\xi$ , рассматриваемая только на  $0 \times S'$ , дает форму  $\xi_0$  на  $S'$ , для которой  $d\xi_0 = f_0^*\omega$ ; подобным же образом мы имеем  $d\xi_1 = f_1^*\omega$ . Поэтому

$$\gamma_{f_0} = \int_{S'} \xi_0 \vee f_0^*\omega = \int_{0 \times S'} \xi \vee F^*\omega = \int_{1 \times S'} \xi \vee F^*\omega = \gamma_{f_1}.$$

Случай, когда отображение  $F$  только непрерывно, рассматривается с помощью следующей леммы.

**Лемма 31а.** Если гладкие отображения  $f_0, f_1$  гладкого многообразия  $M'$  в гладкое многообразие  $M$  гомотопны, то они гладко гомотопны.

Иными словами, существует гладкое отображение  $F$  прямого произведения  $I \times M'$  в  $M$ , при котором  $F(i, p) = f_i(p)$  ( $i = 0, 1$ ).

Мы можем считать, что  $M$  лежит в евклидовом пространстве  $E$  (теорема 1А) и что существует гладкое отображение  $\pi$  некоторой окрестности  $U$  многообразия  $M$  на  $M$  (теорема 10А); аналогичный смысл имеют  $M', E', U', \pi'$ . Пусть  $G$  — данное непрерывное

отображение произведения  $I \times M'$ . Очевидно, мы можем предположить, что  $G$  определено на  $I' \times M'$  ( $I \subset \text{int}(I')$ ) и при этом

$$G(t, p) = f_0(p) \quad \left(t \leq \frac{1}{3}\right), \quad G(t, p) = f_1(p) \quad \left(t \geq \frac{2}{3}\right).$$

Положим

$$G'(t, q) = G(t, \pi'(q)) \quad (q \in U');$$

тогда  $G'$  есть непрерывное отображение открытого подмножества  $I' \times U'$  евклидова пространства  $\mathbb{X} \times E'$  в  $M$ . По теореме Вейерштрасса об аппроксимации (П. III, лемма 4а) мы можем найти гладкое отображение  $G^*$  произведения  $I' \times U'$  в  $E$ , сколь угодно хорошо аппроксимирующее отображение  $G'$  на множестве  $I \times M'$ .

Пусть  $\lambda(t)$  — действительная гладкая функция, равная 0 при  $t \leq 1/6$  и  $t \geq 5/6$  и равная 1 при  $1/4 \leq t \leq 3/4$ . Положим

$$F'(t, p) = G(t, p) + \lambda(t)[G^*(t, p) - G(t, p)]$$

в  $I' \times M'$ . При  $t$ , принадлежащем некоторой окрестности отрезка  $[1/3, 2/3]$ , отображение  $F' = G^*$  гладко. При  $t < 1/3$  и  $t > 2/3$  мы имеем соответственно  $G(t, p) = f_0(p)$  и  $G(t, p) = f_1(p)$ , и поэтому  $G$  и  $G^*$ , а следовательно, и  $F'$  являются гладкими отображениями. Таким образом, отображение  $F'$  гладко в  $I' \times M'$ . Мы можем считать аппроксимацию настолько хорошей, что  $F'(I \times M')$  лежит в  $U$ . Тогда мы можем положить

$$F(t, p) = \pi(F'(t, p));$$

это и есть искомое отображение.

**32. О гладких отображениях многообразий.** Результаты этого параграфа будут использованы в § 33. Пусть  $f$  — гладкое отображение гладкого многообразия  $M'$  размерности  $m$  в гладкое многообразие  $M$  размерности  $n$ , причем  $m \geq n$ . Для каждой точки  $p \in M'$  отображение  $\nabla f(p)$  касательного пространства  $V(M', p)$  в касательное пространство  $V(M, f(p))$  является линейным; мы говорим, что  $f$  *нормально в точке  $p$* , если это отображение является отображением на все пространство  $V(M, f(p))$ . Для любой точки  $q \in M$  мы говорим, что  $f$  *нормально над  $q$* , если  $f$  нормально в каждой точке  $p \in f^{-1}(q)$ .

**Лемма 32а.** Пусть заданы отображение  $f$ , удовлетворяющее указанным выше условиям, и точка  $q_0$  многообразия  $M$ ; тогда существует гладкое отображение  $g$ , гомотопное  $f$  и произвольно близкое к  $f$ , которое нормально над  $q_0$ .

Пользуясь системами координат около точки  $q_0$  и около любой точки многообразия  $M'$ , из рассмотрений § 5 мы заключаем, что искомая деформация может быть найдена, если мы докажем следующее. Пусть  $E'$  и  $E$  — евклидовы пространства размерностей  $m$  и  $n$  соответственно, и пусть  $f$  — гладкое отображение некоторой окрестности  $U'$   $m$ -мерной клетки  $\sigma' \subset E'$  в  $E$ . Возьмем точку  $q_0 \in E$ . Тогда мы можем найти отображение  $g$ , произвольно близкое к  $f$ , которое нормально в  $\sigma'$  над  $q_0$ .

Имеются два способа доказательства этого.

(а) Пусть  $S$  — множество точек пространства  $E$ , над которым отображение  $f$  нормально; тогда  $S$  открыто. Если  $f$   $m$ -гладко, то  $S$  всюду плотно; это сразу вытекает из теоремы Морса и Сарда<sup>1)</sup>. Поэтому малый параллельный перенос отображения  $f$  дает требуемое отображение  $g$ .

(б) Предполагая, что отображение  $f$  только гладко, можно получить требуемое отображение  $g$  с помощью малого параллельного переноса и вращения<sup>2)</sup>.

*Лемма 32b. Пусть  $f$  — гладкое отображение многообразия  $M'$  в многообразии  $M$  ( $m \geq n$ ); предположим, что  $f$  нормально над точкой  $q_0 \in M$ . Тогда*

$$(8) \quad M'_{q_0} = f^{-1}(q_0)$$

*есть гладкое  $(m - n)$ -мерное многообразие (не обязательно связное) в  $M$ .*

Пусть  $f(p_0) = q_0$ . Пользуясь системами координат около  $p_0$  в  $M'$  и около  $q_0$  в  $M$ , мы можем заменить некоторые окрестности этих точек открытыми множествами  $R'$ ,  $R$  в  $E'$  и в  $E$  соответственно. Пусть  $p_1, q_1$  — соответствующие точки и  $g$  — соответствующее отображение множества  $R'$  в  $R$ . Выберем в  $E'$  такой базис  $e'_1, \dots, e'_m$ , что

$$\nabla g(p_1, e'_i) = 0 \quad (i = n + 1, \dots, m).$$

<sup>1)</sup> См. Thom R., Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comm. Math. Helv.*, **28** (1954), 17—86, теорема 1,3 (стр. 20). (Имеется русский перевод, см. сборник „Расслоенные пространства“, ИЛ, 1959. По поводу теоремы Морса — Сарда см. также гл. I монографии Л. С. Понтрягина, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1955, т. 45. — Прим. ред.)

<sup>2)</sup> См. Whitney H., Differentiable manifolds, *Ann. Math.*, **37** (1936), 645—680, свойство (D) на стр. 655. Очевидно, для этого не необходимо, чтобы  $f$  было взаимно однозначно.

Если  $e_1, \dots, e_n$  — некоторый базис в  $E$ , то мы можем задать отображение  $g$  компонентами

$$y^j = g^j(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^m) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Так как векторы  $\nabla g(p_1, e'_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , независимы, то определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial g^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial g^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} = \nabla g(p, e'_1 \vee \dots \vee e'_n)$$

отличен от нуля в точке  $p_1$ . Поэтому в силу теоремы о неявной функции [см. (II, 7)] множество всех решений уравнения  $g(p) = q_1$  вблизи  $p_1$  дается равенствами

$$x^j = \varphi^j(x^{n+1}, \dots, x^m) \quad (j = 1, \dots, n),$$

где функции  $\varphi^j$  являются гладкими. Положим также, что  $\varphi^j(x^{n+1}, \dots, x^m) = x^j$  при  $j > n$ ; множество всех функций  $\varphi^j$  задает гладкое отображение пространства  $\mathfrak{M}^{m-n}$  на некоторую окрестность точки  $p_1$  в  $M_{q_0}$ , которое является системой координат в  $M_{q_0}$  около  $q_0$ . Перекрывающиеся системы координат, очевидно, гладко связаны.

**33. Другие выражения для инварианта Хопфа.** Мы установим дальнейшие формулы для инварианта  $\gamma_f$  из § 31 (см. цитированную статью Уайтхеда), связывающие его с первоначальным определением Хопфа.

Возьмем  $S'$ ,  $S$ ,  $f$  такими же, как в § 31. Выберем точку  $q \in S$  и допустим, что отображение  $f$  нормально над  $q$ . В силу леммы 32 b  $M_q = f^{-1}(q)$  есть гладкое многообразие (не обязательно связанное) размерности  $n - 1$ . Ориентируем  $M_q$  следующим образом. Выберем в  $V(S', p)$  (где  $f(p) = q$ ) такой базис  $e'_1, \dots, e'_m$ , определяющий положительную ориентацию сферы  $S'$ , что  $\nabla f(p, e'_i) = 0$  при  $i \leq n - 1$  и векторы

$$e_1 = \nabla f(p, e'_n), \dots, e_n = \nabla f(p, e'_{2n-1})$$

определяют положительную ориентацию сферы  $S$ ; тогда векторы  $e'_1, \dots, e'_{n-1}$  будут определять положительную ориентацию многообразия  $M_q$ .

Мы покажем, что если  $\omega$  — такая  $n$ -форма на  $S$ , что  $\int_S \omega = 1$ , и если, кроме того,  $d\xi = f^*\omega$  в  $S'$  и отображение  $f$  нормально над точкой  $q$ , то

$$(1) \quad \gamma_f = \int_{S'} \xi \vee f^*\omega = \int_{M_q} \xi.$$

Из определения нормальности видно, что существует такая окрестность  $U$  точки  $q$ , что отображение  $f$  нормально над каждой точкой  $q'$  этой окрестности; тогда каждое множество  $M_{q'}$  ( $q' \in U$ ) является гладким многообразием, и эти многообразия образуют „расслоение“ прообраза  $f^{-1}(U)$ . Возьмем окрестность  $U$  связной. Предположим сначала, что  $\omega = 0$  вне  $U$ . Если дана точка  $q' \in U$ , то пусть  $A$  — гладкая дуга в  $U$ , соединяющая  $q$  с  $q'$ . Множество  $f^{-1}(A)$ , очевидно, является гладким  $n$ -мерным многообразием  $M_A \subset S'$  с краем  $\partial M_A = M_{q'} - M_q$ . Если через  $f_A$  обозначить отображение  $f$ , рассматриваемое только на  $M_A$ , то  $f_A$  будет отображать  $M_A$  в  $A$ ; так как  $n > 1$ , то  $J_{f_A} = 0$  во всех точках многообразия  $M_A$ , и поэтому  $f_A^*\omega = 0$  на  $M_A$ . Следовательно,

$$(2) \quad \int_{M_{q'}} \xi - \int_{M_q} \xi = \int_{\partial M_A} \xi = \int_{M_A} d\xi = \int_{M_A} f_A^*\omega = 0.$$

Если дана точка  $p \in M_q$ , то, как выше, выберем базисы  $e'_1, \dots, e'_m$  и  $e_1, \dots, e_n$ . Так как  $\nabla f(p, e'_i) = 0$  при  $i < n$ , то

$$f^*\omega(p) \cdot e'_{n, \dots, 2n-1} = \omega(f(p)) \cdot e_{1 \dots n}$$

— единственная отличная от нуля компонента формы  $f^*\omega(p)$ . Следовательно, в силу (I, 6.6)

$$[\xi(p) \vee f^*\omega(p)] \cdot e'_{1, \dots, 2n-1} = [\xi(p) \cdot e'_{1, \dots, n-1}] [\omega(f(p)) \cdot e_{1 \dots n}].$$

Поэтому, пользуясь представлением интеграла  $\int_{f^{-1}(U)} \xi \vee f^*\omega$  в виде

повторного интеграла и вспоминая равенство (2), мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{S'} \xi \vee f^* \omega &= \int_{f^{-1}(U)} \xi \vee f^* \omega = \int_U \omega(q') \int_{M_{q'}} \xi(p) dp dq' = \\ &= \int_{M_q} \xi \int_U \omega = \int_{M_q} \xi, \end{aligned}$$

что доказывает равенство (1).

Возьмем теперь любую форму  $\omega$  и соответствующую форму  $\xi$ . Выберем форму  $\omega'$  такой же, какова ранее была форма  $\omega$ , и выберем форму  $\xi$  так же, как в § 31. Если  $f_q$  есть отображение  $f$ , рассматриваемое только на  $M_q$ , то  $f_q^* \xi = 0$ ; поэтому

$$\int_{M_q} \xi - \int_{M_q} (\xi + f^* \xi) = - \int_{M_q} f_q^* \xi = 0.$$

Так как  $d(\xi + f^* \xi) = f^* \omega'$  (см. § 31), то мы имеем

$$\int_{M_q} \xi = \int_{M_q} (\xi + f^* \xi) = \gamma_f.$$

Наконец, мы интерпретируем число  $\gamma_f$  как степень отображения, откуда будет видно, что  $\gamma_f$  есть целое число. Предположим, что отображение  $f$  нормально над точкой  $q$  (см. лемму 32а) и что  $A$  есть гладкая цепь, ограниченная многообразием  $M_q$ . (Иными словами, существуют симплициальный комплекс  $K$ , алгебраическая  $n$ -мерная цепь  $A_0$  в  $K$  и такое симплексно-гладкое отображение  $\varphi$  комплекса  $K$  в  $S'$ , что  $A = \varphi A_0$  и  $M_q = \varphi \partial A_0$ . Оно существует, так как  $S'$  есть сфера.) Тогда

$$(3) \quad \gamma_f = \int_{M_q} \xi = \int_{\partial A} \xi = \int_A f^* \omega = \int_{fA} \omega.$$

Так как  $f$  отображает границу  $\partial A = M_q$  в одну точку, то  $fA$  есть  $n$ -мерный цикл на  $S$ , и поэтому он равен (алгебраически)  $DS$ , где  $D$  есть „степень“ отображения  $f$ , рассматриваемого на  $A$ . В силу (3)

$$(4) \quad \gamma_f = \int_{\partial S} \omega = D \int_S \omega = D.$$

Ч а с т ь   в т о р а я

## ОБЩАЯ ТЕОРИЯ



## V. Абстрактная теория интегрирования

Теперь мы введем  $r$ -мерное интегрирование в  $n$ -мерном пространстве  $E^n$  аксиоматически. Как видно из § 1, 2 введения, в число областей интегрирования следует включить полиэдральные  $r$ -мерные цепи, а интегрируемое, которое мы называем „коцепью“  $X$ , должно быть линейной функцией от цепей. В зависимости от того, какие дальнейшие условия налагаются на  $X$ , мы получаем „бемольные“ или же „диезные“ коцепи. Основные факты, хотя при их выводе мы пользуемся тем, что пространство  $E^n$  является евклидовым (П. I, 13), очевидно, имеют место независимо от выбора метрики и, следовательно, справедливы в аффинном пространстве; ср. (VII, 10). В этой главе мы предполагаем знание большей части гл. I, части гл. II, начала гл. III и некоторых частей приложений.

Существует естественное определение „массы“  $|A|$  полиэдральной цепи  $A$ . В терминах массы мы даем в явной форме определения „бемольной нормы“  $|A|^b$  и „диезной нормы“  $|A|^{\#}$  цепи  $A$ . Пополнение пространства  $r$ -мерных полиэдральных цепей, снабженного одной из этих норм, приводит к банаховым пространствам (П. I, 14)  $C^b_r$  и  $C^{\#}_r$  соответственно; элементы этих пространств называются соответственно „бемольными цепями“ и „диезными цепями“. Требование, чтобы функция  $X \cdot A$  полиэдральной цепи  $A$  была в одной из этих норм ограниченной, представляет собой условие того, чтобы  $X$  было элементом пространства, сопряженного к одному из этих пространств;  $X$  является соответственно „бемольной“ или же „диезной“ коцепью. Диезная норма имеет простые аналитические свойства (см. § 10), но менее важна с топологической точки зрения, так как граница  $dA$  диезной цепи  $A$ , вообще говоря, не определена.

Легко убедиться в том, что в размерности нуль понятия „бемольная“ и „диезная“ совпадают. Каждая бемольная (или диезная) нульмерная коцепь  $X$  соответствует некоторой действительной функции  $\varphi(p)$ , которая является „диезной“ (мы могли бы называть ее и „бемольной“), т. е. функция  $\varphi$  ограничена и удовлетворяет условию Липшица. В размерности  $n$  бемольная норма и масса цепи совпадают.

Определение „комассы“  $|X|$  коцепи  $X$  сопряжено к определению массы. Формулы для бемольной и диезной норм коцепи  $X$  выражают эти нормы через  $|X|$ ,  $|dX|$  и „константу Липшица“

$\mathcal{L}_X$  коцепи  $X$ ; см. (4.8), (7.2) и (7.8). В § 8 приводится характеристизация этих норм с помощью простых неравенств.

В § 9 доказывается один алгебраический факт, играющий основную роль в § 10. В этом последнем параграфе мы показываем, что между дизельными коцепями и ограниченными, удовлетворяющими условию Липшица дифференциальными формами, существует взаимно однозначное соответствие. Аналогичная теорема для случая бемольной нормы (теорема Уолфа) требует лебеговских методов; она будет доказана в гл. IX.

Основная задача состоит в получении результатов этого рода с ослабленными условиями, налагаемыми на коцепи. Приведем один пример. Будем говорить, что линейная функция  $X$  полиэдральной  $r$ -мерной цепи  $A$  является *полудизельной*, если имеет место следующее:

(а) Масса  $|X|$  локально конечна; иными словами, для каждого ограниченного множества  $R$  существует такое число  $N_R$ , что

$$|X \cdot A| \leq N_R |A| \text{ для любой полиэдральной цепи } A \subset R.$$

(б) Для каждой точки  $p$  и произвольного  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\zeta > 0$ , что для любого  $(r+1)$ -мерного симплекса  $\sigma$

$$|X \cdot \partial\sigma| \leq \varepsilon |\partial\sigma|, \text{ если } \sigma \subset U_\zeta(p).$$

(с) Мы можем выбрать число  $\zeta$  в (б), так что для любого  $r$ -мерного симплекса  $\sigma$  и любого вектора  $v$

$$|X \cdot (T_v \sigma - \sigma)| \leq \varepsilon |\sigma|, \text{ если } \sigma \subset U_\zeta(p), |v| \leq \zeta.$$

Доказательство в § 10 проходит при этих предположениях без каких бы то ни было существенных изменений; мы находим, что *между  $r$ -мерными полудизельными коцепями и непрерывными  $r$ -формами существует взаимно однозначное соответствие.*

Цель § 13 состоит в том, чтобы показать, что любая бемольная коцепь является „слабым пределом“ некоторой последовательности дизельных коцепей. Это имеет различные важные приложения; например, любая бемольная цепь может рассматриваться как дизельная цепь.

В определениях норм массы  $|D|$  и  $|\partial D|$  рассматриваются как величины одного и того же типа (числа), хотя  $D$  и  $\partial D$  имеют различные размерности. В „ $r$ -нормах“ из § 15, если считать, что  $r$  имеет размерность расстояния, восстанавливается размерностное содержание.

„Массу“ общей (бемольной или дизельной) цепи можно определить тремя способами; в § 16 мы показываем, что все эти определения согласованы. (Вообще говоря, масса будет бесконечна.)

Это дает обобщение понятия площади „квадрируемой“ поверхности; ср. (X, 4).

Мы заканчиваем главу, показывая, что пространства цепей сепарабельны, в то время как пространства коцепей не сепарабельны; таким образом, эти пространства не рефлексивны.

**1. Полиэдральные цепи.** Рассмотрим сначала  $r$ -мерные полиэдральные цепи в  $r$ -мерном пространстве  $E^r$ . Пусть  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  — ограниченные неперекрывающиеся ориентированные полиэдральные области в  $E^r$  (П. II, 2). Каждой области  $\sigma_i$  мы припишем некоторый коэффициент  $a_i$ ; тогда выражение  $\sum a_i \sigma_i$  мы будем называть  $r$ -мерной полиэдральной цепью  $A$  в  $E^r$ . Мы можем задать цепь  $A$ , ориентируя  $E^r$  и задавая в  $E^r$  функцию  $A(p)$ , равную  $a_i$  или же  $-a_i$  в  $\text{int}(\sigma_i)$ , в зависимости от того, имеет  $\sigma_i$  ту же ориентацию, что и  $E^r$ , или противоположную, и равную нулю во всех остальных точках пространства  $E^r$ . Мы считаем, что  $A=B$ , если соответствующие функции равны всюду, за исключением конечного множества полиэдральных клеток размерности  $< r$ . Заметим, что если  $\sum_j \tau_{ij}$  есть подразделение клетки  $\sigma_i$ , то полиэдральные цепи  $\sum_i a_i \sigma_i$  и  $\sum_{i,j} a_i \tau_{ij}$  совпадают.

Определим произведение  $aA$  с помощью функции  $aA(p)$  и сумму  $A+B$  с помощью функции  $A(p)+B(p)$ ; цепи, очевидно, образуют линейное пространство. Если даны две цепи  $A=\sum a_i \sigma_i$  и  $B=\sum b_i \tau_i$ , то мы можем найти общее подразделение клеток  $\sigma_i$  и  $\tau_i$ , имеющее клетками  $\sigma'_i$  (П. II, лемма 3b); тогда, если  $A=\sum a'_i \sigma'_i$ ,  $B=\sum b'_i \sigma'_i$ , то мы имеем  $A+B=\sum (a'_i + b'_i) \sigma'_i$ .

Полиэдральная  $r$ -мерная цепь  $A$  в пространстве  $E^n$  состоит из конечного множества различных  $r$ -мерных плоскостей вместе с полиэдральной  $r$ -мерной цепью в каждой из них. Мы можем отбросить какую-либо  $r$ -мерную плоскость, если часть цепи  $A$ , лежащая в ней, равна нулю. Мы можем задать  $A$ , ориентируя каждую  $r$ -мерную плоскость и задавая в ней функцию  $A(p)$ .

Определение произведения  $aA$  очевидно. Чтобы определить сумму  $A+B$ , возьмем все  $r$ -мерные плоскости, участвующие в определении цепей  $A$  и  $B$ , и сложим в каждой из них  $A(p)$  и  $B(p)$ . И на этот раз цепи образуют линейное пространство, которое мы обозначаем через  $C_r^{\text{pol}}(E^n)$ .

Как и прежде, любое выражение  $\sum a_i \sigma'_i$  определяет  $r$ -мерную полиэдральную цепь; подразделение клеток  $\sigma'_i$  не изменяет цепи, и мы можем отбросить или добавить член  $a_i \sigma'_i$ , если  $a_i = 0$ . Клетки

$\sigma_i^r$  могут перекрываться; конечно, можно выбрать выражение цепи в виде линейной комбинации неперекрывающихся клеток  $\sigma_i^r$ . Мы могли бы допустить рассмотрение и „вырождающихся“ клеток  $\sigma_i^r$  (П. II, 1); они представляют собой множества, не имеющие внутренних точек в соответствующей плоскости  $E^r$ ; в этом случае мы считали бы член  $a_i \sigma_i^r$  равным нулю. (Такие клетки возникают, например, при доказательстве теоремы 3А, см. ниже.)

При  $r=0$  мы имеем нульмерные цепи  $\sum a_i \sigma_i^0$ , где  $\sigma_i^0$  — точки, которые не предполагаются „ориентированными“. При  $r=n$  определение сводится к данному выше.

Для любого представления  $\sum a_i \sigma_i^r$  цепи  $A$ , для которого клетки  $\sigma_i^r$  не перекрываются и коэффициенты  $a_i \neq 0$ , множество точек, принадлежащих (замкнутым) клеткам  $\sigma_i^r$ , одно и то же. Это множество точек называется *носителем* (support)  $\text{spt}(A)$  цепи  $A$ . Мы говорим, что цепь  $A$  *лежит в*  $R$  и пишем  $A \subset R$ , если  $\text{spt}(A) \subset R$ .

Граница  $\partial A$  цепи  $A = \sum a_i \sigma_i^r$  определяется как  $\sum a_i \partial \sigma_i^r$ . То, что граница не зависит от представления цепи  $A$ , легко увидеть, вычислив  $(\partial A)(p)$  с помощью  $A(p)$ . Например, если  $A = a\sigma + b\tau$ , где  $\sigma$  и  $\tau$  — клетки, лежащие в  $E^r$  и ориентированные так же, как и  $E^r$ , и  $\partial\sigma = \sigma^{r-1} + \dots$ ,  $\partial\tau = -\sigma^{r-1} + \dots$ , то в ориентированной плоскости  $E^{r-1}$  клетки  $\sigma^{r-1}$  мы имеем  $(\partial A)(p) = a - b$  внутри клетки  $\sigma^{r-1}$ . Конечно,  $\partial(aA) = a \partial A$ ,  $\partial(A+B) = \partial A + \partial B$ ,  $\partial\partial A = 0$ .

**2. Масса полиэдральных цепей.** Напомним, что для произвольной  $r$ -мерной клетки  $\sigma$  символ  $|\sigma| = |\sigma|_r$  обозначает  $r$ -мерный объем этой клетки. При  $r=0$   $|\sigma| = 1$ . *Масса* полиэдральной цепи  $\sum a_i \sigma_i^r$  определяется следующим образом:

(1)  $|\sum a_i \sigma_i^r| = \sum |a_i| |\sigma_i^r|$ , если клетки  $\sigma_i^r$  не перекрываются.

Если цепь  $A$  определена с помощью функций  $A_1(p), \dots$  в различных  $r$ -мерных плоскостях  $P_1, \dots$ , то мы, очевидно, имеем эквивалентное выражение:

$$(2) \quad |A| = \sum_i \int_{P_i} |A_i(p)| dp.$$

При  $r=0$   $|\sum a_i \sigma_i^0| = \sum |a_i|$ , если точки  $\sigma_i^0$  различны. Очевидно,

$$(3) \quad |aA| = |a| |A|, \quad |A+B| \leq |A| + |B|$$

и  $|A| \neq 0$ , если  $A \neq 0$ ; следовательно, масса является нормой (П. I, 8).

Лемма 2а. Пусть  $\pi$  — ортогональная проекция пространства  $E^n$  на  $s$ -мерную плоскость  $P^s$ . Тогда

$$(4) \quad |\pi A| \leq |A|.$$

По определению  $\pi \sum a_i \sigma_i = \sum a_i \pi \sigma_i$ . Проекция  $\pi \sigma_i$  либо вырождается (П. II, 1) и в этом случае выпадает из  $\pi A$  (§ 1), либо же удовлетворяет соотношению  $|\pi \sigma| \leq |\sigma|$ ; таким образом, неравенство (4) справедливо.

Лемма 2б. Пусть  $Q$  — выпуклая полиэдральная клетка в  $E^n$ , и пусть  $\pi$  — проекция пространства  $E^n$  на  $Q$ , определяемая следующим образом:

$$(5) \quad \pi(p) = \text{точке клетки } Q, \text{ ближайшей к } p.$$

Тогда имеет место неравенство (4).

Нетрудно видеть, что  $E^n$  разбивается на полиэдральные области, в каждой из которых отображение  $\pi$  аффинно. Запишем  $A = \sum a_i \sigma_i$ , где каждая клетка  $\sigma_i$  лежит в одной из этих областей. Рассмотрим любую клетку  $\sigma_i$ . Ясно, что  $\pi$  не увеличивает расстояний; пользуясь в  $\sigma_i$  такими же координатами, как и в конце (I, 12), мы видим, что  $|\pi \sigma_i| \leq |\sigma_i|$ . Таким образом, неравенство (4) справедливо. [Ср. доказательство равенства (VIII, 1.29).]

**3. Бемольная норма.** Бемольная норма  $|A|^b$  полиэдральной  $r$ -мерной цепи  $A$  в пространстве  $E^n$  определяется следующим образом:

$$(1) \quad |A|^b = \inf \{ |A - \partial D| + |D| \},$$

где нижняя грань берется по всем  $(r+1)$ -мерным полиэдральным цепям  $D$ . См. также § 8. Очевидно, что

$$(2) \quad |aA|^b = |a| |A|^b, \quad |A+B|^b \leq |A|^b + |B|^b.$$

Мы докажем ниже (§ 12), что

$$(3) \quad |A|^b = 0 \text{ в том и только в том случае, если } A = 0.$$

Отсюда следует, что  $|\cdot|^b$  есть норма. Наделенное этой нормой пространство  $C_r^{\text{pol}}(E^n)$ , если его пополнить, становится банаховым пространством  $C_r^b(E^n)$  (П. I, 14). Мы называем элементы этого пространства *бемольными цепями*. Массу в этом пространстве мы определим в § 16.

В силу леммы 2б мы можем в (1) потребовать, чтобы цепь  $D$  лежала в наименьшем выпуклом множестве, содержащем носитель  $\text{spt}(A)$ . См. также лемму (VII, 5b) и формулу (VIII, 1.1).

Логическая структура следующих параграфов такова. Вплоть до § 12 мы пользуемся только полиэдральными цепями с полунормой  $|A|^b$ ; в § 12 доказывается, что она является нормой. Тем самым будут доказаны все факты, установленные в этих параграфах<sup>1)</sup>. Это же относится и к норме  $|A|^\#$ .

Докажем два элементарных неравенства, сначала для полиэдральных цепей:

$$(4) \quad |\partial A|^b \leq |A|^b \leq |A|.$$

Второе неравенство сразу следует из (1), если положить  $D=0$ . Чтобы доказать первое, выберем для данного  $\varepsilon > 0$  такую цепь  $D$ , что  $|A - \partial D| + |D| < |A|^b + \varepsilon$ . Теперь, полагая  $D' = A - \partial D$ , имеем

$$|\partial A - \partial D'| + |D'| = |A - \partial D| < |A|^b + \varepsilon;$$

поэтому  $|\partial A|^b < |A|^b + \varepsilon$  и неравенства (4) доказаны.

Определим теперь  $\partial A$  для любой бемольной цепи  $A$  и докажем первое из неравенств (4). Пусть, скажем,  $A = \lim^b A_i$ , где  $A_i$  — полиэдральные цепи. Тогда  $|A_j - A_i|^b \rightarrow 0$ , и поэтому в силу (4)  $|\partial A_j - \partial A_i|^b \rightarrow 0$ . Следовательно,  $\partial A_1, \partial A_2, \dots$  есть фундаментальная последовательность; она определяет некоторый элемент пространства  $C_{r-1}^b$ , который мы обозначим через  $\partial A$ . Этот элемент не зависит от выбора последовательности. Так как  $|\partial A_i|^b \leq |A_i|^b$ , то при  $i \rightarrow \infty$  мы получаем первое из неравенств (4) для  $A$ . Очевидно,  $\partial \partial A = 0$ . В силу (4)  $\partial$  есть непрерывная операция.

Для данной  $r$ -мерной ориентированной клетки  $\sigma$  в  $E^n$  и вектора  $v$  пусть  $T_v \sigma$  обозначает таким же образом ориентированную клетку, содержащую все точки  $p + v$ ,  $p \in \sigma$ . Положим

$$T_v \sum a_i \sigma_i' = \sum a_i T_v \sigma_i', \quad T_v \lim^b A_i = \lim^b T_v A_i.$$

Пусть  $\mathcal{D}_v \sigma$  есть  $(r+1)$ -мерная ориентированная клетка [обозначаемая в (П. II, 13) через  $\mathcal{D}_v(I \times \sigma)$ ], состоящая из всех точек  $p + tv$ ,  $p \in \sigma$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Продолжим функцию  $\mathcal{D}_v A$  линейно на множество всех полиэдральных цепей  $A$ . В силу (П. II, 13.5)

$$\partial \mathcal{D}_v A = T_v A - A - \mathcal{D}_v \partial A$$

для полиэдральной цепи  $A$ . Очевидно, что

$$(5) \quad |\mathcal{D}_v A| \leq |v| |A|.$$

<sup>1)</sup> То есть будет узаконено пополнение пространства  $C_r^{\text{pol}}(E^n)$  и рассмотрение бемольных цепей. — Прим. ред.

С помощью неравенства (4) мы получаем отсюда

$$(6) \quad |T_v A - A|^b \leq |v|(|A| + |\partial A|).$$

[Это имеет место и для любой бемольной цепи  $A$ ; см. (VIII, 3.7).]

Теорема 3А. Если клетки  $\sigma_1, \dots, \sigma_s$  параллельны и одинаково ориентированы, а коэффициенты  $a_i \geq 0$ , то

$$(7) \quad |\sum a_i \sigma_i|^b = |\sum a_i \sigma_i| = \sum a_i |\sigma_i|;$$

в частности,

$$(8) \quad |\sigma|^b = |\sigma|.$$

Положим  $a = |\sum a_i \sigma_i|$ ; число  $a$  равно  $\sum a_i |\sigma_i|$  даже в том случае, если клетки  $\sigma_i$  перекрываются. Допустим, что для некоторой цепи  $D$

$$|\sum a_i \sigma_i - \partial D| + |D| < a.$$

Выберем  $r$ -мерную плоскость  $P$ , параллельную клеткам  $\sigma_i$ , и пусть  $\pi$  — проекция в плоскость  $P$ . Тогда в силу леммы 2а

$$|\sum a_i \pi \sigma_i - \partial \pi D| + |\pi D| < a.$$

Так как цепь  $D$  является  $(r+1)$ -мерной, то  $\pi D = 0$ , поэтому и  $\partial \pi D = 0$ . Кроме того,  $|\sum a_i \pi \sigma_i| = \sum a_i |\sigma_i| = a$ , и мы пришли к противоречию. Следовательно, равенство (7) справедливо. По поводу другого метода доказательства см. ниже теорему 6В.

Для малых симплексов  $\sigma$  имеет место равенство  $|\partial \sigma|^b = |\sigma|$ ; нам это свойство не понадобится. Заметим, что

$$(9) \quad |\partial \sigma^1|^b = \inf \{ |\partial \sigma^1|, |\sigma^1| \} = \inf \{ 2, |\sigma^1| \}$$

для любого одномерного симплекса  $\sigma^1$ .

Теорема 3В. Если  $\pi$  — такая проекция, как в лемме 2а или как в лемме 2б, то

$$(10) \quad |\pi A|^b \leq |A|^b.$$

В самом деле, для любой  $(r+1)$ -мерной цепи  $D$  указанные леммы дают

$$|\pi A - \partial \pi D| + |\pi D| \leq |A - \partial D| + |D|.$$

См. в этой связи теорему 16С.

Установим еще одно свойство бемольной нормы:

$$(11) \quad |A|^b = \inf \{ |A - \partial D|^b + |D|^b \}.$$

Полагая  $D=0$ , доказываем, что левая часть  $\geq$  правой. Обратное неравенство следует из (2) и (4): для любой  $(r+1)$ -мерной цепи  $D$

$$|A|^b \leq |A - \partial D|^b + |\partial D|^b \leq |A - \partial D|^b + |D|^b.$$

**4. Бемольные коцепи.** Бемольная  $r$ -мерная коцепь  $X$  в пространстве  $E^n$  есть такая линейная функция от  $r$ -мерной бемольной цепи  $A$  в  $E^n$ , значения которой мы записываем в виде  $X \cdot A$ , что  $|X \cdot A| \leq N |A|^b$  для некоторого  $N$ ; таким образом, она является элементом пространства (П. I, 8)

$$(1) \quad \bar{C}_r^b = C^{br} = C^{br}(E^n),$$

сопряженного к банахову пространству  $r$ -мерных бемольных цепей в  $E^n$ . [До того как мы прочитаем § 12, пространство  $C^{br}$  мы должны рассматривать как полусопряженное к пространству  $C_r^b$ ; см. (П. I, 15).] По поводу цепей в открытых множествах  $R \subset E^n$  см. (VIII, 1). Бемольная норма  $|X|^b$  по определению (П. I, 8) равна

$$(2) \quad |X|^b = \sup_{|A|^b \neq 0} \frac{|X \cdot A|}{|A|^b} = \sup_{|A|^b = 1} |X \cdot A|.$$

Мы можем потребовать, чтобы цепи  $A$  в (2) были полиэдральными; [см. лемму (П. I, 14a)]. На основании общей теории (П. I, лемма 8с) для любой  $r$ -мерной бемольной цепи  $A$  имеем

$$(3) \quad |A|^b = \sup_{|X|^b \neq 0} \frac{|X \cdot A|}{|X|^b} = \sup_{|X|^b = 1} |X \cdot A|;$$

в действительности (П. I, лемма 8b) существует  $r$ -мерная бемольная коцепь  $X$ , для которой  $|X|^b = 1$  и  $X \cdot A = |A|^b$ .

Определим комассу  $|X|$  бемольной коцепи  $X$

$$(4) \quad |X| = \sup_{A \neq 0} \frac{|X \cdot A|}{|A|} = \sup_{|A|=1} |X \cdot A|,$$

где  $A$  — полиэдральные цепи. В силу (3.4) комасса всегда конечна и  $|X| \leq |X|^b$ . Для данной  $r$ -мерной бемольной коцепи  $X$  бемольная норма  $|X|^b$  и комасса  $|X|$  являются, соответственно, наименьшими из чисел, удовлетворяющих соотношениям

$$(5) \quad |X \cdot A| \leq |X|^b |A|^b, \quad |X \cdot A| \leq |X| |A|,$$

для всех  $r$ -мерных полиэдральных цепей  $A$ . Первое неравенство, конечно, справедливо для всех  $r$ -мерных бемольных цепей  $A$ , второе же будет доказано для всех цепей  $A$  в § 16.

Кограница  $dX$   $r$ -мерной бемольной коцепи  $X$  есть линейная функция  $(r+1)$ -мерной цепи, определяемая условием

$$(6) \quad dX \cdot A = X \cdot \partial A.$$

Как и в (П. II, 7),  $ddX = 0$ . В силу (5) и (3.4)

$$|dX \cdot A| = |X \cdot \partial A| \leq |X|^b |\partial A|^b \leq |X|^b |A|^b$$

для всех  $(r+1)$ -мерных цепей  $A$ ; поэтому  $dX$  является бемольной коцепью и  $|dX|^b \leq |X|^b$ . Таким образом,

$$(7) \quad |X| \leq |X|^b, \quad |dX| \leq |dX|^b \leq |X|^b.$$

Докажем теперь обратные неравенства; именно

$$(8) \quad |X|^b = \sup \{ |X|, |dX| \}.$$

Мы должны доказать, что левая часть  $\leq$  правой. Возьмем любую полиэдральную цепь  $A$  и любое  $\varepsilon > 0$ . Выберем такую полиэдральную цепь  $D$ , что  $|A - \partial D| + |D| < |A|^b + \varepsilon$ . Тогда, если  $M$  — правая часть равенства (8), то

$$\begin{aligned} |X \cdot A| &\leq |X \cdot (A - \partial D)| + |X \cdot \partial D| \leq |X| |A - \partial D| + |dX| |D| \leq \\ &\leq M(|A - \partial D| + |D|) \leq M(|A|^b + \varepsilon), \end{aligned}$$

поэтому  $|X \cdot A| \leq M|A|^b$ , и неравенство доказано.

**Теорема 4А.** Если  $X$  — такая линейная функция  $r$ -мерной полиэдральной цепи, что  $|X|$  и  $|dX|$  конечны, то она определяет единственную  $r$ -мерную бемольную коцепь и имеет место равенство (8).

В самом деле, проведенное выше доказательство показывает, что если  $X$  рассматривать только на множестве полиэдральных цепей, то верхняя грань  $|X|^b$  конечна и удовлетворяет условию (8); следовательно, функцию  $X$  можно единственным образом продолжить на  $C_r^b$  (П. I, лемма 14а), и равенство (8) имеет место.

Покажем, что комассу  $|X|$  можно определить, если в (4) рассматривать только симплексы:

$$(9) \quad |X| = \sup \left\{ \frac{|X \cdot \sigma|}{|\sigma|} : \text{симплексы } \sigma \right\}.$$

Так как неравенство  $\geq$  выполняется, то достаточно показать, что для каждого  $\varepsilon > 0$  существует симплекс  $\sigma$ , для которого  $|X \cdot \sigma|/|\sigma| > |X| - \varepsilon$ . Мы можем выбрать такую полиэдральную

цепь  $A$ , представленную в виде  $A = \sum a_i \sigma_i$  с неперекрывающимися симплексами  $\sigma_i$ , что

$$|A| = \sum |a_i| |\sigma_i| = 1, \quad |X \cdot A| > |X| - \varepsilon.$$

Тогда для некоторого симплекса  $\sigma_i$  выполняется требуемое неравенство; в самом деле, в противном случае мы получаем противоречие:

$$|X \cdot A| \leq \sum |a_i| |X \cdot \sigma_i| \leq \sum |a_i| (|X| - \varepsilon) |\sigma_i| = |X| - \varepsilon.$$

Заменяя  $X$  на  $dX$ , мы находим:

$$(10) \quad |dX| = \sup \left\{ \frac{|X \cdot \partial \sigma|}{|\sigma|} : \text{симплексы } \sigma \right\}.$$

Рассмотрим случай  $r = 0$ . Так как каждая точка  $p$  пространства  $E^n$  является нульмерной клеткой, то каждая нульмерная бемольная коцепь  $X$  определяет некоторую действительную функцию  $D_X$ :  $D_X(p) = X \cdot p$ .

Мы говорим, что некоторая функция  $\varphi$ , принимающая значения в банаховом пространстве, является *дизной*, если и  $\varphi$  [см. (II, 4)] и  $|\varphi|$  конечны; ср. доказательство формулы (7.9) и § 10.

**Теорема 4В.** Нульмерные бемольные коцепи  $X$  соответствуют действительным дизным функциям  $D_X$ ; при этом

$$(11) \quad |X| = |D_X|, \quad |dX| = \mathfrak{L}(D_X).$$

Первое равенство сразу следует из (9), так как  $|\sigma^0| = 1$ . Для любого одномерного симплекса  $\sigma^1 = pq$  имеем

$$X \cdot \partial \sigma^1 = X \cdot q - X \cdot p = D_X(q) - D_X(p).$$

Так как  $|\sigma^1| = |q - p|$  (длина вектора  $q - p$ ), то соотношение (10) дает второе из равенств (11).

При  $r = n$  каждая ограниченная непрерывная функция  $\varphi$  с помощью равенства <sup>1)</sup>  $X \cdot \sigma = \int_{\sigma} \varphi$  определяет некоторую  $n$ -мерную коцепь  $X$ . Вообще же  $n$ -мерные коцепи соответствуют ограничен-

<sup>1)</sup> Точнее говоря, следует выбрать некоторую ориентацию пространства  $E^n$  и положить  $X \cdot \sigma = \pm \int_{\sigma} \varphi$ , где интеграл берется без учета ориентации клетки  $\sigma$ , а знак выбирается в соответствии с тем, совпадает или не совпадает ориентация клетки  $\sigma$  с ориентацией пространства  $E^n$ . Иначе говоря,  $X \cdot \sigma = \int_{\sigma} \varphi \omega_0$ , где  $\omega_0$  — единичный  $n$ -ковектор пространства  $E^n$ .

*Прим. ред.*

ным измеримым функциям; см. (IX, 1). Так как каждая  $(n+1)$ -мерная полиэдральная цепь в  $E^n$  равна нулю, то для любой  $n$ -мерной коцепи  $X$  мы имеем  $dX=0$  и  $|dX|=0$ . Поэтому в силу (3.1) и (8)

$$(12) \quad |A|^b = |A|, \quad |X|^b = |X| \quad \text{при } r=n.$$

**5. Примеры.** (а) Пусть  $A$  — одномерная цепь, образованная двумя ориентированными отрезками  $p_1p_2, p_2p_3$  с углом при точке  $p_2$ . Вставим в этот угол маленький треугольник  $D=p'_1p_2p'_3$ , где точка  $p'_1$  лежит на отрезке  $p_1p_2$ , так что  $|A-\partial D|=p_1p'_1+|p'_1p'_3+p'_3p_3|$ . Если треугольник  $D$  достаточно мал, то  $|A-\partial D|+|D|<|A|$ ; таким образом,  $|A|^b<|A|$ . Мы можем теперь вставить маленькие треугольники в углы при точках  $p'_1$  и  $p'_3$  и т. д. Точное значение величины  $|A|^b$  автору неизвестно.

(b) Пусть  $\sigma$  — одномерный симплекс,  $|\sigma|=a<2$ ; пусть, далее,  $|v|=b<a/2$  и  $A=T_v\sigma-\sigma$ . Тогда  $D=\mathcal{D}_v\sigma$  есть параллелограмм и неравенство (3.6) дает

$$|A|^b \leq b(a+2) < 2a = |A|.$$

Мы можем заменить две стороны параллелограмма ломаными линиями, несколько урезав параллелограмм  $D$ , и тем самым показать, что  $|A|^b < b(a+2)$ .

(с) Пусть  $\sigma_i$  и  $\tau_i$  — точки  $-1/2^i$  и  $1/2^i$  соответственно в пространстве  $E^1$ . Рассматривая эти точки как нульмерные клетки, определим нульмерные цепи

$$A'_i = \tau_i - \sigma_i, \quad A_k = A'_0 + A'_1 + \dots + A'_k.$$

Пусть  $B_i$  — отрезок от  $\sigma_i$  до  $\tau_i$ . Тогда  $|A'_i|^b = |\partial B_i|^b = |B_i| = 2/2^i$ , и поэтому  $A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$  существует (предел относительно бемольной нормы). Очевидно, мы не можем приписать цепи  $A$  конечной массы.

(d) Пусть в примере (с)  $A_{mk}$  содержит точки  $\sigma_0, \dots, \sigma_k$  с коэффициентом  $-1$  и точки  $\tau_0, \dots, \tau_{m+k}$  с коэффициентом  $1$ . Тогда  $A_m^* = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{mk}$  существует и „содержит“ те же точки, что и  $A$ . [Носители совпадают; см. (VII, 3)]. Однако  $A_m^* \neq A$  при  $m \neq 0$ . Например, если  $X$  есть нульмерная коцепь, определяемая функцией  $D_X(p) = 1$  (для всех  $p$ ), то  $X \cdot A = 0$ ,  $X \cdot A_m^* = m$ . См. в этой связи (VI, 1).

(е) Мы можем построить аналогичные одномерные цепи в  $E^n$  с парами отрезков.

(f) Легко можно построить такую последовательность  $A_1, A_2, \dots$  ориентированных ломаных линий на плоскости, что предел  $\lim^b A_i$

существует и изображается дугой, не спрямляемой между каждыми двумя ее точками. Для этого можно воспользоваться графиком недифференцируемой функции.

(г) Пусть в  $E^1$  одномерная коцепь  $X$  определяется условиями

$$\bar{D}_X(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad X \cdot \sigma = \int_{\sigma} \bar{D}_X.$$

Тогда  $|X| = 1$ ,  $dX = 0$ , и поэтому  $|X|^b = 1$ . Далее,  $X \cdot \sigma < |\sigma|$  для любого одномерного симплекса  $\sigma$ . Более того,  $X \cdot A < |A| = |A|^b$  для всех<sup>1)</sup>  $A$ . В самом деле, для того чтобы имело место равенство, цепь  $A$ , очевидно, должна была бы быть „сосредоточена“ в точке  $t = 0$ , что невозможно [см. (VII, 9)].

**6. Дизная норма.** Если в рассмотренном выше примере (b) мы с помощью параллельного переноса (сдвига на расстояние  $b$ ) совместим отрезок  $\sigma$  (длины  $a$ ) с отрезком  $T_v \sigma$ , то цепь  $A$  станет нулевой. Это наводит на мысль ввести для  $A$  новую норму, которая была бы  $\leq ab < |A|^b$ . Мы осуществим эту идею следующим образом.

Если дана  $r$ -мерная полиэдральная цепь  $A$ , то мы рассмотрим всевозможные представления  $\sum a_i \sigma_i$  цепи  $A$ ; затем, сдвинув произвольно каждую клетку  $\sigma_i$ , мы заменим  $A$  цепью  $\sum a_i T_{v_i} \sigma_i$  и найдем бемольную норму результата; наконец, прибавим к ней „величину сдвига“  $\sum |a_i| |\sigma_i| |v_i|$ , взятую с некоторым множителем, и найдем минимум полученной величины. Таким образом, мы определяем *дизную норму* цепи  $A$  (см также § 8):

$$(1) \quad |A|^{\#} = \inf \left\{ \frac{\sum |a_i| |\sigma_i| |v_i|}{r+1} + \left| \sum a_i T_{v_i} \sigma_i \right|^b : A = \sum a_i \sigma_i \right\}.$$

Множитель  $1/(r+1)$  подбирается с таким расчетом, чтобы мы могли доказать равенство (7.8); см. пример (e) из § 11. Заметим, что можно брать и клетки  $\sigma_i$ , которые не лежат в  $\text{spt}(A)$ ; см., например, доказательство неравенства (7.7). Согласно (VIII, 1.29) мы можем потребовать, чтобы все  $\sigma_i$  и  $T_{v_i} \sigma_i$  лежали в любом данном выпуклом открытом множестве, содержащем  $A$ .

Взяв все  $v_i = 0$ , видим, что

$$(2) \quad |A|^{\#} \leq |A|^b.$$

Очевидно,  $|aA|^{\#} = |a| |A|^{\#}$ ,  $|A+B|^{\#} \leq |A|^{\#} + |B|^{\#}$ ; в § 12 мы докажем, что если  $A \neq 0$ , то и  $|A|^{\#} \neq 0$ . Пополняя прост-

<sup>1)</sup> Разумеется, отличных от нуля. — Прим. ред.

пространство полиэдральных цепей, снабженное этой нормой, получаем пространство  $C_r^\#(E^n)$   $r$ -мерных диезных цепей в  $E^n$ .

Мы не определяем  $\partial A$  для диезных цепей  $A$ ; см. § 11, примеры (с) и (d).

**Теорема 6А.** Для любой  $r$ -мерной полиэдральной цепи  $A$  и любого вектора  $v$

$$(3) \quad |T_v A - A|^\# \leq \frac{|A| |v|}{r+1}.$$

Допустим сначала, что  $A = \sigma$ . Положим

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = T_v \sigma, \quad v_1 = v, \quad v_2 = 0, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 1.$$

Тогда  $a_1 T_{v_1} \sigma_1 + a_2 T_{v_2} \sigma_2 = 0$  и из (1), как и требуется, получаем  $|T_v \sigma - \sigma|^\# \leq |\sigma| |v|/(r+1)$ . Неравенство (3) теперь будет доказано для любой полиэдральной цепи  $A$ , если представить ее в виде  $\sum a_i \sigma_i$ , где клетки  $\sigma_i$  не перекрываются.

**Теорема 6В.** При предположениях теоремы 3А

$$(4) \quad |\sum a_i \sigma_i|^\# = |\sum a_i \sigma_i| = \sum a_i |\sigma_i|.$$

Мы докажем это с помощью последующих теорем. Выберем  $r$ -мерную плоскость  $P$  (ориентированную так же, как и клетки  $\sigma_i$ ) и проекцию  $\pi$ , как в доказательстве теоремы 3А. Определим коцепь  $X_0$  в плоскости  $P$  условием  $X_0 \cdot \sigma = |\sigma|$  (если клетка  $\sigma$  ориентирована так же, как и  $P$ ). Определим коцепь  $X$  в  $E^n$  условием  $X \cdot A = X_0 \cdot \pi A$ . Тогда  $dX = 0$ ,  $\mathcal{L}(X) = 0$ , и поэтому в силу (7.8)  $|X|^\# = |X| = 1$ . Очевидно,  $X \cdot \sum a_i \sigma_i = \sum a_i |\sigma_i|$ . Следовательно, в (4) имеет место знак  $\geq$ ; противоположное неравенство известно.

Рассмотрим случай  $r = 0$ . Покажем, что

$$(5) \quad |A|^\# = |A|^b, \text{ если } r = 0.$$

В силу (2) требуется только доказать неравенство  $\geq$ . Возьмем для  $A$  любое представление  $\sum a_i \sigma_i^0$  и любые векторы  $v_i$ . Пусть  $\sigma'_i$  — одномерный симплекс, идущий от  $\sigma_i^0$  к  $T_{v_i} \sigma_i^0$ ; тогда

$$\partial \sigma'_i = T_{v_i} \sigma_i^0 - \sigma_i^0, \quad |\sigma'_i| = |v_i|.$$

Теперь, полагая  $D = -\sum a_i \sigma'_i$  и пользуясь формулой (3.11), получаем

$$\begin{aligned} \sum |a_i| |\sigma_i^0| |v_i| + |\sum a_i T_{v_i} \sigma_i^0|^b &= \sum |a_i| |\sigma'_i| + \\ &+ |\sum a_i \sigma_i^0 + \sum a_i \partial \sigma'_i|^b \geq |D| + |A - \partial D|^b \geq |A|^b. \end{aligned}$$

как и требовалось. Другое доказательство можно получить с помощью равенства (7.9) (см. ниже).

В случае  $r = n$  мы отметим лишь, что возможно неравенство  $|A|^{\#} < |A|^b = |A|$ . Например, если  $\sigma$  и  $T_v \sigma$  не пересекаются и  $|v| < 2$ , то

$$|T_v \sigma - \sigma|^b = |T_v \sigma - \sigma| = 2|\sigma|, \quad |T_v \sigma - \sigma|^{\#} \leq |v||\sigma| < 2|\sigma|.$$

**Предостережение.** Теорема 3В для дизельной нормы не верна. В самом деле, возьмем  $r = n = 1$ . Пусть  $Q$  — отрезок  $[0, 1]$ , и пусть  $\sigma$  и  $\sigma'$  — ориентированные отрезки  $[1 - \varepsilon, 1]$  и  $[1, 1 + \varepsilon]$  соответственно. Положим  $A = \sigma' - \sigma$ . Тогда в силу (3)  $|A|^{\#} \leq \varepsilon^2/2$ . Но  $|\pi A|^{\#} = |-\sigma|^{\#} = \varepsilon > |A|^{\#}$  при  $\varepsilon < 1$ .

**7. Дизельные коцепи.** Дизельная  $r$ -мерная коцепь есть элемент пространства  $S^{\#r}(E^n)$ , сопряженного к пространству  $S_r^{\#}(E^n)$ . Определим  $|X|$ , как в § 4. Соотношения (4.2), (4.3) и (4.5) верны и с  $\#$  вместо  $b$ . В силу (6.2)

$$(1) \quad |X| \leq |X|^b \leq |X|^{\#}.$$

Следовательно, каждая дизельная коцепь является бемольной коцепью<sup>1)</sup>.

Определим константу Липшица коцепи

$$(2) \quad \mathfrak{L}(X) = \mathfrak{L}_X = \sup \left\{ \frac{|X \cdot (T_v A - A)|}{|A||v|} : v \neq 0, A \text{ — полиэдральные цепи} \neq 0 \right\}.$$

В силу (6.3) эта верхняя грань для дизельных коцепей конечна и

$$(3) \quad (r+1)\mathfrak{L}(X) \leq |X|^{\#}.$$

1) Собственно говоря, дизельные коцепи и бемольные коцепи являются элементами различных пространств  $S^{\#r}(E^n)$  и  $S^{br}(E^n)$ , и нельзя говорить о их совпадении. Условимся, однако, для любой (бемольной или дизельной) коцепи  $X$  через  $X'$  обозначать коцепь  $X$ , рассматриваемую только на полиэдральных цепях. Если задана линейная функция  $\mathfrak{X}$  на пространстве всех  $r$ -мерных полиэдральных цепей, то она тогда и только тогда совпадает с  $X'$  для некоторой бемольной или дизельной коцепи  $X$ , когда для всех полиэдральных цепей  $A$  выполняются соответственно неравенства  $|\mathfrak{X}(A)| \leq N|A|^b$ ,  $|\mathfrak{X}(A)| \leq N|A|^{\#}$  (где  $N$  — некоторое число). Автор неявно отождествляет функции  $X$  и  $X'$ , и это позволяет ему утверждать, что всякая дизельная коцепь является бемольной коцепью. Иначе говоря, если  $X$  — дизельная коцепь, то функция  $\mathfrak{X} = X'$  удовлетворяет не только условию  $|\mathfrak{X}(A)| \leq N|A|^{\#}$ , но и условию  $|\mathfrak{X}(A)| \leq N|A|^b$  [см. (6.2)], и потому существует такая бемольная коцепь  $X_1$ , что  $X' = X_1$ . При этом  $|X_1|^b \leq |X|^{\#}$ , что и дает точный смысл соотношения (1). Автор и далее не делает различия между  $X$  и  $X'$  утверждая, например, что кограница дизельной цепи не обязана быть дизельной. — Прим. ред.

Покажем, что

$$(4) \quad \mathfrak{L}(X) = \sup \left\{ \frac{|X \cdot (T_v \sigma - \sigma)|}{|\sigma| |v|} : \text{симплексы } \sigma \right\}.$$

Если задано  $\varepsilon > 0$ , то мы выберем  $A \neq 0$  и  $v \neq 0$  так, чтобы

$$|X \cdot (T_v A - A)| \geq [\mathfrak{L}(X) - \varepsilon] |A| |v|.$$

Запишем  $A = \sum a_i \sigma_i$ , где симплексы  $\sigma_i$  не перекрываются и коэффициенты  $a_i \neq 0$ . Достаточно показать, что для некоторого  $i$

$$|X \cdot (T_v \sigma_i - \sigma_i)| \geq [\mathfrak{L}(X) - \varepsilon] |\sigma_i| |v|.$$

Если бы это было не так для всех  $i$ , то мы получили бы противоречие:

$$\begin{aligned} |X \cdot (T_v A - A)| &= \left| \sum a_i X \cdot (T_v \sigma_i - \sigma_i) \right| < \\ &< \sum |a_i| [\mathfrak{L}(X) - \varepsilon] |\sigma_i| |v| = [\mathfrak{L}(X) - \varepsilon] |A| |v|. \end{aligned}$$

Кограница  $dX$  дизельной коцепи не обязана быть дизельной; см. § 11, пример (а). Мы имеем

$$(5) \quad |dX| \leq |X|^b \leq |X|^{\#}.$$

Соответственно равенству (4.8) теперь докажем

$$(6) \quad |X|^{\#} = \sup \{ |X|^b, (r+1) \mathfrak{L}(X) \};$$

см. также ниже равенство (8). Согласно (1) и (3), нам нужно только доказать неравенство  $\leq$ . Возьмем любое  $\varepsilon > 0$  и любую полиэдральную цепь  $A$ . Выберем запись  $A = \sum a_i \sigma_i$  и векторы  $v_i$  так, чтобы было

$$\frac{\sum |a_i| |\sigma_i| |v_i|}{r+1} + \left| \sum a_i T_{v_i} \sigma_i \right|^b \leq |A|^{\#} + \varepsilon.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} |X \cdot A| &= \left| X \cdot \left[ - \sum a_i (T_{v_i} \sigma_i - \sigma_i) + \sum a_i T_{v_i} \sigma_i \right] \right| \leq \\ &\leq \sum |a_i| |X \cdot (T_{v_i} \sigma_i - \sigma_i)| + |X \cdot \sum a_i T_{v_i} \sigma_i| \leq \\ &\leq \mathfrak{L}(X) \sum |a_i| |\sigma_i| |v_i| + |X|^b \left| \sum a_i T_{v_i} \sigma_i \right|^b \leq \\ &\leq \sup \{ (r+1) \mathfrak{L}(X), |X|^b \} (|A|^{\#} + \varepsilon), \end{aligned}$$

откуда и получается требуемое неравенство.

**Теорема 7А.** Любая бемольная коцепь с конечной константой Липшица  $\mathfrak{L}(X)$  является дизельной коцепью.

Это сразу следует из доказанных выше неравенств.

**Замечание.** Линейная функция от полиэдральной цепи с конечными  $|X|$  и  $\mathfrak{L}(X)$  определяет диэзную коцепь, если только предполагается некоторая локальная конечность комассы  $|dX|$ ; ср. теорему 8В. Мы не можем отбросить условие этого рода; см. § 11, пример (g).

Докажем теперь, что

(7)  $|dX| \leq (r+1)\mathfrak{L}(X)$ , если  $X$  — диэзная  $r$ -мерная коцепь.

Согласно (4.10), нам нужно только показать, что для любого  $(r+1)$ -мерного симплекса  $\sigma$

$$|X \cdot \partial\sigma| \leq (r+1)\mathfrak{L}(X)|\sigma|.$$

Если задано  $\varepsilon > 0$ , то мы можем таким образом разбить плоскость  $P$  симплекса  $\sigma$  на равные кубы, что если  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  — кубы, лежащие в  $\sigma$ , а  $\sigma_{m+1}, \dots, \sigma_l$  — части кубов, заполняющие оставшуюся

часть симплекса  $\sigma$ , то <sup>1)</sup>  $\sum_{i=m+1}^l |\sigma_i| < \varepsilon/|dX|$ . Каждый куб  $\sigma_i$  ( $i \leq m$ ) имеет  $2(r+1)$  граней, которые можно представить в виде  $\sigma_{ik}$  и  $T_{v_k}\sigma_{ik}$  ( $k=1, \dots, r+1$ ). Далее, при надлежащем выборе ориентаций  $\partial\sigma_i = \sum_k (T_{v_k}\sigma_{ik} - \sigma_{ik})$ ; см. (III, 11.2). Теперь при  $i \leq m$  мы имеем

$$X \cdot \partial\sigma_i \leq \sum_k |X \cdot (T_{v_k}\sigma_{ik} - \sigma_{ik})| \leq \sum_k \mathfrak{L}(X) |\sigma_{ik}| |v_k| = (r+1)\mathfrak{L}(X) |\sigma_i|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |X \cdot \partial\sigma| &= \left| \sum_{i=1}^l X \cdot \partial\sigma_i \right| \leq \sum_{i=1}^m (r+1)\mathfrak{L}(X) |\sigma_i| + \sum_{i=m+1}^l |dX| |\sigma_i| \leq \\ &\leq (r+1)\mathfrak{L}(X) |\sigma| + \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Из (6), (4.8) и (7) получаем

(8)  $|X|^\# = \sup \{ |X|, (r+1)\mathfrak{L}(X) \}$ , если  $X$  — диэзная  $r$ -мерная коцепь.

В силу (6.5) имеем

(9)  $|X|^\# = |X|^b$ , если  $r=0$ .

Прямое доказательство можно провести следующим образом. Если нульмерная коцепь  $X$  соответствует действительной функции  $D_X$ :  $X \cdot p = D_X(p)$ , то равенство (4) показывает, что  $\mathfrak{L}(X) = \mathfrak{L}(D_X)$ . Теперь из (8), (4.11) и (4.8) получаем нужный результат.

<sup>1)</sup> Предполагается, что  $|dX| \neq 0$ , так как в противном случае неравенство (7) очевидно. — *Прим. ред.*

Ниже, почти в конце § 10, мы покажем, что при  $r = n$  каждая коцепь  $X$  соответствует некоторой действительной дизной функции  $\bar{D}_X$ ; поэтому имеет место

**Теорема 7В.** *В евклидовом пространстве  $E^n$  и нульмерные дизные коцепи, и  $n$ -мерные дизные коцепи в точности соответствуют действительным дизным функциям.*

Для  $n$ -мерных коцепей соответствие между  $X$  и  $\bar{D}_X$  зависит от метрики.

**8. Характеризация норм.** В линейном пространстве  $r$ -мерных полиэдральных цепей в  $E^n$  имеются различные нормы; мы рассмотрим полунормы  $|\cdot|'$ , удовлетворяющие одному или нескольким из следующих условий ( $\sigma^s$  обозначает  $s$ -мерный симплекс):

$$(1) \quad |\sigma^r|' \leq |\sigma^r|,$$

$$(2) \quad |\partial \sigma^{r+1}|' \leq |\sigma^{r+1}|,$$

$$(3) \quad |T_v \sigma^r - \sigma^r|' \leq \frac{|\sigma^r| |v|}{r+1}.$$

Напомним, что верхняя грань некоторого множества полунорм, если она конечна, является полунормой (П. I, лемма 15b).

**Теорема 8А.** *Для каждой размерности  $r$  масса, бемольная норма и дизная норма являются наибольшими полунормами в пространстве полиэдральных цепей, удовлетворяющими соответственно условиям (1), (1) и (2) и (1), (2) и (3).*

Так как эти нормы удовлетворяют указанным условиям, то нам нужно только показать, что любая полунорма, удовлетворяющая этим условиям, не превосходит соответствующей нормы.

Для массы доказательство получается моментально. Если дана произвольная  $r$ -мерная полиэдральная цепь  $A$ , то запишем  $A = \sum a_i \sigma_i$ , где  $\sigma_i$  — непересекающиеся симплексы. Тогда, так как  $|\cdot|'$  — полунорма, то

$$|A|' \leq \sum |a_i| |\sigma_i|' \leq \sum |a_i| |\sigma_i| = |A|.$$

Для бемольной нормы прежде всего заметим, что если  $|\cdot|'$  удовлетворяет условиям (1) и (2), то для произвольных  $r$ -мерных цепей  $C$  и  $(r+1)$ -мерных цепей  $D$  мы имеем

$$|C|' \leq |C|, \quad |\partial D|' \leq |D|.$$

Первое неравенство доказано выше. Для доказательства второго запишем  $D = \sum d_i \sigma_i$ , где  $\sigma_i$  не перекрываются; тогда

$$|\partial D|' \leq \sum |d_i| |\partial \sigma_i|' \leq \sum |d_i| |\sigma_i| = |D|.$$

Теперь возьмем любую  $r$ -мерную полиэдральную цепь  $A$ . Если задано  $\varepsilon > 0$ , то выберем такую цепь  $D$ , что  $|A - \partial D| + |D| < |A|^b + \varepsilon$ . Тогда

$$|A|' \leq |A - \partial D|' + |\partial D|' \leq |A - \partial D| + |D| < |A|^b + \varepsilon,$$

откуда следует, что  $|A|' \leq |A|^b$ , как и требовалось.

Для диэдральной нормы возьмем любую  $r$ -мерную полиэдральную цепь  $A$  и любое  $\varepsilon > 0$ . Выберем запись  $A = \sum a_i \sigma_i$  и векторы  $v_i$  так, чтобы было

$$\sum \frac{|a_i| |\sigma_i| |v_i|}{r+1} + \left| \sum a_i T_{v_i} \sigma_i \right|^b < |A|^{\#} + \varepsilon.$$

Предполагая, что выполняются условия (1), (2) и (3) и поэтому  $|C|' \leq |C|^b$ , мы находим

$$|A|' \leq \sum |a_i| |T_{v_i} \sigma_i - \sigma_i|' + \left| \sum a_i T_{v_i} \sigma_i \right|',$$

и правая часть не превосходит выписанной выше величины; поэтому  $|A|' \leq |A|^{\#}$ .

**Лемма 8а.** Для каждого  $s$ -мерного симплекса  $\sigma$  существует число  $N$ , обладающее следующим свойством. Пусть  $K$  — произвольное кубическое подразделение плоскости  $P$  симплекса  $\sigma$ , кубы которого имеют диаметр  $\delta \leq \text{diam}(\sigma)$ . Пусть  $\tau_1, \dots, \tau_\mu$  — содержащиеся в  $\sigma$  части тех кубов, которые пересекают  $\partial\sigma$ . Пусть  $\tau'_1, \dots, \tau'_\nu$  — все  $s$ -мерные симплексы, входящие в регулярное подразделение (П. II, 3) клеток  $\tau_j$ . Тогда

$$(4) \quad \nu \delta^{s-1} \leq N.$$

Заметим, что каждая  $(s-1)$ -мерная грань каждого симплекса  $\tau'_i$  имеет диаметр  $\leq \delta$  и поэтому массу  $\leq \delta^{s-1}$ ; следовательно,  $|\partial \tau'_i| \leq (s+1) \delta^{s-1}$ , и полагая  $N' = (s+1)N/|\partial\sigma|$  ( $N'$  зависит от  $\sigma$ ), мы из (4) получаем

$$(5) \quad \sum |\partial \tau'_i| \leq N' |\partial\sigma|.$$

Положим  $r = s-1$ . Любая  $r$ -мерная грань любой клетки  $\tau_j$  является либо частью грани некоторого куба из  $K$ , либо же частью грани симплекса  $\sigma$ ; таким образом, число  $r$ -мерных гра-

ней клетки  $\tau_j$  не превосходит  $M_1 = 3s + 1$ . Каждая грань меньшей размерности клетки  $\tau_j$  является пересечением  $r$ -мерных граней; поэтому имеется не более  $M_2$  граней всех размерностей, где  $M_2$  — некоторое фиксированное число. Каждый симплекс  $\tau'_i$ , содержащийся в  $\tau_j$ , определяется некоторой последовательностью инцидентных граней клетки  $\tau_j$ ; поэтому в любой клетке  $\tau_j$  имеется не более  $M_3$  симплексов  $\tau'_i$ , где  $M_3$  — некоторое фиксированное число.

Положим  $\delta_\sigma = \text{diam } (\sigma)$ . Пусть, скажем,  $\partial\sigma = \sum \sigma'_k$  и  $P_k$  — плоскость симплекса  $\sigma'_k$ ; положим

$$R_k = P_k \cap U_\delta(\sigma'_k), \quad N = 2s^{s/2} M_3 \sum |R_k|.$$

Теперь возьмем, как и выше,  $\tau_j$  и  $\tau'_i$ . Пусть  $R'_k$  — множество тех точек плоскости  $P$  симплекса  $\sigma$ , которые находятся от  $P_k$  на расстоянии, не превосходящем  $\delta$ , и ортогональная проекция которых на плоскость  $P_k$  лежит в  $R_k$ ; тогда  $|R'_k| = 2\delta |R_k|$ . Пусть  $\tau_j^*$  — куб, содержащий  $\tau_j$ . Каждый куб  $\tau_j^*$  лежит в некотором  $R'_k$ . Так как  $|\tau_j^*| = (\delta/s^{1/2})^s$ , то число  $\nu_k$  кубов  $\tau_j^*$ , содержащихся в  $R'_k$ , не превосходит  $s^{s/2} |R'_k| / \delta^s$ . Следовательно,

$$\nu \leq M_3 \sum \nu_k \leq M_3 \sum \frac{2s^{s/2} \delta |R_k|}{\delta^s} = \frac{N}{\delta^{s-1}}.$$

Лемма 8b. Для любого  $s$ -мерного симплекса  $\sigma$

$$(6) \quad |\sigma| \leq \frac{\delta |\partial\sigma|}{s(s+1)} \leq \frac{\delta^s}{s!},$$

где  $\delta = \text{diam } (\sigma)$ .

Запишем  $\sigma = p_0 \sigma_0$ , где  $\sigma_0$  — наименьшая  $r$ -мерная грань симплекса  $\sigma$  ( $r = s - 1$ ). Выберем некоторую вершину грани  $\sigma_0$ ; пусть  $v_2, \dots, v_s$  — векторы-ребра грани  $\sigma_0$ , идущие из этой вершины, и  $v_1$  — вектор, идущий от этой вершины грани  $\sigma_0$  до  $p_0$ . Тогда в силу (III, 1.3) и (I, 12.14)

$$|\partial\sigma| \geq (s+1) |\sigma_0| = (s+1) \frac{|v_2 \vee \dots \vee v_s|}{r!},$$

$$|\sigma| = \frac{|v_1 \vee \dots \vee v_s|}{s!} \leq \frac{\delta |v_2 \vee \dots \vee v_s|}{s!},$$

и неравенство (6) доказано.

Лемма 8с. Пусть  $\|\cdot\|$  — полунорма в пространстве  $r$ -мерных полиэдральных цепей, удовлетворяющая условиям (1) и (3), а также условию

(H) Для каждой точки  $p$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\zeta > 0$ , что

(7)  $|\partial\sigma|' \leq \varepsilon [\text{diam}(\sigma)]^r$  для  $(r+1)$ -мерных симплексов  $\sigma \subset U_\zeta(p)$ . Тогда эта полунорма удовлетворяет также и условию (2):  $|\partial\sigma|' \leq |\sigma|$ .

Замечание. Так как  $|\partial\sigma| \leq (r+2) [\text{diam}(\sigma)]^r$ , то мы можем условие (7) заменить<sup>1)</sup> условием

$$(8) \quad |\partial\sigma|' \leq \varepsilon |\partial\sigma|, \text{ если } \sigma \subset U_\zeta(p).$$

Пусть дан  $s$ -мерный симплекс  $\sigma_0$  ( $s = r+1$ ); определим число  $N$  по лемме 8а. Для данного  $\varepsilon > 0$  положим  $\varepsilon_1 = \varepsilon/N$ . Пусть  $\zeta(p)$  удовлетворяет условию (7) для каждой точки  $p$  с  $\varepsilon_1$  вместо  $\varepsilon$ . Выберем такое кубическое разбиение  $K$  плоскости  $P$  симплекса  $\sigma_0$ , что каждый куб (диаметра  $\delta$ ), пересекающий  $\partial\sigma_0$ , лежит в некотором множестве  $U_{\zeta(p)}(p)$ . В обозначениях, которыми мы пользовались при доказательстве неравенства (7.7), мы имеем

$$|\partial\sigma_i|' \leq \sum_{k=1}^{r+1} |T_{v_k} \sigma_{ik} - \sigma_{ik}|' \leq \sum_{k=1}^{r+1} \frac{|\sigma_{ik}| |v_k|}{s} = |\sigma_i|$$

для  $i = 1, \dots, m$ . Пусть  $\tau'_1, \dots, \tau'_v$  — симплексы регулярного подразделения клеток  $\sigma_j$  для  $j > m$  (клетки  $\tau_j$  из леммы 8а); тогда  $v\delta^r \leq N$ . Кроме того, в силу выбора разбиения  $K$  имеем  $|\partial\tau'_i|' \leq \varepsilon_1 \delta^r$ . Поэтому

$$|\partial\sigma_0|' \leq \sum_{i=1}^m |\partial\sigma_i|' + \sum_{i=1}^v |\partial\tau'_i|' \leq \sum_{i=1}^m |\sigma_i| + v\varepsilon_1 \delta^r \leq |\sigma_0| + \varepsilon$$

и мы, как и требовалось, получаем  $|\partial\sigma_0|' \leq |\sigma_0|$ .

**Теорема 8В.** Диезная норма в пространстве  $r$ -мерных полиэдральных цепей является наибольшей полунормой, удовлетворяющей условиям (1), (3) и (Н).

Прежде всего, в силу (6) диезная норма удовлетворяет условию (Н). Наша теорема следует теперь из последней леммы и теоремы 8А.

Замечания. Мы не можем отбросить условие (Н); см. в § 11 пример (f). Вместо условия (7) мы могли бы<sup>2)</sup> воспользоваться

<sup>1)</sup> Очевидно, из условия (8) следует (7). Обратно, если выполнено условие (7), то в силу доказываемой леммы и теоремы 8А норма  $|\cdot|'$  не превосходит диезной нормы  $|\cdot|^\#$ . Для диезной же нормы условие (8) выполняется. Действительно, в силу (6.2), (3.4) и (6) мы имеем  $|\partial\sigma|^\# \leq |\sigma|' \leq \delta |\partial\sigma|$ , где  $\delta = \text{diam}(\sigma)$ . — Прим. ред.

<sup>2)</sup> См. предыдущее примечание. — Прим. ред.

условием (8) или же [см. (6)] могли бы предполагать, что для каждой точки  $p$  существуют такие числа  $N$  и  $\zeta > 0$ , что

$$(9) \quad |\partial\sigma|' \leq N|\sigma|, \text{ если } \sigma \subset U_\zeta(p).$$

**9. Алгебраический критерий для поликовекторов.** В следующем параграфе мы найдем для каждой точки  $p$  функцию  $D_X(p, \alpha)$  простого  $r$ -вектора  $\alpha$ , обладающую определенными свойствами. Мы хотим показать, что эта функция определяет некоторый  $r$ -ковектор. Следует вспомнить параграф (III, 2), в частности, теорему (III, 2B).

**Теорема 9А.** Пусть  $\varphi(\alpha)$  — такая действительная функция простого  $r$ -вектора, что

$$(1) \quad \varphi(a\alpha) = a\varphi(\alpha),$$

$$(2) \quad \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \varphi(\{p_0 \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}\}) = 0 \text{ для любого симплекса } p_0 \dots p_{r+1}.$$

Тогда существует единственный  $r$ -ковектор  $\xi$ , для которого  $\xi \cdot \alpha = \varphi(\alpha)$ , если  $\alpha$  — простой  $r$ -вектор.

Единственность очевидна; мы докажем существование. Прежде всего заметим, что

$$(3) \quad \varphi(\{\sigma\}) = \sum \varphi(\{\sigma_i\}), \text{ если } \sum \sigma_i \text{ — некоторое подразделение симплекса } \sigma.$$

В самом деле,  $\{\sigma_i\} = a_i \{\sigma\}$  для некоторого  $a_i$  и, так как  $\{\sigma\} = \sum \{\sigma_i\} = \sum a_i \{\sigma\}$ , то  $\sum a_i = 1$ . Следовательно,

$$\sum \varphi(\{\sigma_i\}) = \sum \varphi(a_i \{\sigma\}) = \sum a_i \varphi(\{\sigma\}) = \varphi(\{\sigma\}).$$

Теперь определим функцию  $r$ -мерной полиэдральной цепи  $A$  в  $V$ , полагая

$$(4) \quad \Phi(\sum a_i \sigma_i) = \sum a_i \varphi(\{\sigma_i\}).$$

Эта функция не зависит от представления цепи  $A$ . В самом деле если также  $A = \sum a'_j \sigma'_j$ , то, пользуясь леммой (П. II, 3b), мы можем написать  $A = \sum b_k \tau_k$ , где каждый из симплексов  $\sigma_i$  и каждый из симплексов  $\sigma'_j$  имеет симплицальное подразделение, состоящее из симплексов  $\tau_k$ . Наше утверждение является теперь простым следствием условий (3) и (1). Очевидно,  $\Phi$  является линейной функцией  $r$ -мерной полиэдральной цепи.

Мы докажем теперь, что

$$(5) \quad \Phi(\partial B) = 0 \text{ для всех } (r+1)\text{-мерных полиэдральных цепей } B.$$

В самом деле, если  $B = \sigma = p_0 \dots p_{r+1}$  — некоторый  $(r+1)$ -мерный симплекс, то равенство (6) немедленно следует из (2) и линейности функции  $\Phi$ . Поэтому оно справедливо для всех  $B$ .

Определим функцию  $F$  упорядоченного множества, состоящего из  $r$  векторов, условием

$$(6) \quad F(v_1, \dots, v_r) = \varphi(v_1 \vee \dots \vee v_r);$$

в силу (1) и (I, 1.13) функция  $F$  является альтернирующей. Покажем, что она линейна относительно  $v_1$ ; отсюда будет следовать, что она линейна относительно каждого  $v_i$ .

Рассмотрим следующие точки и симплекс в пространстве  $V$ :

$$p_0 = 0, \quad p_1 = v_1, \quad p_2 = v_1 + v'_1, \quad \sigma^2 = p_0 p_1 p_2.$$

Если  $r = 1$ , то

$$F(v_1) = \Phi(p_0 p_1), \quad F(v'_1) = \Phi(p_1 p_2), \quad F(v_1 + v'_1) = \Phi(p_0 p_2)$$

и соотношение (5) дает  $F(v_1) + F(v'_1) - F(v_1 + v'_1) = 0$ . Предположим теперь, что  $r > 1$ . Пусть  $\tau^{r-1}$  — ориентированный параллелепипед, образованный векторами  $v_2, \dots, v_r$ , и пусть  $\sigma^{r+1}$  — декартово произведение

$$\sigma^{r+1} = \sigma^2 \times \tau^{r-1}.$$

Тогда  $\sigma^{r+1}$  состоит из всех векторов  $u_1 + u_2$ ,  $u_1 \in \sigma^2$ ,  $u_2 \in \tau^{r-1}$  и, значит,  $u_1 = a_1 v_1 + a'_1 v'_1$ ,  $u_2 = a_2 v_2 + \dots + a_r v_r$ , где коэффициенты изменяются от 0 до 1 и  $a'_1 \leq a_1$ . Клетки могут быть вырождающимися (П. II, 1). Теперь  $\tau = \tau^{r-1}$  имеет  $2(r-1)$  грани  $\tau_i^+$  и  $\tau_i^-$  ( $i = 2, \dots, r$ ) и так же, как в (III, 11.2),

$$\partial \tau^{r-1} = \sum (-1)^i (\tau_i^+ - \tau_i^-).$$

Поэтому (П. II, 12.1)

$$\begin{aligned} \partial \sigma^{r+1} &= p_0 p_1 \times \tau + p_1 p_2 \times \tau - p_0 p_2 \times \tau + \\ &\quad + \sum_i (-1)^i (\sigma^2 \times \tau_i^+ - \sigma^2 \times \tau_i^-). \end{aligned}$$

Так как  $\tau_i^+$  и  $\tau_i^-$  параллельны, то  $\{\tau_i^+\} = \{\tau_i^-\}$  и, таким образом,  $\{\sigma^2 \times \tau_i^+\} = \{\sigma^2 \times \tau_i^-\}$ . Следовательно, из равенства  $\Phi(\partial \sigma^{r+1}) = 0$  мы получаем

$$\Phi(p_0 p_1 \times \tau) + \Phi(p_1 p_2 \times \tau) = \Phi(p_0 p_2 \times \tau).$$

Это эквивалентно соотношению

$$F(v_1, v_2, \dots) + F(v'_1, v_2, \dots) = F(v_1 + v'_1, v_2, \dots),$$

что и дает требуемую линейность.

По теореме (I, 4A) существует такой  $r$ -ковектор  $\xi$ , что

$$\xi \cdot (v_1 \vee \dots \vee v_r) = F(v_1, \dots, v_r) = \varphi(v_1 \vee \dots \vee v_r);$$

этим завершается доказательство.

Пример. Взяв  $r=1$ , положим  $\varphi(ae_1)=a$  и  $\varphi(v)=0$  для всех остальных  $v$ . Тогда условие (1) выполняется, но функция  $\varphi$  не соответствует<sup>1)</sup> никакому ковектору. Ср. § 11, пример (g).

**10. Диезные  $r$ -формы.** Мы покажем теперь, что диезные  $r$ -мерные коцепи в  $E^n$  в точности соответствуют некоторым дифференциальным формам. Соответствующую теорему для открытых подмножеств пространства  $E^n$  см. в (VIII, 1). По поводу случая бемольных коцепей см. гл. IX. Следует вспомнить определение комассы  $|\omega|_0$   $r$ -формы, данное в (II, 3.2). Определим следующим образом *комассовую константу Липшица*:

$$(1) \quad \mathfrak{L}_0(\omega) = \sup \frac{|\omega(q) - \omega(p)|_0}{|q - p|}.$$

Мы говорим, что форма  $\omega$  является *диезной*, если  $|\omega|_0$  и  $\mathfrak{L}_0(\omega)$  конечны; *диезной нормой* формы  $\omega$  называется число

$$(2) \quad |\omega|^\# = \sup \{ |\omega|_0, (r+1) \mathfrak{L}_0(\omega) \}.$$

В связи с вопросом о существовании формы  $d\omega$  см. (теорему IX, 12B).

Нормированное линейное пространство диезных  $r$ -форм, как легко видеть, является полным (это следует также из теоремы 10A).

**Теорема 10A.** *Каждой  $r$ -мерной диезной коцепи  $X$  в  $E^n$  соответствует единственная диезная  $r$ -форма  $D_X$ , для которой*

$$(3) \quad X \cdot \sigma = \int_{\sigma} D_X \quad \text{для всех } r\text{-мерных ориентированных}$$

*симплексов  $\sigma$ .*

*Это соответствие является взаимно однозначным отображением на все пространство и*

$$(4) \quad |D_X|_0 = |X|, \quad \mathfrak{L}_0(D_X) = \mathfrak{L}(X), \quad |D_X|^\# = |X|^\#.$$

Единственность вытекает из леммы (III, 16a). Для данной коцепи  $X$  соответствующую форму  $\omega = D_X$  мы найдем следующим образом. Прежде всего, возьмем любую точку  $p$  и любое  $r$ -направление  $\alpha$  (I, 12); пусть  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  — последовательность  $r$ -мерных симплексов, содержащих точку  $p$ ,  $r$ -направлением которых

<sup>1)</sup> При  $n > 1$ . — Прим. ред.

является  $\alpha = \{\sigma_i\} / |\sigma_i|$  (III, 1) и диаметры которых  $\rightarrow 0$ . Положим

$$(5) \quad D_X(p, \alpha) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{X \cdot \sigma_i}{|\sigma_i|}.$$

Существование и независимость этого предела от выбора последовательности симплексов сразу следуют из неравенства

$$(6) \quad \left| \frac{X \cdot \sigma}{|\sigma|} - \frac{X \cdot \sigma'}{|\sigma'|} \right| \leq 4\mathfrak{L}(X)\zeta, \quad \text{если } \sigma, \sigma' \subset U_\zeta(p),$$

где  $\sigma$  и  $\sigma'$  имеют  $r$ -направление  $\alpha$ .

Чтобы доказать (6), положим

$$\varepsilon = 4\mathfrak{L}(X)\zeta, \quad \varepsilon_1 = \inf \left\{ \frac{\varepsilon |\sigma|}{8}, \frac{\varepsilon |\sigma'|}{8} \right\}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{|X|}$$

и выберем такой  $r$ -мерный куб  $\tau$ , содержащий точку  $p$  и имеющий  $r$ -направление  $\alpha$ , что выполняется следующее. Существуют такие векторы  $v_1, \dots, v_s$ , что  $T_{v_1}\tau, \dots, T_{v_s}\tau$  содержатся в  $\sigma$  и не перекрываются, и при этом

$$|\sigma - T_{v_1}\tau \cup \dots \cup T_{v_s}\tau| \leq \varepsilon_2;$$

кроме того, подобное же неравенство выполняется и для  $\sigma'$ . Тогда

$$\begin{aligned} |X \cdot \sigma - \sum X \cdot T_{v_k}\tau| &\leq |X| \varepsilon_2 = \varepsilon_1, \\ |X \cdot T_{v_k}\tau - X \cdot \tau| &\leq \mathfrak{L}(X)|\tau||v_k|, \end{aligned}$$

и так как  $|v_k| < \zeta$ , то

$$|X \cdot \sigma - sX \cdot \tau| \leq \varepsilon_1 + s\mathfrak{L}(X)|\tau|\zeta \leq \varepsilon_1 + \mathfrak{L}(X)|\sigma|\zeta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |(X \cdot \sigma)|\tau| - (X \cdot \tau)|\sigma|| &\leq \\ &\leq |X \cdot \sigma - s(X \cdot \tau)||\tau| + |X \cdot \tau||s|\tau| - |\sigma|| \leq \\ &\leq [\varepsilon_1 + \mathfrak{L}(X)|\sigma|\zeta]|\tau| + |X||\tau|\varepsilon_2; \\ \left| \frac{X \cdot \sigma}{|\sigma|} - \frac{X \cdot \tau}{|\tau|} \right| &\leq \frac{\varepsilon_1}{|\sigma|} + \mathfrak{L}(X)\zeta + \frac{\varepsilon_1}{|\sigma|} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Аналогичное неравенство выполняется и для  $\sigma'$ ; из этих неравенств получаем (6).

Пользуясь определением функции  $D_X(p, \alpha)$  для одних лишь  $r$ -направлений  $\alpha$ , мы можем определить  $\mathfrak{L}_0(D_X)$ ; см. (I, 13.2). Так как

$$\left| \frac{X \cdot T_{v\sigma}}{|T_{v\sigma}|} - \frac{X \cdot \sigma}{|\sigma|} \right| \leq \mathfrak{L}(X)|v|,$$

то мы находим

$$(7) \quad \mathfrak{L}_0(D_X) \leq \mathfrak{L}(X),$$

доказав тем самым попутно, что функция  $D_X(p, \alpha)$  непрерывна относительно  $p$ .

Мы докажем ниже, что если  $\sigma$  имеет  $r$ -направление  $\alpha$  и  $\delta = \text{diam}(\sigma)$ , то

$$(8) \quad \left| D_X(p, \alpha) - \frac{X \cdot \sigma}{|\sigma|} \right| \leq \mathfrak{L}(X) \delta \quad \text{при } p \in \sigma.$$

Пока же из неравенства (6) сразу следует, что выполняется неравенство, которое мы получим, умножив правую часть неравенства (8) на 4.

Теперь мы покажем, что для любого  $r$ -мерного симплекса  $\sigma$  с  $r$ -направлением  $\alpha$

$$(9) \quad X \cdot \sigma = \int_{\sigma} D_X(p, \alpha) dp,$$

где мы пользуемся интегралом Римана (III, 5). Взяв произвольно  $\varepsilon > 0$ , разобьем  $\sigma$  на симплексы  $\sigma_1, \dots, \sigma_s$  диаметра  $< \zeta = \varepsilon / (5\mathfrak{L}(X) |\sigma|)$ . Для каждого  $\sigma_i$  выберем точку  $p_i \in \sigma_i$ ; тогда, пользуясь неравенствами (8) (с множителем 4) и (7), получим

$$\begin{aligned} \left| X \cdot \sigma_i - \int_{\sigma_i} D_X(p, \alpha) dp \right| &\leq \\ &\leq |X \cdot \sigma_i - D_X(p_i, \alpha) |\sigma_i|| + \left| \int_{\sigma_i} [D_X(p_i, \alpha) - D_X(p, \alpha)] dp \right| \leq \\ &\leq 5\mathfrak{L}(X) \zeta |\sigma_i|; \end{aligned}$$

поэтому  $\left| X \cdot \sigma - \int_{\sigma} D_X(p, \alpha) dp \right| < \varepsilon$ , и равенство (9) доказано.

Теперь неравенство (8) сразу следует из (7) и равенства

$$D_X(p, \alpha) |\sigma| - X \cdot \sigma = \int_{\sigma} [D_X(p, \alpha) - D_X(q, \alpha)] dq.$$

Для любого простого  $r$ -вектора  $\alpha \neq 0$  положим

$$(10) \quad D_X(p, \alpha) = |\alpha| D_X\left(p, \frac{\alpha}{|\alpha|}\right);$$

положим также  $D_X(p, 0) = 0$ . Из (5), очевидно, следует, что  $D_X(p, -\alpha) = -D_X(p, \alpha)$  для  $r$ -направлений  $\alpha$ ; поэтому  $D_X(p, a\alpha) = aD_X(p, \alpha)$  для всех простых  $r$ -векторов  $\alpha$  и действительных чисел  $a$ .

Покажем теперь, что для любой точки  $p$  и  $(r+1)$ -мерного симплекса  $\sigma$  из соотношения  $\partial\sigma = \sum \sigma_i$  следует

$$(11) \quad \sum D_X(p, \{\sigma_i\}) = 0$$

(несколько отличное доказательство см. в § 8 введения). Мы можем считать, что  $p \in \sigma$ . Пусть  $\sigma_\lambda$  — симплекс, полученный из  $\sigma$  с помощью гомотетии с центром  $p$  и коэффициентом  $\lambda$ ; пусть, скажем;  $\partial\sigma_\lambda = \sum \sigma_{\lambda i}$ . Тогда

$$|\sigma_\lambda| = \lambda^{r+1} |\sigma|, \quad |\sigma_{\lambda i}| = \lambda^r |\sigma_i|.$$

Если  $\delta = \text{diam}(\sigma)$  и  $\alpha_i$  есть  $r$ -направление симплекса  $\sigma_i$ , то с помощью неравенства (7) получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_i D_X(p, \{\sigma_{\lambda i}\}) - \int_{\partial\sigma_\lambda} D_X \right| &= \left| \sum_i \int_{\sigma_{\lambda i}} [D_X(p, \alpha_i) - D_X(q, \alpha_i)] dq \right| \leq \\ &\leq \sum \mathfrak{L}(X) \lambda \delta |\sigma_{\lambda i}| = \lambda^{r+1} \mathfrak{L}(X) \delta |\partial\sigma|. \end{aligned}$$

Кроме того, в силу (9)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\sigma_\lambda} D_X \right| &= \left| \sum_i \int_{\sigma_{\lambda i}} D_X(q, \alpha_i) dq \right| = \left| \sum_i X \cdot \sigma_{\lambda i} \right| = \\ &= |X \cdot \partial\sigma_\lambda| = |dX \cdot \sigma_\lambda| \leq \lambda^{r+1} |dX| |\sigma|. \end{aligned}$$

Сопоставляя эти неравенства, после деления на  $\lambda^r$  находим

$$\left| \sum_i D_X(p, \{\sigma_i\}) \right| \leq \lambda [\mathfrak{L}(X) \delta |\partial\sigma| + |dX| |\sigma|].$$

Так как  $\lambda$  произвольно, то равенство (11) доказано.

По теореме 9А для каждой точки  $p$  существует единственный  $r$ -ковектор  $D_X(p)$ , обладающий тем свойством, что  $D_X(p) \cdot \alpha = D_X(p, \alpha)$  для простого  $\alpha$ . Теперь равенство (3) следует из (9).

Так как  $|X \cdot \sigma_i| \leq |X| |\sigma_i|$ , то из (5) получаем  $|D_X|_0 \leq |X|$ . Обратно, если задано  $\varepsilon > 0$ , то равенство (4.9) показывает, что мы можем так выбрать симплекс  $\sigma$ , чтобы было  $|X \cdot \sigma| \geq (|X| - \varepsilon) |\sigma|$ ; пользуясь формулой (9), видим, что  $|D_X(p) \cdot \alpha| \geq |X| - \varepsilon$  для некоторой точки  $p \in \sigma$ , чем доказано, что  $|D_X|_0 \geq |X| - \varepsilon$ . Таким образом,  $|D_X|_0 = |X|$ . Далее, если задано  $\varepsilon > 0$ , то мы можем, в силу (7.4) выбрать  $r$ -мерный симплекс  $\sigma$  и вектор  $v$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$|X \cdot T_v \sigma - X \cdot \sigma| \geq [\mathfrak{L}(X) - \varepsilon] |v| |\sigma|;$$

из формулы (9) видим, что если  $\alpha$  есть  $r$ -направление симплекса  $\sigma$ , то для некоторой точки  $p \in \sigma$

$$|D_X(p + v, \alpha) - D_X(p, \alpha)| \geq [\mathfrak{L}(X) - \varepsilon] |v|.$$

Тем самым доказано, что  $\mathfrak{L}_0(D_X) \geq \mathfrak{L}(X) - \varepsilon$ ; поэтому, согласно (7), мы имеем  $\mathfrak{L}_0(D_X) = \mathfrak{L}(X)$ . Теперь формулы (7.8) и (2) дают  $|D_X|^\# = |X|^\#$ , и равенства (4) доказаны.

Возьмем теперь любую диззную форму  $\omega$ . Положим  $X \cdot \sigma = \int_\sigma \omega$ ;

это условие однозначно определяет  $X$ . Если мы покажем, что, полагая  $X \cdot \sum a_i \sigma_i = \sum a_i X \cdot \sigma_i$ , мы определим некоторую диззную коцепь  $X$ , то доказательство будет закончено. Очевидно,  $|X| \leq |\omega|_0$ ,  $\mathfrak{L}(X) \leq \mathfrak{L}_0(\omega)$ . В силу теорем 7А и 4А достаточно показать, что комасса  $|dX|$  ограничена. Мы можем считать, что  $\omega \neq 0$ . В силу (4.10) достаточно доказать, что

$$(12) \quad |X \cdot \partial\sigma| = \left| \int_{\partial\sigma} \omega \right| \leq |\omega|^\# |\sigma|,$$

где  $\sigma$  — произвольный  $(r+1)$ -мерный симплекс.

Полагая

$$(13) \quad |A|' = \frac{|X \cdot A|}{|\omega|^\#} = \frac{1}{|\omega|^\#} \left| \int_A \omega \right|,$$

определим полунорму в пространстве  $r$ -мерных полиэдральных цепей. Условия для полунормы, очевидно, выполняются. Докажем, что выполняются и условия леммы 8с. Прежде всего,

$$|\sigma|' = \frac{1}{|\omega|^\#} \left| \int_\sigma \omega \right| \leq \frac{|\omega|_0}{|\omega|^\#} |\sigma| \leq |\sigma|,$$

$$\begin{aligned} |T_v \sigma - \sigma|' &= \frac{1}{|\omega|^\#} \left| \int_\sigma [\omega(p+v) - \omega(p)] dp \right| \leq \\ &\leq \frac{\mathfrak{L}_0(\omega) |v| |\sigma|}{|\omega|^\#} \leq \frac{|v| |\sigma|}{r+1}. \end{aligned}$$

Чтобы доказать, что выполняется условие (Н), возьмем произвольную точку  $p$  и любое  $\varepsilon > 0$ . Выберем  $\zeta > 0$  так, чтобы было

$$|\omega(q) - \omega(p)| < \varepsilon_1 = |\omega|^\# \varepsilon, \quad \text{если } |q - p| < \zeta.$$

Возьмем любой  $(r+1)$ -мерный симплекс  $\sigma \subset U_\zeta(p)$ . Пусть, скажем,  $d\sigma = \sum \sigma_i$ ,  $\alpha_i = \{\sigma_i\}/|\sigma_i|$ . Пользуясь формулами (III, 4.1) и (III, 2.3), находим

$$\left| \int_\sigma \omega \right| = \left| \sum_i \int_{\sigma_i} [\omega(q) - \omega(p)] \cdot \alpha_i dq \right| \leq \varepsilon_1 |\partial\sigma|.$$

Поэтому

$$|\partial\sigma|' = \frac{1}{|\omega|^\#} \left| \int_{\partial\sigma} \omega \right| \leq \varepsilon |\partial\sigma|,$$

и мы получаем неравенство (8.8), а следовательно, и (8.7). В силу леммы 8с для любого  $(r+1)$ -мерного симплекса  $\sigma$  мы имеем

$$|X \cdot \partial\sigma| = |\omega|^\# |\partial\sigma|' \leq |\omega|^\# |\sigma|,$$

чем завершается доказательство теоремы.

Пусть  $\omega_0$  — единичный  $n$ -ковектор ориентированного пространства  $E^n$  (I, 12). Тогда (II, 3.1) между  $n$ -формами  $\omega(p)$  и действительными функциями  $\bar{\omega}(p)$  существует взаимно однозначное соответствие, задаваемое условием

$$(14) \quad \omega(p) = \bar{\omega}(p) \omega_0.$$

Очевидно<sup>1)</sup>,

$$(15) \quad \mathfrak{L}(\bar{\omega}) = \mathfrak{L}(\omega) = \mathfrak{L}_0(\omega), \quad \deg(\omega) = n.$$

Из теоремы 10А теперь следует вторая часть теоремы 7В.

Мы говорим, что  $X$  есть *гладкая коцепь*, если соответствующая форма  $D_X$  является гладкой. В этом случае мы можем определить, как в (II, 8), внешний дифференциал  $dD_X$ . Мы можем сделать это и в более общем случае, если форма  $D_X$  регулярна, см. (III, 16). См. также теорему (IX, 12В).

**Теорема 10В.** Пусть  $X$  — *гладкая коцепь* или же пусть  $X$  — *дизная коцепь* и форма  $D_X$  *регулярна* (III, 16). Тогда форма  $D_{dX}$ , определенная равенством (5), существует и

$$(16) \quad D_{dX} = dD_X.$$

Если даны точка  $p$  и  $(r+1)$ -направление  $\alpha$ , то пусть  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  — соответствующая последовательность  $(r+1)$ -мерных симплексов, рассматриваемая в (5). Пользуясь теоремой Стокса (III, 14), если коцепь  $X$  гладкая, или же формулой (III, 16.2), если форма  $D_X$  регулярна, имеем

$$dX \cdot \sigma_i = X \cdot \partial\sigma_i = \int_{\partial\sigma_i} D_X = \int_{\sigma_i} dD_X.$$

<sup>1)</sup> Константа Липшица  $\mathfrak{L}(\omega)$  выше не определялась. Ее следует определить как

$$\sup \frac{|\omega(p) - \omega(q)|}{p - q}.$$

Так как форма  $dD_X$  непрерывна, то мы находим

$$D_{dX}(p, \alpha) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{dX \cdot \sigma_i}{|\sigma_i|} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{|\sigma_i|} \int_{\sigma_i} dD_X(q, \alpha) dq = (dD_X)(p, \alpha)$$

и равенство (16) доказано.

**11. Примеры.** (а) Взяв  $n = 1$ ,  $r = 0$ , положим

$$(1) \quad \varphi(x) = \inf(|x|, 1), \quad X \cdot x = \varphi(x).$$

Тогда  $|X| = 1$ ,  $|dX| = 1$ ,  $\mathfrak{L}(X) = 1$  и  $X$  является нульмерной дизельной коцепью, причем  $|X|^{\#} = |X|^b = 1$ . В интервале  $(0, 1)$  коцепь  $dX$  является дизельной и [см. (10.14)] соотношения (10.16) и (II, 8.2) показывают, что  $\bar{D}_{dX}(x) = d\varphi(x)/dx = 1$ ; далее,  $\bar{D}_{dX}(x) = -1$  в интервале  $(-1, 0)$ . Поэтому константы  $\mathfrak{L}(\bar{D}_{dX})$  не существует и коцепь  $dX$  не является дизельной. Действительно, если  $\sigma$  — ориентированный отрезок  $[-\varepsilon, 0]$  и  $v$  — число  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , то

$$dX \cdot \sigma = X \cdot \partial\sigma = -\varepsilon, \quad dX \cdot T_v\sigma = \varepsilon, \\ \frac{dX \cdot (T_v\sigma - \sigma)}{|v||\sigma|} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{2}{\varepsilon}.$$

(b) Определим  $\sigma$ ,  $v$  и  $X$  так же, как в примере (а). Положим  $A = T_v\sigma - \sigma$ . В силу (4.12)  $|A|^b = |A|$ . В силу (6.3)  $|A|^{\#} \leq |\sigma| |v|/2 = \varepsilon^2/2$ . Определим одномерную дизельную коцепь  $Y$  условием:  $\bar{D}_Y(x) = x/2$  при  $|x| \leq 2$ ,  $\bar{D}_Y(x) = 1$  при  $x \geq 2$  и  $\bar{D}_Y(x) = -1$  при  $x \leq -2$ . Тогда  $\mathfrak{L}(\bar{D}_Y) = 1/2$  и соотношения (10.4) и (10.2) показывают, что  $|Y|^{\#} = 1$ . Так как

$$Y \cdot T_v\sigma = \int_{T_v\sigma} D_Y = \int_0^{\varepsilon} \frac{x}{2} dx = \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad Y \cdot \sigma = -\frac{\varepsilon^2}{4},$$

то мы имеем  $Y \cdot A = \varepsilon^2/2$ , и поэтому  $|A|^{\#} \geq \varepsilon^2/2$ . Таким образом,

$$|A|^b = |A| = 2\varepsilon, \quad |A|^{\#} = \varepsilon^2/2.$$

Так как  $X \cdot \partial A = 2\varepsilon$ , то мы имеем  $|\partial A|^{\#} \geq 2\varepsilon$ . С другой стороны,  $|\partial A|^{\#} |\partial A|^b \leq |A|^b = 2\varepsilon$ ; поэтому  $|\partial A|^{\#} = 2\varepsilon$ . Заметим, что

$$|\partial A|^{\#} = \frac{4}{\varepsilon} |A|^{\#}, \quad |T_v\partial\sigma - \partial\sigma|^{\#} = \frac{2}{\varepsilon} |\partial\sigma|^b |v|,$$

и это показывает, что неравенство (3.4) для дизельной нормы не выполняется и что в правой части неравенства (6.3)  $|A|$  нельзя заменить на  $|A|^b$ .

(с) Невозможность надлежащего определения границы  $\partial A$  дизной цепи  $A$  можно увидеть из следующего. Пусть  $\sigma_i$  и  $\sigma'_i$  — отрезки  $[0, 1/2^i]$  и  $[-1/2^i, 0]$  соответственно. Положим  $A_i = 2^i \sigma_i$ ,  $A'_i = 2^i \sigma'_i$ . Тогда в силу (b)  $|A'_i - A_i|^\# = 1/2^{i+1}$ . Кроме того, разбивая  $A_i$  на  $2^k$  кусков и сдвигая каждый из них в  $A_{i+k}$  (на расстояние  $< 1/2^i$ ), мы видим, что  $|A_{i+k} - A_i|^\# < 1/2^{i+1}$ ; это же верно и для  $A'_j$ . Таким образом, последовательность  $A_1, A'_1, A_2, A'_2, \dots$  относительно дизной нормы является фундаментальной последовательностью, имеющей некоторый предел  $A$ .

Теперь для рассмотренной выше коцепи  $X$  мы имеем

$$X \cdot \partial A_i = 1, \quad X \cdot \partial A'_i = -1;$$

поэтому мы не можем разумно определить  $X \cdot \partial A$ . Ср. в связи с этим (VI, 1) и (VII, 7).

(d) Пусть  $S_1, S_2, \dots$  — такая последовательность квадратов в  $E^2$  со сторонами  $b_1, b_2, \dots$ , где  $b_i \rightarrow 0$ , что концентрические квадраты с вдвое большими сторонами  $3b_1, 3b_2, \dots$  попарно не пересекаются. (Мы можем при этом считать, что они находятся в ограниченной части плоскости  $E^2$ .) Выберем числа  $a_1, a_2, \dots \geq 0$  так, чтобы ряд  $\sum a_i b_i^2$  сходиллся, а ряд  $\sum a_i b_i$  расходился (например,  $a_i = 1, b_i = 1/i$ ). Пусть  $A_i$  — часть границы  $\partial S_i$ , образованная двумя противоположными сторонами, противоположно ориентированными и взятыми с коэффициентом  $a_i$ . Тогда  $|A_i|^\# \leq a_i b_i^2/2$ , и поэтому сумма ряда  $A = \sum^\# A_i$  при дизной норме существует. Однако ряд  $\sum^\# \partial A_i$  расходится. В самом деле, выберем вершину  $p_i$  квадрата  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) так, чтобы было  $\partial A_i = a_i p_i + \dots$ . Пусть  $U$  — объединение окрестностей  $U_{b_i}(p_i)$ ; определим дизную нульмерную коцепь  $X$  условием  $D_X(p) = \rho(p, E^2 \setminus U)$ . Тогда  $D_X(p_i) = b_i$ , и мы должны были бы иметь  $X \cdot \partial A = \sum X \cdot \partial A_i = \sum a_i b_i$ .

(е) Покажем, что в (7.7) множитель  $r + 1$  необходим. Мы определим некоторую  $r$ -мерную дизную коцепь  $X$  в единичном шаре пространства  $E^n$  (мы могли бы определить ее в  $E^n$ ) так, чтобы было  $\mathfrak{L}(X) = 1$ ,  $|dX| = r + 1$ ; для этого мы определим форму  $D_X = \omega$ . Выбрав ортонормальную систему координат, положим

$$\omega_1 \dots \hat{i} \dots r+1(x) = (-1)^{i-1} x^i, \text{ остальные } \omega_\lambda(x) = 0^1).$$

<sup>1)</sup> То есть  $\omega_\lambda(x) = 0$ , если  $\lambda$  содержит хотя бы один индекс, больший чем  $r + 1$ . — Прим. ред.

В силу (II, 8.4) находим  $d\omega_1 \dots \omega_{r+1}(x) = r + 1$ ; остальные  $(d\omega)_\lambda$  равны нулю. Поэтому  $|dX| = r + 1$ . Легко видеть, что  $\mathfrak{L}(X) = \mathfrak{L}_0(\omega) = 1$ .

При  $n = r + 1$  произведение  $X \cdot \sigma$  можно геометрически определить следующим образом. Пусть  $\varphi(\sigma)$  — расстояние от начала координат до ориентированной плоскости  $P$  симплекса  $\sigma$ , взятое со знаком  $+$  или со знаком  $-$  в соответствии с тем, содержит или не содержит начало координат полупространство (ориентированное так же, как и  $E^{r+1}$ ), ограниченное плоскостью  $P$ . Положим  $X \cdot \sigma = \varphi(\sigma) |\sigma|$ . Для куба  $C$  с гранями, параллельными координатым плоскостям, легко непосредственно увидеть, что  $dX \cdot C = (r + 1) |C|$ . То, что  $\mathfrak{L}(X) = 1$ , очевидно.

(f) Покажем, что условие (H) в теореме 8B необходимо. Возьмем  $n = 2$ ,  $r = 1$ , и пусть  $L$  — некоторая ориентированная прямая в  $E^2$ . Любая одномерная полиэдральная цепь  $A$  может быть записана в виде  $\sum a_i \sigma_i + \sum b_i \sigma'_i$ , где отрезки  $\sigma_i$  параллельны  $L$  и ориентированы так же, как и  $L$ , а отрезки  $\sigma'_i$  не параллельны  $L$ ; положим  $|A'| = |\sum a_i|$ . Тогда  $|A'| \leq |A|$  и  $|T_v A - A'| = 0$ . Однако мы можем взять двумерный симплекс  $\tau$  с одной стороной  $\sigma$ , лежащей на  $L$ . Тогда  $|\partial\tau|' = |\sigma|$  и его площадь  $|\tau|$  можно сделать сколь угодно малой, оставляя  $\sigma$ , а поэтому и  $|\partial\tau|'$  фиксированным. Таким образом, неравенство (8.2) не выполняется.

(g) Необходимость ограниченности комассы  $|dX|$  в замечании, следующем за теоремой 7A, можно показать следующим образом. Если дана любая одномерная полиэдральная цепь  $A$  в  $E^2$ , то выразим ее, как в (f), и положим  $X \cdot A = \sum a_i$ . Тогда  $|X| = 1$ ,  $\mathfrak{L}(X) = 0$ ; но рассматривая, как и выше, симплекс  $\tau$ , мы видим, что комасса  $|dX|$  не является конечной.

(h) Относительно дальнейшей информации о дизной норме см. полиэдральную цепь  $A_0$  в (IX, 17).

**12. Полуноормы  $|A|^b, |A|^\#$  являются нормами.** Мы докажем это с помощью дизных форм.

Лемма 12a. Для любого  $r$ -мерного симплекса  $\sigma \subset E^n$  и любого числа  $\zeta > 0$  существует такая  $r$ -черная дизная цепь  $X$ , что

$$(1) \quad |X| = 1, \quad \mathfrak{L}(X) = \frac{1}{\zeta}, \quad X \cdot \sigma = |\sigma|,$$

$$(2) \quad D_X(p) = 0 \quad \text{в} \quad E^n \setminus U_\zeta(\sigma).$$

Выберем в  $E^n$  ортонормальный базис  $e_1, \dots, e_n$  так, чтобы векторы  $e_1, \dots, e_r$  определяли  $r$ -мерную ориентированную плоскость симплекса  $\sigma$ . Положим  $\omega_0 = e^1 \dots e^r$ . Тогда

$$|\omega_0|_0 = 1, \quad \omega_0 \cdot \{\sigma\} = |\sigma|.$$

Определим действительную функцию

$$(3) \quad \varphi(p) = \varphi_{\sigma, \zeta}(p) = \sup \left\{ 1 - \frac{\rho(p, \sigma)}{\zeta}, 0 \right\};$$

тогда  $\varphi(p) = 1$  на  $\sigma$  и  $\varphi(p)$  уменьшается до нуля, когда  $p$  удаляется от  $\sigma$ . Неравенство треугольника показывает, что

$$(4) \quad \varrho(\varphi) = \frac{1}{\zeta}.$$

Положим  $\omega(p) = \varphi(p) \omega_0$ . Тогда  $|\omega|_0 = 1$ ,  $\varrho_0(\omega) = 1/\zeta$ ,  $\omega(p) = 0$  вне  $U_\zeta(p)$ , и поэтому в силу теоремы 10А соответствующая коцепь  $X$  обладает требуемыми свойствами. Равенство  $\int_\sigma \omega = \omega_0 \cdot \{\sigma\} = |\sigma|$

очевидно; см. (III, 4.1).

Лемма 12b. Пусть  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  — такие  $r$ -мерные симплексы в  $E^n$ , что

$$(5) \quad \rho(\sigma_i, \sigma_j) \geq 2\zeta > 0, \quad i \neq j.$$

Тогда существует такая  $r$ -мерная дизъюнктная коцепь  $X$ , что

$$(6) \quad |X| = 1, \quad \varrho(X) = \frac{1}{\zeta}, \quad X \cdot \sigma_i = |\sigma_i| \quad (i = 1, \dots, m).$$

Определяем  $X_i$  для каждого симплекса  $\sigma_i$  в соответствии с предыдущей леммой и полагаем  $X = \sum X_i$ .

Лемма 12с. Для любой  $r$ -мерной полиэдральной цепи  $A \subset E^n$  и любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такая  $r$ -мерная дизъюнктная коцепь  $X$ , что

$$(7) \quad |X| = 1, \quad X \cdot A \geq |A| - \varepsilon.$$

Замечание. Для дизъюнктных цепей мы докажем это ниже, в § 16.

Предположим, что  $r > 0$ ; при  $r = 0$  доказательство проще. Мы можем записать  $A = \sum a_i \sigma_i$ , где симплексы  $\sigma_i$  не перекрываются и коэффициенты  $a_i > 0$ . Положим  $\varepsilon' = \varepsilon / (2|A|)$ . Для каждого  $i$  пусть  $\tau_i$  — такой симплекс, лежащий внутри  $\sigma_i$ , что

$$|\sigma_i - \tau_i| \leq \varepsilon' |\sigma_i|.$$

Тогда симплексы  $\tau_i$  попарно не пересекаются, и поэтому при некотором  $\zeta > 0$  для симплексов  $\tau_i$  выполняется условие (5). Если теперь  $B = \sum a_i \tau_i$  и  $X$  — коцепь, найденная по лемме 12b, то

$$\begin{aligned} |X \cdot A - X \cdot B| &= \left| \sum a_i X \cdot (\sigma_i - \tau_i) \right| \leq \sum a_i |X| |\sigma_i - \tau_i| \leq \\ &\leq \sum a_i \varepsilon' |\sigma_i| = \frac{\varepsilon}{2}, \\ |A| - X \cdot B &= \sum a_i (|\sigma_i| - X \cdot \tau_i) \leq \sum a_i \varepsilon' |\sigma_i| = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

откуда следует (7).

**Теорема 12A.** Если  $A \neq 0$  — произвольная полиэдральная цепь, то  $|A|^b \geq |A|^{\#} > 0$ .

Так как  $A \neq 0$ , то  $|A| > 0$ . Положим  $\varepsilon = |A|/2$  и выберем  $X$  в соответствии с последней леммой. Тогда  $X \cdot A > 0$ . Так как  $|X \cdot A| \leq |X|^{\#} |A|^{\#}$ , то мы имеем  $|A|^{\#} > 0$ .

**13. Слабая сходимость.** В соответствии с тем, что у нас имеется две нормы, мы имеем два вида сходимости:

- (1)  $\lim_{i \rightarrow \infty}^b A_i = A$ , если  $|A - A_i|^b \rightarrow 0$ ,
- (2)  $\lim_{i \rightarrow \infty}^{\#} A_i = A$ , если  $|A - A_i|^{\#} \rightarrow 0$ ;

подобным же образом определяются пределы  $\lim^b X_i$ ,  $\lim^{\#} X_i$ . Будем также писать  $A_i \xrightarrow{b} A$  и т. д. Мы будем, кроме того, пользоваться слабыми пределами: функция  $X$  бемольной  $r$ -мерной цепи называется *слабым бемольным пределом* последовательности  $X_1, X_2, \dots$   $r$ -мерных бемольных коцепей, если

- (3)  $\lim_{i \rightarrow \infty} (X_i \cdot A) = X \cdot A$  для всех бемольных цепей  $A$ .

Мы пишем <sup>1)</sup>

- (4)  $X = \text{wkl}^b X_i$ .

(Обычно мы пользуемся критерием, указанным в приводимой ниже лемме.) Тогда (Банах, стр. 123) <sup>2)</sup> функция  $X$  ограничена и линейна,

<sup>1)</sup> wkl — сокращенно „weak limit“, т. е. „слабый предел“. — Прим. перев.

<sup>2)</sup> См. Банах С., Курс функционального анализа, Київ, 1948, стр. 106—107. — Прим. перев.

и поэтому является бемольной коцепью. Очевидно,

$$(5) \quad |X| \leq \lim |X_i|, \quad |dX| \leq \lim |dX_i|, \quad |X|^b \leq \lim |X_i|^b.$$

Лемма 13а. Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — некоторая последовательность бемольных коцепей, а  $X$  — функция ориентированного симплекса  $\sigma$ . Пусть, далее,

$$(6) \quad |X_i|^b \leq N \quad (\text{для всех } i), \quad \lim (X_i \cdot \sigma) = X \cdot \sigma \quad (\text{для всех } \sigma),$$

где  $N$  — некоторое число. Тогда функцию  $X$  можно единственным образом продолжить до бемольной коцепи и имеет место равенство (4). Обратно, из (3) следует (6).

Очевидно, функцию  $X$  можно продолжить так, чтобы она стала линейной в пространстве полиэдральных цепей  $A$  и чтобы выполнялось неравенство  $|X \cdot A| \leq N |A|^b$ ; поэтому  $X$  будет бемольной коцепью (§ 4). Мы должны доказать равенство (3) для любой бемольной цепи  $A$ . Если задано  $\varepsilon > 0$ , то выберем полиэдральную цепь  $B$ , для которой  $|B - A|^b < \varepsilon/(4N)$ , и номер  $i_0$  так, чтобы при  $i > i_0$  выполнялось неравенство  $|(X_i - X) \cdot B| < \varepsilon/2$ . Тогда при  $i \geq i_0$

$$(7) \quad |(X_i - X) \cdot A| \leq (|X_i|^b + |X|^b) |B - A|^b + \\ + |(X_i - X) \cdot B| < \varepsilon,$$

как и требовалось. По поводу обратного утверждения см. Банах, стр. 123<sup>1)</sup>.

Замечание. Вместо множества симплексов мы могли бы взять любое множество цепей, линейные комбинации которых плотны в  $C_r^b$ .

Пример (а). В  $E^1$  действительные функции

$$\varphi_i(t) = \frac{\sin it}{i}, \quad \varphi'_i(t) = \frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \cos it$$

определяют соответственно нульмерную коцепь  $X_i$  и одномерную коцепь  $Y_i$ , причем  $Y_i = dX_i$ . Очевидно, они слабо сходятся к нулю.

Определим *слабый бемольный предел* (12) для случая непрерывно изменяющейся переменной  $\eta$  с помощью критерия леммы 13а; тогда при  $\eta \rightarrow 0$  выполняется условие (3). Подобным же образом определим *слабые дизельные пределы*.

<sup>1)</sup> См. Банах С., Курс функционального анализа, Київ, 1948, стр. 107. — Прим. перев.

В размерности нуль условия для слабой сходимости, указанные в лемме 13а, если их сформулировать в терминах соответствующих действительных функций  $D_{X_i}$ ,  $D_X$ , принимают вид

$$|D_{X_i}(p)| \leq N, \quad \mathfrak{L}(D_{X_i}) \leq N, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} D_{X_i}(p) = D_X(p) \quad (\text{для всех } p).$$

Последнее условие мы можем усилить.

**Лемма 13b.** Если  $\text{wkl}^b X_i = X$  в размерности нуль, то  $\lim_{i \rightarrow \infty} D_{X_i}(p) = D_X(p)$  равномерно на компактных множествах.

В самом деле, пусть множество  $Q$  компактно, и пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Выберем  $\delta > 0$  так, чтобы было  $\delta N \leq \varepsilon/3$ ; выберем, далее, такие точки  $p_1, \dots, p_m$  в  $Q$ , что множества  $U_\delta(p_k)$  покрывают  $Q$ . Найдем номер  $i_0$ , для которого

$$|D_{X_i}(p_k) - D_X(p_k)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad k = 1, \dots, m, \quad \text{при } i \geq i_0.$$

Теперь возьмем любую точку  $p \in Q$  и любой номер  $i \geq i_0$ . Пусть  $k$  — номер, для которого  $|p - p_k| < \delta$ . Тогда

$$|D_{X_i}(p) - D_X(p)| < \mathfrak{L}(D_{X_i})|p_k - p| + \frac{\varepsilon}{3} + \mathfrak{L}(D_X)|p_k - p| \leq \varepsilon.$$

Если в  $E^n$  задана  $r$ -мерная бемольная (или же дизная) коцепь  $X$ , то мы сглаживаем ее с помощью процесса усреднения: положим

$$(8) \quad X_\eta \cdot A = \int_V \chi_\eta(v) (X \cdot T_v A) dv, \quad A \text{ — полиэдральная } r\text{-мерная цепь,}$$

где функции  $\chi_\eta(v)$  определяются так же, как в (П. III, 3). В силу (3.6) произведение  $X \cdot T_v A$  непрерывно зависит от  $v$  [в действительности на основании теоремы (X, 7B) это справедливо для всех  $r$ -мерных бемольных цепей  $A$ ]; таким образом, это — корректное определение.

**Теорема 13A.** Для любой  $r$ -мерной бемольной коцепи  $X$  в  $E^n$   $r$ -мерная коцепь  $X_\eta$  ( $\eta > 0$ ) является дизной, форма  $D_{X_\eta}$  бесконечно гладки и

$$(9) \quad dX_\eta = (dX)_\eta,$$

$$(10) \quad |X_\eta| \leq |X|, \quad |dX_\eta| \leq |dX|, \quad |X_\eta|^b \leq |X|^b,$$

$$(11) \quad \mathfrak{L}(X_\eta) \leq a_\eta \mathfrak{L}(\chi_\eta) |X|,$$

$$(12) \quad \text{wkl}^b_{\eta > 0} X_\eta = X,$$

где  $a_\eta$  — объем шара радиуса  $\eta$ .

Замечание. Если коцепь  $X$  определена лишь в открытом множестве  $R$ , то коцепь  $X_\eta$  определена в  $\text{int}_\eta(R)$ ; см. (VIII, 1 (g)).

Докажем равенство (9). Мы имеем (для  $r$ -мерной полиэдральной цепи  $A$ )

$$\begin{aligned} dX_\eta \cdot A &= X_\eta \cdot \partial A = \int_V x_\eta(v) (X \cdot T_v \partial A) dv = \\ &= \int_V x_\eta(v) (dX \cdot T_v A) dv = (dX)_\eta \cdot A. \end{aligned}$$

Так как  $\int_V x_\eta(v) dv = 1$ , то первое из неравенств (10) очевидно, а остальные следуют из него; поэтому в силу теоремы 4А  $X_\eta$  есть бемольная коцепь. На основании формулы (IX, 5.6) и леммы (П. III, 3с) форма  $D_{X_\eta}$  является бесконечно гладкой (здесь нам этот факт не понадобится).

Чтобы доказать неравенство (11) (показывающее, что  $X_\eta$  — дизельная коцепь), возьмем произвольный вектор  $u$ . Имеем

$$\begin{aligned} X_\eta \cdot T_u \sigma &= \int_V x_\eta(v) (X \cdot T_{v+u} \sigma) dv = \int_V x_\eta(v-u) (X \cdot T_v \sigma) dv, \\ |X_\eta \cdot (T_u \sigma - \sigma)| &\leq \int_V |x_\eta(v-u) - x_\eta(v)| |X| |\sigma| dv \leq \\ &\leq \mathfrak{L}(x_\eta) |u| |X| |\sigma| a_{\eta+|u|}, \end{aligned}$$

так как подынтегральное выражение обращается в нуль вне шара  $U_\zeta(0)$ , где  $\zeta = \eta + |u|$ . Отсюда легко вытекает неравенство (11) [нужно применить написанное выше равенство к симплексам  $\sigma, T_w \sigma, \dots, T_{(m-1)w} \sigma$ , где  $w = u/m$ , а  $m$  велико, и воспользоваться формулой (7.4)].

Возьмем произвольный  $r$ -мерный симплекс  $\sigma$ . Положим  $M = |\sigma| + |\partial \sigma|$ . В силу (3.6)

$$|T_v \sigma - \sigma|^b \leq M \zeta, \quad \text{если } |v| \leq \zeta.$$

На основании (П. III, 3.2) получаем

$$|(X_\eta - X) \cdot \sigma| = \left| \int_V x_\eta(v) X \cdot (T_v \sigma - \sigma) dv \right| \leq |X|^b M \zeta, \quad \text{если } \eta \leq \zeta.$$

Поэтому  $\lim_{\eta \rightarrow 0} X_\eta \cdot \sigma = X \cdot \sigma$  и равенство (12) доказано.

Пример (b). Возьмем  $r = n = 1$ . Положим  $\varphi(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $\varphi(t) = 1$  при  $t > 0$ ; пусть, далее,

$$X \cdot \sigma = \int_{\sigma} \varphi.$$

Тогда  $|X_{\eta} - X| \geq 1/2$  при  $\eta > 0$ ; несмотря на то, что  $\text{wkl}^b X_{\eta} = X$ , равенство  $\lim^b X_{\eta} = X$  не имеет места. Заметим, что  $\mathfrak{L}(X_{\eta}) \rightarrow \infty$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

Из теоремы 13А и равенства (4.3) непосредственно вытекает следующее соотношение:

(13)

$$|A|^b = \sup \{ |X \cdot A| : X \text{ — диззные } r\text{-мерные коцепи, } |X|^b = 1 \}.$$

Отсюда следует [см. также лемму (VI, 8d)]

**Теорема 13В.** *Бемольные цепи  $A$  и  $B$  равны в том и только в том случае, если  $X \cdot A = X \cdot B$  для всех диззных коцепей  $X$ .*

#### 14. Некоторые связи между пространствами цепей и коцепей.

**Теорема 14А.** *Пространство  $C^{\#r}$  слабо плотно в пространстве  $C^{br}$ .*

Прежде всего всякая  $r$ -мерная диззная коцепь является и  $r$ -мерной бемольной коцепью; таким образом,  $C^{\#r} \subset C^{br}$ . Наша теорема теперь следует из теоремы 13А.

**Замечание.** Пространство  $C^{\#r}$ , вообще говоря, не плотно в  $C^{br}$ ; коцепь  $X$ , рассмотренная в примере (b) § 13, очевидно, не является бемольным пределом никакой последовательности диззных коцепей. Подпространство пространства  $C^{\#r}$ , состоящее из тех коцепей  $X$ , для которых форма  $D_X$  оказывается гладкой, является полным и сепарабельным; пространство  $C^{\#r}$  не сепарабельно (§ 18).

**Теорема 14В.** *Для любой бемольной цепи  $A = \lim^b A_i$  ( $A_i$  — полиэдральные цепи) положим  $\Psi A = \lim^{\#} A_i$ . Тогда  $\Psi$  есть линейное взаимно однозначное отображение пространства  $C_r^b$  в пространство  $C_r^{\#}$ . Поэтому любую бемольную цепь мы можем рассматривать и как диззную цепь. Множество  $\Psi C_r^b$  плотно в пространстве  $C_r^{\#}$  при диззной норме.*

Так как  $|A_j - A_i|^{\#} \leq |A_j - A_i|^b$ , то  $\Psi A$  существует и не зависит от выбора последовательности  $A_i$ . Отображение  $\Psi$ ,

очевидно, линейно. Возьмем теперь любую бемольную цепь  $A \neq 0$ . Тогда  $|A|^b \neq 0$ , и в силу (13.13) мы можем выбрать такую дизъюнктную коцепь  $X$ , что  $X \cdot A > 0$ . Из определения отображения  $\Psi$  следует  $X \cdot \Psi A = X \cdot A$ ; поэтому

$$|X|^{\#} |\Psi A|^{\#} \geq |X \cdot \Psi A| = |X \cdot A| > 0,$$

следовательно,  $|\Psi A|^{\#} > 0$  и  $\Psi A \neq 0$ . Таким образом, отображение  $\Psi$  взаимно однозначно. Так как множество полиэдральных цепей плотно в  $C_r^{\#}$ , то и  $\Psi C_r^b$  плотно в  $C_r^{\#}$ .

**15.  $\rho$ -нормы.** Для каждого  $\rho > 0$  определим бемольную  $\rho$ -норму и дизъюнктную  $\rho$ -норму  $r$ -мерной полиэдральной цепи  $A$ :

$$(1) \quad |A|_{\rho}^b = \inf \left\{ |A - \partial D| + \frac{|D|}{\rho} \right\},$$

$$(2) \quad |A|_{\rho}^{\#} = \inf \left\{ \frac{\sum |a_i| |\sigma_i| |v_i|}{(r+1)\rho} + \left| \sum a_i T_{v_i \sigma_i} \right|_{\rho}^b; A = \sum a_i \sigma_i \right\}.$$

Можно представлять себе, что масса и нормы  $r$ -мерной цепи имеют размерность  $r$ -й степени расстояния, а  $\rho$  имеет размерность расстояния. Как и в § 3, 6, находим (в настоящий момент для полиэдральных цепей)

$$(3) \quad |\partial A|_{\rho}^b \leq \frac{|A|_{\rho}^b}{\rho},$$

$$(4) \quad |T_v A - A|_{\rho}^{\#} \leq \frac{|A| |v|}{(r+1)\rho}.$$

Соответствующими нормами коцепей, очевидно, являются <sup>1)</sup>

$$(5) \quad |X|_{\rho}^b = \sup \{ |X|, \rho |dX| \},$$

$$(6) \quad |X|_{\rho}^{\#} = \sup \{ |X|, (r+1)\rho \mathfrak{L}(X) \}.$$

Если писать  $|\odot$  вместо  $|^b$  или  $|\#$ , то очевидны следующие неравенства:

$$(7) \quad |A|_{\rho_1}^{\odot} \leq |A|_{\rho_2}^{\odot} \leq \frac{\rho_1}{\rho_2} |A|_{\rho_1}^{\odot} \quad (\rho_2 \leq \rho_1),$$

$$(8) \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} |X|_{\rho_1}^{\odot} \leq |X|_{\rho_2}^{\odot} \leq |X|_{\rho_1}^{\odot} \quad (\rho_2 \leq \rho_1).$$

Для каждого  $\rho > 0$  пространство  $r$ -мерных полиэдральных цепей, снабженное бемольной  $\rho$ -нормой, имеет пополнение  $C_{\rho,r}^b$  и т. д.

<sup>1)</sup> Ср. доказательства формул (4.8) и (7.6). — Прим. ред.

Выписанные выше неравенства немедленно приводят к следующей теореме (ср. теорему 14B):

**Теорема 15A.** *Элементы пространств  $C_{p,r}^b$  не зависят от  $p$ ; отличаются только их нормы. Для каждого  $r$  функция  $\varphi_p(A) = |A|_p^b$  бемольной  $r$ -мерной цепи непрерывна в каждом пространстве  $C_{p_1,r}^b$ . Это же справедливо для пространств  $C_{p,r}^\#, C_p^{br}, C_p^{\#r}$ .*

Из (5) и (6) получаем:

**Теорема 15B.** *Для каждой бемольной коцепи  $X$  существует такое число  $\rho_0 > 0$ , что*

$$(9) \quad |X|_p^b = |X|, \text{ если } p \leq \rho_0.$$

*Это же справедливо для дизной  $p$ -нормы.*

Докажем несколько более слабую теорему относительно полиэдральных цепей. (Случай произвольных цепей рассмотрен в следующем параграфе.)

**Теорема 15C.** *Для любой полиэдральной цепи  $A$*

$$(10) \quad \lim_{p \rightarrow 0} |A|_p^b = \lim_{p \rightarrow 0} |A|_p^\# = |A|.$$

Если задано  $\varepsilon > 0$ , то выберем  $X$  в соответствии с леммой 12с; выберем  $\rho_0$ , согласно теореме 15B, пользуясь дизной  $\rho_0$ -нормой. Тогда при  $p \leq \rho_0$

$$|A|_p^b \geq |A|_p^\# = |X|_p^\# |A|_p^\# \geq |X \cdot A| \geq |A| - \varepsilon.$$

Так как  $|A|_p^b \leq |A|$ , то равенства (10) доказаны.

**16. Масса цепей.** Как мы отметили в примере (с) § 5, мы можем оказаться не в состоянии приписать бемольной или же дизной цепи конечную массу. Приписать цепи конечную или бесконечную массу можно различными способами; именно,

$$(1) \quad |A|_b = \inf \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} |A_i| : A_i - \text{полиэдральные цепи, } A_i \xrightarrow{b} A \right\},$$

$$(2) \quad |A|_{(b)} = \lim_{p \rightarrow 0} |A|_p^b,$$

$$(3) \quad |A|_{[b]} = \sup \{ |X \cdot A| : X - \text{бемольные коцепи, } |X| \leq 1 \}.$$

Существуют и соответствующие определения  $|A|_\#$ ,  $|A|_{(\#)}$ ,  $|A|_{[\#]}$ . Для бемольной цепи  $A$  имеют смысл все шесть определений (см. теорему 14B).

**Теорема 16А.** Для полиэдральной цепи все эти величины равны  $|A|$ . Для любой бемольной цепи все шесть определений дают одно и то же. Для любой дизной цепи три соответствующих определения дают одно и то же.

В дальнейшем символ  $|A|$  будет обозначать любую из определенных нами масс.

Прежде всего для произвольной бемольной цепи  $A$  и бемольной коцепи  $X$ , для которой  $|X|=1$ , найдется такое число  $\rho > 0$ , что  $|X|_\rho^b = |X| = 1$  (теорема 15В). Отсюда на основании (15.7) получаем

$$|X \cdot A| \leq |X|_\rho^b |A|_\rho^b = |A|_\rho^b \leq |A|_{(b)};$$

следовательно,  $|A|_{[b]} \leq |A|_{(b)}$ . Далее, если задано  $\varepsilon > 0$ , то выберем  $\rho > 0$  так, чтобы было  $|A|_\rho^b > |A|_{(b)} - \varepsilon/2$  (если масса  $|A|_{(b)}$  бесконечна, то возьмем  $|A|_\rho^b > 1/\varepsilon$ ). В силу соотношения (4.3) для  $\rho$ -нормы найдется такая бемольная коцепь  $X$  (ср. теорему 15А), что

$$|X|_\rho^b = 1, \quad X \cdot A > |A|_\rho^b - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому  $X \cdot A > |A|_{(b)} - \varepsilon$  и  $|A|_{[b]} \geq |A|_{(b)}$ , и тем самым доказано, что эти две массы равны. Подобным же образом  $|A|_{[\#]} = |A|_{(\#)}$  для дизной цепи  $A$ .

Очевидно, для бемольных цепей  $|A|_{[\#]} \leq |A|_{[b]}$ . Чтобы доказать обратное неравенство, выберем для заданной бемольной цепи  $A$  и числа  $\varepsilon > 0$  такую бемольную коцепь  $X$ , что  $|X|=1$  и  $X \cdot A > |A|_{[b]} - \varepsilon/2$  (если масса  $|A|_{[b]}$  бесконечна, то возьмем  $X \cdot A > 1/\varepsilon$ ). В силу теоремы 13А и формул (13.10) и (13.12) мы можем найти такую дизную коцепь  $Y$ , что

$$|Y| \leq |X| = 1, \quad |Y \cdot A - X \cdot A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому  $Y \cdot A > |A|_{[b]} - \varepsilon$ , и тем самым доказано, что  $|A|_{[\#]} \geq |A|_{[b]}$ ; таким образом, эти массы равны.

Допустим, что  $\lim^b A_i = A$ , где  $A_i$  — полиэдральные цепи. Если задано  $\varepsilon > 0$ , то выберем  $\rho$  так, чтобы было  $|A|_\rho^b > |A|_{(b)} - \varepsilon$  (если масса  $|A|_{(b)}$  бесконечна, то возьмем  $|A|_\rho^b > 1/\varepsilon$ ). Так как  $|A_i| \geq |A_i|_\rho^b$  и  $\lim_{i \rightarrow \infty} |A_i|_\rho^b = |A|_\rho^b$  (теорема 15А), то

$$\lim |A_i| > |A|_{(b)} - \varepsilon.$$

и тем самым доказано, что  $|A|_{(b)} \leq |A|_b$ . Подобным же образом  $|A|_{(\#)} \leq |A|_{\#}$  для дизной цепи  $A$ .

При доказательстве неравенства  $|A|_b \leq |A|_{(b)}$  для бемольной цепи  $A$  мы можем допустить, что масса  $|A|_{(b)}$  конечна. Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ ; тогда нам нужно лишь найти полиэдральную цепь  $B$ , для которой

$$(4) \quad |B - A|^b < \varepsilon, \quad |B| < |A|_{(b)} + \varepsilon.$$

Выберем  $\rho > 0$  так, чтобы было  $\rho(|A|_{(b)} + \varepsilon/2) < \varepsilon/2$ . Возьмем полиэдральную цепь  $A'$ , для которой

$$|A' - A|_p^b < \frac{\varepsilon}{2};$$

тогда  $|A'|_p^b < |A|_p^b + \varepsilon/2$ . Поэтому существует такая полиэдральная цепь  $D$ , что

$$|A' - \partial D| + \frac{|D|}{\rho} < |A|_p^b + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим  $B = A' - \partial D$ ; тогда имеет место второе из неравенств (4). Кроме того,

$$\begin{aligned} B - A|^b &\leq |A' - A|^b + |\partial D|^b \leq |A' - A|_p^b + |D| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \rho \left( |A|_p^b + \frac{\varepsilon}{2} \right) < \varepsilon, \end{aligned}$$

как и требовалось.

Чтобы доказать для дизной цепи  $A$  неравенство  $|A|_{\#} \leq |A|_{(\#)}$  (предполагая, что масса  $|A|_{\#}$  конечна), докажем неравенства (4) с  $\#$  вместо  $b$ . Выберем  $\rho$  так, чтобы было  $2\rho(|A|_{(\#)} + \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Возьмем полиэдральную цепь  $A'$ , для которой

$$|A' - A|_p^{\#} < \frac{\varepsilon}{2};$$

тогда  $|A'|_p^{\#} < |A|_p^{\#} + \varepsilon/2$ . Поэтому мы можем написать

$$A' = \sum a_i \sigma_i, \quad \frac{\sum |a_i| \sigma_i |v_i|}{(r+1)\rho} + \left| \sum a_i T_{v_i} \sigma_i \right|_p^b < |A|_p^{\#} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем полиэдральную цепь  $D$ , удовлетворяющую условию

$$\left| \sum a_i T_{v_i} \sigma_i - \partial D \right| + \frac{|D|}{\rho} < |A|_p^{\#} + \frac{\varepsilon}{2},$$

и положим

$$B = \sum a_i T_{v_i} \sigma_i - \partial D.$$

Тогда  $|B| < |A|_{(\#)} + \varepsilon$ , и, пользуясь неравенством (6.3), мы получаем

$$\begin{aligned} |B - A|^\# &\leq |A - A'|^\# + \left| \sum a_i (T_{v_i} \sigma_i - \sigma_i) \right|^\# + |\partial D|^\# < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sum |a_i| |\sigma_i| |v_i|}{r+1} + |D| < \frac{\varepsilon}{2} + 2\rho \left( |A|_\rho^\# + \frac{\varepsilon}{2} \right) < \varepsilon, \end{aligned}$$

как и требовалось.

Наконец, теорема 15С показывает, что для полиэдральной цепи  $A$  все эти массы равны  $|A|$ .

Заметим, что определение (3) дает <sup>1)</sup>

$$(5) \quad |X \cdot A| \leq |X| |A| \quad (X \text{ и } A \text{ — бемольные или же } X \text{ и } A \text{ — диззные}).$$

Теорема 16В. В каждом из пространств  $C_{p,r}^\#$  и  $C_{p,r}^b$  масса является полунепрерывной снизу функцией.

В силу теоремы 15А функция  $\varphi_\eta(A) = |A|_\eta^\#$  непрерывна в каждом пространстве  $C_{p,r}^\#$ . Так как при  $\eta \rightarrow 0$  функция  $\varphi_\eta(A)$  возрастает и стремится к  $|A|$ , то масса  $|A|$  полунепрерывна снизу. Так как, далее, вложение пространства  $C_{p,r}^b$  в  $C_{p,r}^\#$  непрерывно (теорема 14В), то это заключение верно также и для пространства  $C_{p,r}^b$ .

Теорема 16С. Пусть  $E'$  — некоторое подпространство пространства  $E$ , и пусть  $A$  — бемольная цепь в  $E'$ . Тогда  $A$  можно рассматривать как бемольную цепь в  $E$  и при этом  $|A|_{p,E'}^b = |A|_{p,E}^b$ ,  $|A|_{E'} = |A|_E$ . Это же верно и в случае диззной нормы.

Каждая полиэдральная цепь  $B$  в подпространстве  $E'$  лежит и в  $E$ , и, очевидно,  $|B|_{p,E}^b \leq |B|_{p,E'}^b$ . Противоположное неравенство следует из (2.4) (ср. теорему 3В). Если  $\lim_{p,E'}^b A_i = A$  ( $A_i$  — полиэдральные цепи в  $E'$ ), то  $|A_j - A_i|_{p,E}^b \rightarrow 0$  и  $A$  можно рассматривать как цепь в  $E$ ; далее,  $|A|_{p,E}^b = \lim |A_i|_{p,E}^b = \lim |A_i|_{p,E'}^b = |A|_{p,E'}^b$ . Пользуясь определением (2), видим, что  $|A|_{E'} = |A|_E$ . То же самое доказательство годится и в случае диззной нормы, если воспользоваться соотношением  $\pi T_{v_i} \sigma_i = T_{\pi v_i} \pi \sigma_i$ .

<sup>1)</sup> См. замечание после формулировки теоремы 16А. — Прим. ред.

**17. Сепарабельность пространств цепей.** Мы докажем следующую теорему:

**Теорема 17А.** *Пространства  $C_r^b$ ,  $C_r^\#$  сепарабельны.*

Пусть  $p_1, p_2, \dots$  — последовательность точек, плотная в  $E^n$ . Множество полиэдральных цепей  $A = \sum a_i \sigma_i$ , где  $a_i$  рациональны, а вершины симплексов  $\sigma_i$  содержатся среди точек  $p_j$ , счетно. Мы покажем, что оно плотно в  $C_r^b$ ; поэтому оно плотно и в  $C_r^\#$ .

Достаточно показать, что это множество плотно в множестве всех полиэдральных цепей; последнее будет установлено, если мы покажем, что для каждого симплекса  $\sigma = q_0 \dots q_r$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такой симплекс  $\sigma' = p_{\lambda_0} \dots p_{\lambda_r}$ , что  $|\sigma' - \sigma|^b < \varepsilon$ . Положим

$$c = \text{diam}(\sigma) + 2, \quad N = \frac{(r+1)c^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{c^r}{r!}.$$

Мы покажем, что

$$(1) \quad |\sigma' - \sigma|^b \leq N\zeta, \text{ если } |p_{\lambda_i} - q_i| \leq \zeta \leq 1 \quad (\text{для всех } i).$$

Положим

$$\tau_i = q_0 \dots q_i p_{\lambda_{i+1}} \dots p_{\lambda_r}, \quad A = \sum (-1)^i \tau_i;$$

тогда (П. II, 12.4)  $\partial A = \sigma' - \sigma - \sum B_i$ , где цепь  $B_i$  образована из симплекса  $\sigma_i = q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_r$  так же, как цепь  $A$  образована из  $\sigma$ . В силу (III, 1.3)

$$|\tau_i| \leq \frac{|p_{\lambda_{i+1}} - q_{i+1}| [\text{diam}(\tau_i)]^r}{(r+1)!} \leq \frac{\zeta c^r}{(r+1)!},$$

и поэтому  $|A| \leq \zeta c^r / r!$ . Подобным же образом  $|B_i| \leq \zeta c^{r-1} / (r-1)!$ . Следовательно,

$$|(\sigma' - \sigma) - \partial A| + |A| \leq \zeta \left[ \frac{(r+1)c^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{c^r}{r!} \right] = N\zeta,$$

и мы получили неравенство (1); доказательство сепарабельности закончено.

**18. Несепарабельность пространств коцепей.** Мы покажем, что, хотя пространства  $C_r^b$  и  $C_r^\#$  и сепарабельны, сопряженные к ним пространства несепарабельны; таким образом, эти пространства не рефлексивны (П. I, 14). Заметим, что при  $r = n = 1$  теоремы 18D и 10A показывают, что пространство функций  $\varphi$ , для которых  $|\varphi|_0$  и  $\mathfrak{L}_\varphi$  конечны и которые обращаются в нуль вне некоторого отрезка  $I$ , с нормой  $|\varphi|^\#$ , несепарабельно. [Нужно применить

(VIII, 1 (f)) к интервалу  $R$ ,  $\bar{R} \subset I$ .] Однако подпространство гладких функций, как легко видеть, сепарабельно.

Докажем сначала две общие теоремы. В первой из них мы рассмотрим нормированное линейное пространство некоторых элементов  $Z$ , каждый из которых имеет „носитель“  $[Z]$ , лежащий в  $E^n$ , и при этом выполняется следующее:

$$(1) \quad |aZ| \subset |Z|, \quad |Z + Z'| \subset |Z| \cup |Z'|.$$

**Теорема 18А.** Пусть  $n \geq 1$ , и пусть  $C$  — нормированное линейное пространство, элементы которого имеют носители, удовлетворяющие условиям (1); пусть, кроме того, выполняются следующие условия:

(P<sub>1</sub>) Каждому открытому множеству  $R \subset E^n$  соответствует некоторый элемент  $Z \neq 0$ , для которого  $|Z| \subset R$ .

(P<sub>2</sub>) Если  $[Z_1]$  и  $[Z_2]$  лежат в непересекающихся кубах, то  $|Z_1 + Z_2| \geq |Z_1|$ .

(P<sub>3</sub>) Если  $[Z_1], [Z_2], \dots$  лежат в попарно не пересекающихся кубах, объединение этих кубов ограничено и существует такое число  $N$ , что  $|Z_i| \leq N$  для всех  $i$ , то в  $C$  существует элемент  $\sum_{i=1}^{\infty} Z_i$ .

Тогда пространство  $C$  несепарабельно.

Пусть  $Q_1, Q_2, \dots$  — некоторая последовательность попарно не пересекающихся кубов, центры которых лежат на одной прямой в  $E^n$  и которые содержатся в ограниченном множестве<sup>1)</sup>. В силу (P<sub>1</sub>) мы можем выбрать такой элемент  $Z_i$ , что  $|Z_i| = 1$  и  $[Z_i] \subset Q_i$ . Для каждой последовательности чисел  $a = (a_1, a_2, \dots)$  положим

$$Z_a^k = a_1 Z_1 + \dots + a_k Z_k, \quad Z_a = \lim_{k \rightarrow \infty} Z_a^k;$$

если числа  $a_i$  ограничены, то в силу (P<sub>3</sub>) элемент  $Z_a$  существует. Множество, состоящее из элементов  $Z_a$ , для которых все  $a_i = \pm 1$ , несчетно. Если мы покажем, что  $|Z_b - Z_a| \geq 2$  при  $b \neq a$  (все  $a_i$  и  $b_i$  равны  $\pm 1$ ), то отсюда будет следовать заключение теоремы.

Положим  $c_i = b_i - a_i$ ; так как  $Z_c^k = Z_b^k - Z_a^k$  и все три предела при  $k \rightarrow \infty$  существуют, то мы имеем  $Z_c = Z_b - Z_a$ . Пусть  $j$  — первое натуральное число, для которого  $c_j \neq 0$ ; тогда  $|c_j| = 2$ . Мы можем найти куб  $Q'_j$ , содержащий объединение  $Q_{j+1} \cup Q_{j+2} \cup \dots$

<sup>1)</sup> Центры кубов должны следовать на прямой в порядке возрастания номеров кубов; кроме того, удобно считать, что грани кубов соответственно параллельны (см. ниже определение куба  $Q'$ ). — Прим. ред.

и не пересекающийся с  $Q_j$ . Поскольку  $[c_{j+1}Z_{j+1} + \dots + c_k Z_k] \subset Q'_j$ , из  $(P_2)$  следует, что

$$|Z_c^k| = |c_j Z_j + (c_{j+1} Z_{j+1} + \dots + c_k Z_k)| \geq |c_j Z_j| = 2.$$

При  $k \rightarrow \infty$  мы получаем наше утверждение.

**Теорема 18В.** Пусть  $\bar{C}$  — линейное пространство  $r$ -мерных полиэдральных цепей в  $E^n$  ( $n \geq 1$ ,  $0 \leq r \leq n$ ) с некоторой нормой  $|A|'$ . Пусть  $|Z|$  обозначает норму в пространстве  $\bar{C}$ , сопряженном к  $\bar{C}$ . Допустим, что

$(P_4)$  для каждой бесконечно гладкой  $r$ -формы  $\omega$  в  $E^n$  с ограниченным носителем линейная функция  $\varphi(A) = \int_A \omega$  полиэдральной цепи ограничена в указанной выше норме и поэтому определяет некоторый элемент  $Z_\omega$  пространства  $\bar{C}$ .

$(P_5)$  Для каждой такой формы  $\omega$  имеет место неравенство  $|Z_\omega| \geq |\omega|_0$ .

$(P_6)$  Если носители двух таких форм  $\omega_1$  и  $\omega_2$  лежат в непересекающихся кубах, то

$$(2) \quad |Z_{\omega_1} + Z_{\omega_2}| = \sup \{|Z_{\omega_1}|, |Z_{\omega_2}|\}.$$

Тогда пространство  $\bar{C}$  несепабельно.

Пусть  $\bar{C}'$  — подпространство пространства  $\bar{C}$ , состоящее из всех элементов  $Z_\omega$ , соответствующих формам  $\omega$  указанного вида. Положим  $[Z_\omega] = \text{spt}(\omega)$ ; тогда условия (1) выполняются. Мы покажем, что пространство  $\bar{C}'$  удовлетворяет условиям  $(P_1)$  и  $(P_2)$ ; мы покажем, далее, что выполняется и условие  $(P_3)$ , если  $Z_l = Z_{\omega_l}$  и кубы взяты, как в доказательстве теоремы 18А. Тем самым будет доказана и наша теорема.

Если дано открытое множество  $R$ , то мы можем выбрать бесконечно гладкую  $r$ -форму  $\omega \neq 0$ , у которой  $\text{spt}(\omega) \subset R$ . Тогда  $[Z_\omega] \subset R$ . Далее,  $\int_\sigma \omega \neq 0$  для некоторого  $r$ -мерного симплекса  $\sigma$ ; поэтому  $Z_\omega \cdot \sigma \neq 0$  и  $Z_\omega \neq 0$ . Условие  $(P_2)$  выполняется в силу  $(P_6)$ .

Теперь возьмем описанные выше кубы  $Q_1, Q_2, \dots$  и допустим, что

$$\text{формы } \omega_i \text{ бесконечно гладки, } \text{spt}(\omega_i) \subset Q_i, \quad |Z_{\omega_i}| \leq N.$$

Положим

$$Z'_k = Z_{\omega_1} + \dots + Z_{\omega_k};$$

мы должны показать, что в  $\bar{C}$  существует  $\lim Z'_k$ .

Покажем сначала, что для каждого  $r$ -мерного симплекса  $\sigma$  существует  $\psi(\sigma) = \lim (Z'_k \cdot \sigma)$ . Пусть  $\tau_i$  — часть симплекса  $\sigma$ , лежащая в  $Q_i$ . Пользуясь условием  $(P_5)$ , находим

$$\begin{aligned} |(Z_{\omega_{j+1}} + \dots + Z_{\omega_k}) \cdot \sigma| &= \left| \int_{\tau_{j+1}} \omega_{j+1} + \dots + \int_{\tau_k} \omega_k \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=j+1}^k |\omega_i|_0 |\tau_i| \leq \sum_{i=j+1}^k |Z_{\omega_i}| |\tau_i| \leq N \sum_{i=j+1}^k |\tau_i|. \end{aligned}$$

Если задано  $\varepsilon < 0$ , то мы можем так выбрать  $j_0$ , чтобы последняя сумма была  $< \varepsilon/N$  при  $j_0 \leq j < k$ ; это показывает, что предел  $\psi(\sigma)$  существует.

Теперь соотношение  $\psi(\sum a_i \sigma_i) = \sum a_i \psi(\sigma_i)$ , как легко видеть, единственным образом определяет линейную функцию  $\psi(A)$  полиэдральной цепи, и при этом  $\psi(A) = \lim (Z'_k \cdot A)$ . Чтобы завершить доказательство, нам остается только показать, что эта функция ограничена. Для этого мы покажем, что  $|\psi(A)| \leq N |A|'$ . Возьмем любое  $k$ . Тогда, несколько раз применяя условие  $(P_5)$ , получаем (используя кубы  $Q'_j$ , рассмотренных в доказательстве теоремы 18A)

$$\begin{aligned} |Z'_k \cdot A| &= |(Z_{\omega_1} + \dots + Z_{\omega_k}) \cdot A| \leq |Z_{\omega_1} + \dots + Z_{\omega_k}| |A|' = \\ &= \sup \{ |Z_{\omega_1}|, \dots, |Z_{\omega_k}| \} |A|' \leq N |A|'. \end{aligned}$$

При  $k \rightarrow \infty$  получаем нужное нам неравенство <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Доказательство нечетко. Показано лишь, что функция  $\psi(A)$  действительно определяет некоторый элемент  $Z$  пространства  $\bar{C}$  [посредством равенства  $Z \cdot A = \psi(A)$ ] и что этот элемент  $Z$  обладает тем свойством, что  $Z \cdot A = \lim Z'_k \cdot A$  (иначе говоря, последовательность  $\{Z'_k\}$  слабо сходится к  $Z$ ). Но из этого еще не следует, что  $\lim Z'_k = Z$  в смысле нормы пространства  $\bar{C}$ , т. е. условие  $(P_3)$  не доказано. Можно предложить следующее исправление. Сохраняя обозначения, принятые в доказательстве теоремы 18A, и обозначая через  $A_j$  такую полиэдральную цепь, расположенную в  $Q_j$ , что  $|A_j|' = 1$ ,  $Z_{\omega_j} \cdot A_j = 1$  (мы предполагаем, что  $|Z_{\omega_i}| > 1$  для всех  $i$ ), мы получим  $Z'_k \cdot A_j = \lim Z'_k \cdot A_j = c_j Z_{\omega_j} \cdot A_j = \pm 2$ , и поэтому  $|Z_b - Z_a| = |Z_c| \geq 2$ . Отсюда и вытекает несепарабельность (ибо последовательностей  $a$ , составленных из  $\pm 1$ , существует несчетное множество). Существование цепей  $A_j$ , обладающих указанными свойствами, вытекает из условия  $(P_8)$  или из условия  $(P_9)$  (см. ниже). Таким образом, теорема 18C верна, если условие  $(P_6)$  заменяется условием  $(P'_6)$  и одним из условий  $(P_8)$ ,  $(P_9)$ . Тем самым верна и теорема 18D в части, относящейся к бемольным коцепям. Утверждение теоремы 18D о дизъюнктивных коцепях остается недоказанным. — Прим. ред.

Представляют интерес следующие условия:

(P<sub>7</sub>)  $|A'| \leq |A|$  для всех полиэдральных цепей  $A$ . (Это сразу следует из условия:  $|\sigma'| \leq |\sigma|$  для всех симплексов  $\sigma$ .)

(P<sub>8</sub>) Если  $\text{spt}(\omega) \subset Q$  ( $Q$  — некоторый куб), то для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такая полиэдральная цепь  $A \subset Q$ , что  $|A'| = 1$ ,  $\int_A \omega > |Z_\omega| - \varepsilon$ .

(P<sub>9</sub>) Если  $Q$  — некоторый  $n$ -мерный куб и  $\pi$  — проекция пространства  $E^n$  на  $Q$ , определяемая, например, как в лемме 2b, то  $|\pi A'| \leq |A'|$  для всех полиэдральных цепей  $A$ .

**Теорема 18C.** В предыдущей теореме условие (P<sub>5</sub>) можно заменить условием (P<sub>7</sub>). Условие (P<sub>6</sub>) можно заменить ослабленным условием (P'<sub>6</sub>), получающимся, если в (2) знак  $=$  заменить на  $\leq$ , и каким-либо из условий (P<sub>8</sub>), (P<sub>9</sub>).

Прежде всего, предполагая, что выполняется (P<sub>7</sub>), докажем, что выполняется (P<sub>5</sub>). Возьмем любое  $\varepsilon > 0$ . Так как форма  $\omega$  непрерывна, то, как показывает определение комассы  $|\omega|_0$ , мы можем так выбрать симплекс  $\sigma$ , чтобы было  $\int_\sigma \omega \geq (|\omega|_0 - \varepsilon) |\sigma'|$ .

Пользуясь условием (P<sub>7</sub>), получаем

$$|Z_\omega \cdot \sigma| = \left| \int_\sigma \omega \right| \geq (|\omega|_0 - \varepsilon) |\sigma'|;$$

тем самым доказано, что  $|Z_\omega| \geq |\omega|_0 - \varepsilon$ , и поэтому условие (P<sub>5</sub>) выполняется.

Далее, пользуясь условием (P<sub>8</sub>), мы докажем (2) со знаком  $\geq$ . Нам нужно только показать, что  $|Z_{\omega_1} + Z_{\omega_2}| \geq |Z_{\omega_1}|$ . Пусть, скажем,  $\text{spt}(\omega_i) \subset Q_i$ . Если задано  $\varepsilon > 0$ , то выберем  $A$ , как в (P<sub>8</sub>), для формы  $\omega_1$  и куба  $Q_1$ . Тогда

$$(Z_{\omega_1} + Z_{\omega_2}) \cdot A = \int_A \omega_1 + \int_A \omega_2 = \int_A \omega_1 > |Z_{\omega_1}| - \varepsilon,$$

откуда  $|Z_{\omega_1} + Z_{\omega_2}| \geq |Z_{\omega_1}| - \varepsilon$ , и поэтому  $\geq |Z_{\omega_1}|$ .

Наконец, (P<sub>8</sub>) следует из (P<sub>9</sub>). В самом деле, определение нормы  $(Z_\omega)$  показывает, что для некоторой полиэдральной цепи  $B$  мы имеем  $|B'| = 1$  и  $\int_B \omega > |Z_\omega| - \varepsilon$ . Положим  $C = \pi B$ . Тогда

$\int_C \omega = \int_B \omega$ . Мы можем допустить, что  $|Z_\omega| - \varepsilon > 0$ ; тогда  $C \neq 0$  и мы можем положить  $A = C/|C'|$ . В таком случае  $|A'| = 1$ , и

так как  $|C|' \leq |B|' = 1$ , то мы имеем  $Z_\omega \cdot A \geq Z_\omega \cdot C > |Z_\omega| - \varepsilon$ , как и требовалось.

По-видимому, нелегко найти условия относительно нормы  $|A|'$ , с помощью которых можно было бы доказать (2) со знаком  $\leq$ . В этой связи представляет интерес следующий пример.

Пример. Возьмем  $r = n = 1$ ; пусть  $p_0 = 0$ . Пусть  $|A|'$  — наименьшая норма, удовлетворяющая условиям (8.1) и (8.2), а также условию (8.3) в случае, когда  $\sigma$  и  $T_\sigma \sigma$  лежат по разные стороны от  $p_0$ . Мы предоставляем читателю разобрать этот пример.

**Теорема 18D.** *Предположим, что  $0 \leq r \leq n$ ,  $n \geq 1$ . Тогда пространства  $C^{b,r}$  и  $C^{\#r}$  не separabelны. Это же верно и для пространств  $C^{b,r}(R)$  и  $C^{\#r}(R)$ , где  $R$  — произвольное открытое множество [см. (VIII, 1)].*

Это вытекает из доказанных выше теорем, например, следующим образом. Так как  $\omega$  — дизная форма, то выполнение условия  $(P_4)$  в обоих случаях очевидно (см. теорему 10A и (7.1)]. Выполняется и условие  $(P_7)$ . Выполнение условия  $(P_8)$  для  $\#$  очевидно на основании теоремы 10A и определения (10.2). (Это условие выполняется и для  $b$  в силу гл. IX.) Так как условие  $(P_9)$  в силу теоремы 3B выполняется для  $b$ , то остается доказать неравенство  $\leq$  в (2) для  $b$ .

Пусть заданы  $\omega_i, Q_i$ , причем  $\text{spt}(\omega_i) \subset Q_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $Z_{\omega_i} = Z_i$ , полиэдральная цепь  $A$  и  $\varepsilon > 0$ . Достаточно доказать, что

$$|(Z_1 + Z_2) \cdot A| \leq \sup \{ |Z_1|^b, |Z_2|^b \} (|A|^b + \varepsilon).$$

Мы можем выбрать  $C$  и  $D$  так, чтобы было

$$C = A - \partial D, \quad |C| + |D| < |A|^b + \varepsilon.$$

Пусть  $C_1$  и  $D_1$  — части цепей  $C$  и  $D$  соответственно, лежащие в  $Q_1$ ; положим  $C_2 = C - C_1$ ,  $D_2 = D - D_1$ . Тогда

$$|C| = |C_1| + |C_2|, \quad |D| = |D_1| + |D_2|.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} |(Z_1 + Z_2) \cdot A| &\leq |Z_1 \cdot C_1| + |dZ_1 \cdot D_1| + |Z_2 \cdot C_2| + |dZ_2 \cdot D_2| \leq \\ &\leq \sup \{ |Z_1|, |dZ_1|, |Z_2|, |dZ_2| \} (|C_1| + |D_1| + |C_2| + |D_2|), \end{aligned}$$

что вместе с (4.8) дает требуемое неравенство.

## VI. Некоторые связи между цепями и функциями

В предыдущей главе линейное пространство  $r$ -мерных полиэдральных цепей в  $E^n$  было наделено нормами; пополнение этого пространства приводит к банахову пространству. Полученные таким образом новые цепи (бемольные или дизельные), вообще говоря, не имеют никакого очевидного геометрического или аналитического представления. Цепи конечной массы можно, однако, представить с помощью аддитивных функций множества; см. гл. XI. В этой главе мы изучаем специальные представления некоторых цепей. Параграф 7 является единственным параграфом, непосредственно используемым в оставшейся части книги.

Первые шесть параграфов посвящены изучению цепей на действительной прямой; такие цепи имеют размерность 0 или 1. В § 1 мы показываем, каким образом действительной функции  $\varphi$  и при  $r=0$  и при  $r=1$  может соответствовать некоторая  $r$ -мерная цепь  $A$ . Допустим, что функция  $\varphi$  непрерывна и обращается в нуль вне отрезка  $[a, b]$ . Тогда полиэдральную цепь  $A'$ , аппроксимирующую цепь  $A$ , можно задать следующим образом. Возьмем некоторое достаточно мелкое подразделение отрезка  $[a, b]$  точками  $t_0 = a, t_1, \dots, t_m = b$ ; пусть  $I_k$  — отрезок  $[t_{k-1}, t_k]$ . Тогда, обозначая точку  $t$ , рассматриваемую как нульмерный симплекс, через  $\bar{t}$ , имеем

$$A' = \sum_{k=1}^m a_k \bar{t}_{k-1}, \quad a_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi(x) dx, \text{ если } r=0,$$

$$A' = \sum_{k=1}^m b_k I_k, \quad b_k = \varphi(t_{k-1}), \text{ если } r=1.$$

В § 2—5 мы рассматриваем различные соответствия между нульмерными цепями и действительными функциями. Мы покажем, что между нульмерными цепями конечной массы и нормализованными функциями ограниченной вариации существует взаимно однозначное соответствие. Если мы заменим функцию ограниченной вариации  $\gamma$  соответствующей аддитивной функцией множества  $\beta$ , определяемой условием  $\beta(I_{ab}) = \gamma(b) - \gamma(a)$  ( $I_{ab}$  — отрезок  $[a, b]$ ), то получим частный случай  $n=1, r=0$  более общей теории,

развиваемой в гл. XI. Дальнейшие связи с обычными теоремами анализа мы установим в § 6.

В § 7 мы покажем, каким образом клеточно-непрерывная суммируемая в  $E^n$  функция  $\alpha(p)$ , значениями которой являются  $r$ -векторы, определяет некоторую  $r$ -мерную бемольную цепь  $A$ . Множество цепей  $A$ , получающихся таким образом, плотно в пространстве цепей (дизельных или бемольных); поэтому нормы любых коцепей  $X$  определяются их значениями  $X \cdot A$  на этих „непрерывных цепях“. Пользуясь этими цепями вместо полиэдральных цепей, мы получаем некоторый, скорее аналитический, чем геометрический фон теории; он играет важную роль в различных отношениях. Цепями более общего вида мы воспользуемся в параграфах (IX, 15) и (XI, 14).

После нескольких лемм, доказанных в § 8, мы покажем в § 9, что если  $\alpha$  — гладкая функция, то граница соответствующей цепи  $A$  выражается через частные производные функции  $\alpha$ ; это — „сопряженная“ операция по отношению к операции внешнего дифференцирования форм. В § 10 производится краткое обсуждение вопроса об интегрировании на гладких многообразиях (где полиэдральные цепи не определены). Здесь устанавливается связь между нашим изложением и методами, которые применяются в теории гармонических интегралов (см. книгу де Рама).

**1. Непрерывные цепи на действительной прямой.** Вспомним (V, теорема 7B), что в  $E^1$  и нульмерные дизельные коцепи и одномерные дизельные коцепи взаимно однозначно соответствуют действительным дизельным функциям. Мы покажем, что клеточно-непрерывной суммируемой функции  $\varphi$  (П. III) соответствуют и нульмерная дизельная и одномерная дизельная цепи. Обратное неверно; см. конец этого параграфа, где дана сводка имеющихся фактов. Мы будем здесь пользоваться пространством  $E^1$  специального вида, а именно самим пространством  $\mathfrak{M}$ .

И при  $r=0$  и при  $r=1$  мы говорим, что клеточно-непрерывной суммируемой функции  $\varphi$  *соответствует*  $r$ -мерная дизельная или бемольная цепь  $A$ , если

$$(1) \quad \int_{E^1} \bar{D}_X(t) \varphi(t) dt = X \cdot A$$

для всех дизельных коцепей  $X$  той же размерности. [Форма  $D_X(t)$  определяется в (V, 10). Ей при  $r=1$  по формуле (V, 10.14) соответствует некоторая действительная функция  $\bar{D}_X(t)$ ; при  $r=0$   $\bar{D}_X = D_X$ .] Очевидно, цепь  $A$  единственна; мы обозначим ее символом  $\tilde{\varphi}$  и будем называть *непрерывной цепью*.

При  $r=1$  по заданной функции  $\varphi$  мы определяем аппроксимирующие полиэдральные цепи  $A_1, A_2, \dots$  следующим образом. Для каждого натурального числа  $k$  выберем некоторый отрезок  $Q_k$  в  $E^1$  так, чтобы было

$$\int_{E^1 \setminus Q_k} \langle \varphi \rangle < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Представим  $Q_k$  в виде объединения конечного числа неперекрывающихся частичных отрезков  $Q_{k1}, \dots, Q_{km_k}$ , для которых

$$|\varphi(t') - \varphi(t)| < \frac{1}{2^{k+1}} |Q_k|, \quad t, t' \text{ принадлежат одному и тому же интервалу } \text{int}(Q_{ki}).$$

Мы можем считать, что  $Q_{k-1} \subset Q_k$  ( $k > 1$ ) и что каждый отрезок из  $Q_{k-1}$  является объединением некоторых отрезков из  $Q_k$ . Пусть, скажем,  $Q_{ki} = [t_{k, i-1}, t_{ki}]$ . Пусть  $a_{ki}$  — ближайшее к нулю число, являющееся пределом значений  $\varphi(t)$  при  $t \in \text{int}(Q_{ki})$ ; положим

$$(2) \quad A_k = \sum_i a_{ki} Q_{ki}.$$

Если отрезки  $Q_{ki}$  ориентированы так же, как и  $E^1$ , то  $A_k$  есть одномерная полиэдральная цепь.

Теперь мы докажем, что предел  $A = \lim^b A_k$  существует и является, таким образом, бемольной (а следовательно, и дизной) цепью. Возьмем произвольное  $k$  и любое  $l > k$ . Отрезок  $Q_{kl}$  разбивается на отрезки  $Q_{lj}$ , где  $j$  пробегает некоторое множество индексов. Мы имеем неравенство для масс

$$\left| \sum_j a_{lj} Q_{lj} - a_{kl} Q_{kl} \right| = \left| \sum_j (a_{lj} - a_{kl}) Q_{lj} \right| < \frac{|Q_{kl}|}{2^{k+1} |Q_k|}.$$

Пусть  $\sum' a_{lj} Q_{lj}$  — часть цепи  $A_l$ , лежащая вне  $Q_k$ . В силу выбора отрезка  $Q_k$  и чисел  $a_{ki}$  мы имеем

$$\left| \sum' a_{lj} Q_{lj} \right| = \sum' |a_{lj}| |Q_{lj}| \leq \int_{E^1 \setminus Q_k} \langle \varphi \rangle < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Из этих двух неравенств получаем

$$(3) \quad |A_l - A_k|^b = |A_l - A_k| < \frac{1}{2^k}, \quad l > k,$$

и существование предела  $A = \lim^b A_k$  доказано.

Возьмем любую одномерную коцепь  $X$ . Так как

$$\left| \int_{Q_{kl}} \bar{D}_X \varphi - X \cdot a_{kl} Q_{kl} \right| = \left| \int_{Q_{kl}} \bar{D}_X(t) [\varphi(t) - a_{kl}] dt \right| \leq \frac{|X| |Q_{kl}|}{2^{k+1} |Q_k|},$$

то мы сразу находим

$$\left| \int_{E^1} \bar{D}_X \varphi - X \cdot A_k \right| \leq \frac{|X|}{2^k};$$

при  $k \rightarrow \infty$  получаем (1). Поэтому  $A = \tilde{\varphi}$ .

**Теорема 1А.** *Отображение  $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$  является взаимно однозначным линейным отображением пространства клеточно-непрерывных суммируемых функций в пространство одномерных бемольных (а следовательно, и дизельных) цепей. Мы имеем*

$$(4) \quad |\tilde{\varphi}| = \int \langle \varphi \rangle,$$

*а для указанных выше аппроксимирующих полиэдральных цепей  $A_k$*

$$(5) \quad |\tilde{\varphi} - A_k| < \frac{1}{2^k}, \quad |A_k| \leq |\tilde{\varphi}|.$$

*Множество одномерных цепей  $\tilde{\varphi}$ , для которых функции  $\varphi$  непрерывны, плотно в  $C_1^p$  и поэтому в  $C_1^\#$ .*

Очевидно, это отображение взаимно однозначно и линейно. Так как

$$|A_k| = \sum_i |a_{ki}| |Q_{ki}| \leq \int \langle \varphi \rangle,$$

то мы имеем  $|\tilde{\varphi}| \leq \int \langle \varphi \rangle$  (V, теорема 16B). (Мы могли бы также доказать это неравенство, рассматривая дизельную коцепь  $X$ , для которой  $|X| \leq 1$  и  $X \cdot \tilde{\varphi} > |\tilde{\varphi}| - \epsilon$ .) Чтобы доказать обратное

неравенство, возьмем произвольную дизъюнктивную цепь  $X$ , для которой  $|X| \leq 1$ . Тогда<sup>1)</sup>

$$|X \cdot \tilde{\varphi}| = \left| \int_{E^1} \bar{D}_X \varphi \right| \leq \int_{E^1} \langle \varphi \rangle,$$

что и дает нужный результат. Неравенства (5) очевидны.

Чтобы показать, что множество цепей  $\varphi$ , соответствующих непрерывным функциям  $\varphi$ , всюду плотно, нам нужно только найти цепь этого вида, сколь угодно близкую к произвольному одномерному симплексу  $\sigma = [t_1, t_2]$ . Пусть  $\varphi(t) = 0$  при  $t \leq t_1 - \varepsilon$  и при  $t \geq t_2 + \varepsilon$ ;  $\varphi(t) = 1$  при  $t_1 \leq t \leq t_2$ , и пусть функция  $\varphi$  линейна в двух оставшихся интервалах. Сравнивая для любой дизъюнктивной цепи  $X$  интеграл  $\int \bar{D}_X \varphi$  с  $X \cdot \sigma$ , мы видим, что цепь  $\tilde{\varphi}$  сколь угодно близка к  $\sigma$  [см. (V, 10.3)].

Покажем теперь, что граница гладкой одномерной цепи находится просто с помощью дифференцирования.

<sup>1)</sup> Очевидно, это — доказательство того же неравенства, а не обратного. Обратное доказывается следующим образом. Выберем конечное число неперекрывающихся отрезков  $I_1, I_2, \dots, I_m$ , обладающих тем свойством, что интеграл  $\int \langle \varphi \rangle$ , взятый по  $E^1 \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_m)$ , меньше  $\varepsilon/2$ .

На каждом отрезке  $I_i$  выберем такую функцию  $\psi_i$ , удовлетворяющую условию Липшица и обращающуюся в нуль на концах отрезка  $I_i$ , что  $|\psi_i| \leq 1$  и  $\int_{I_i} \psi_i(t) \varphi(t) dt \geq \int_{I_i} \langle \varphi \rangle - \frac{\varepsilon}{2m}$ . Наконец, положим

$$\bar{D}_X(t) = \begin{cases} \psi_i(t) & \text{при } t \in I_i, \\ 0 & \text{при } t \in E^1 \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_m). \end{cases}$$

Тогда  $\bar{D}_X$  есть ограниченная функция, удовлетворяющая условию Липшица, и потому  $\omega = \omega_0 \bar{D}_X$  есть дизъюнктивная форма (здесь  $\omega_0$  — единичный 1-ковектор в  $E^1$ ). Соответствующая этой форме одномерная дизъюнктивная цепь  $X$  [см. теорему (V, 10A)] удовлетворяет в силу (V, 10.4), (II, 3.2) и (I, 13.10) условию  $|X| = |\omega|_0 = |\omega| = |\bar{D}_X| \leq 1$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} X \cdot \tilde{\varphi} &= \int_{E^1} \bar{D}_X(t) \varphi(t) dt = \sum_i \int_{I_i} \psi_i(t) \varphi(t) dt \geq \\ &\geq \sum_i \int_{I_i} \langle \varphi \rangle - \frac{\varepsilon}{2} \geq \int_{E^1} \langle \varphi \rangle - \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом,  $|\tilde{\varphi}| \geq \int_{E^1} \langle \varphi \rangle - \varepsilon$ , и требуемое неравенство доказано. —

Прим. ред.

Теорема 1В. Если  $\varphi$  — гладкая суммируемая функция и производная  $\psi = d\varphi/dt$  суммируема, то<sup>1)</sup>

$$(6) \quad \partial\tilde{\varphi} = -\tilde{\psi}.$$

Прежде всего мы докажем, что

$$(7) \quad \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \varphi(t) = 0.$$

Если задано  $\varepsilon > 0$ , то выберем число  $b$  так, чтобы было  $\int_b^\infty \langle \psi \rangle < \varepsilon$ .

Тогда при  $b' > b$

$$|\varphi(b') - \varphi(b)| = \left| \int_b^{b'} \psi(t) dt \right| \leq \int_b^{b'} \langle \psi \rangle < \varepsilon;$$

поэтому  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$  существует. Так как функция  $\varphi$  суммируема, то этот предел равен нулю; аналогично при  $t \rightarrow -\infty$ .

Пусть теперь  $X$  — любая нульмерная коцепь с гладкой функцией  $D_X = w$ . Тогда, пользуясь формулой (V, 10.16), имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} D_X \psi &= \lim_{-a, b \rightarrow \infty} \int_a^b w \frac{d\varphi}{dt} = \\ &= \lim_{-a, b \rightarrow \infty} \left[ w(b) \varphi(b) - w(a) \varphi(a) - \int_a^b \frac{dw}{dt} \varphi \right] = \\ &= - \lim_{-a, b \rightarrow \infty} \int_a^b \bar{D}_{aX} \varphi = -dX \cdot \tilde{\varphi} = X \cdot (-\partial\tilde{\varphi}), \end{aligned}$$

что и доказывает (6)<sup>2)</sup>.

Нульмерная бемольная цепь, масса которой не является конечной, может не соответствовать суммируемой функции. Может существовать функция, простым образом связанная с данной цепью,

<sup>1)</sup> Равенство (6) следует понимать в том смысле, что существует нульмерная бемольная цепь, соответствующая [в смысле равенства (1)] функции  $\psi$ , и эта нульмерная цепь равна  $-\partial\tilde{\varphi}$  (см. определение границы бемольной цепи на стр. 218). — Прим. ред.

<sup>2)</sup> Надо воспользоваться следующим утверждением, легко вытекающим из теоремы (V, 13А): если  $A$  — нульмерная (бемольная, или дизная) цепь, то существует такая нульмерная коцепь  $X$  с гладкой функцией  $D_X$ , что  $X \cdot A \neq 0$ . — Прим. ред.

но эта цепь не обязательно будет однозначно определяться этой функцией. Рассмотрим, например, сначала функцию

$$\varphi_a(t) = \begin{cases} \ln t + a, & 0 < t < 1, \\ \ln(-t), & -1 < t < 0 \end{cases}$$

и  $\varphi_a(t) = 0$  во всех остальных точках. Эта функция суммируема, и хотя она и не является клеточно-непрерывной, она, очевидно, однозначно определяет некоторую одномерную бемольную цепь  $A_a = \tilde{\varphi}_a$ . Так как

$$\frac{d\varphi_a}{dt} = \frac{1}{t}, \quad 0 < |t| < 1,$$

то мы можем считать, что функции  $1/t$  ( $0 < |t| < 1$ ) соответствует любая из нульмерных цепей  $-\partial\tilde{\varphi}_a$ . Мы можем определить  $B_a = -\partial\tilde{\varphi}_a$  как предел последовательности нульмерных цепей  $B_{ai} = \tilde{\varphi}_{ai}$ , каждая из которых соответствует функции  $\varphi_{ai}$ , равной  $1/t$  на отрезке  $[-1, 1]$  всюду, кроме некоторого, зависящего от  $a$ , интервала  $Q_{ai}$  вокруг нуля, где  $\varphi_{ai} = 0$ . При  $a = 0$  мы можем взять интервалы с центром в нуле. Ср. (V, 5 (d)).

Существует распространение теоремы 1B на случай, когда функция  $\psi$  интегрируема по Данжуа от  $-\infty$  до  $+\infty$ ; ср. Сакс, гл. VIII, в частности теорема на стр. 355.

В теореме (IX, 15B) мы покажем, что одномерные бемольные цепи в  $E^1$  (в действительности  $n$ -мерные бемольные цепи в  $E^n$ ) взаимно однозначно соответствуют измеримым суммируемым функциям. Следует напомнить, что в этом случае бемольная норма совпадает с массой.

В следующих параграфах мы покажем, что нульмерные цепи (для которых бемольная и дизная нормы совпадают) конечной массы в  $E^1$  взаимно однозначно соответствуют нормализованным функциям ограниченной вариации (или, что эквивалентно, аддитивным функциям множества; см. гл. XI).

В гл. XI мы покажем, что  $r$ -мерные дизные цепи конечной массы в  $E^n$  взаимно однозначно соответствуют аддитивным функциям множества, значениями которых являются  $r$ -векторы; множество  $r$ -мерных бемольных цепей конечной массы соответствует некоторому подмножеству множества этих функций.

Предупреждение. При  $E^n \subset E^m$  ( $m > n$ ) могут существовать  $r$ -мерные дизные цепи  $\neq 0$  в  $E^n$  ( $r > n$ ), например  $r$ -мерные дизные цепи „в точке“; см. (VII, 7). Этого не может случиться для бемольной нормы; см. (VII, 9).

**2. Нульмерные цепи в  $E^1$ , определяемые функциями ограниченной вариации.** Цель нескольких следующих параграфов состоит в том, чтобы показать, что между нульмерными цепями (для которых бемольная и дизная нормы совпадают) и нормализованными функциями ограниченной вариации на действительной прямой  $E^1 = \mathfrak{A}$  существует взаимно однозначное соответствие; см. ниже теорему 5А.

Напомним некоторые факты, относящиеся к функциям ограниченной вариации. Пусть функция  $\gamma(t)$  определена для всех действительных  $t$ . Пусть  $t_0 < t_1 < \dots < t_m$  — заданное множество точек; рассмотрим выражение

$$\sum_{i=1}^m |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|;$$

*вариацией*  $|\gamma|$  функции  $\gamma$  называется верхняя грань множества всех таких сумм. Функция  $\gamma$  называется функцией *ограниченной вариации*, если вариация  $|\gamma|$  конечна. В этом случае функция  $\gamma$  непрерывна всюду за исключением, быть может, счетного множества точек; в этих последних точках существуют пределы справа и слева, а сумма скачков не превосходит  $|\gamma|$ .

Мы будем говорить, что функция  $\gamma$  *нормализована*, если

$$(1) \quad \gamma(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \gamma(t - \lambda) = \gamma(t) \text{ для всех } t.$$

Если функция  $\varphi$  ограничена и непрерывна, то существует однозначно определенное число  $\int_a^b \varphi d\gamma$ , интеграл от  $\varphi$  относительно  $\gamma$ ,

обладающее следующим свойством. Для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\zeta > 0$ , что если  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  и  $t_i - t_{i-1} < \zeta$  и  $t_{i-1} \leq t'_i \leq t_i$  для каждого  $i$ , то

$$\left| \int_a^b \varphi d\gamma - \sum_{i=1}^m \varphi(t'_i) [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] \right| < \varepsilon.$$

В качестве  $\int_a^b \varphi d\gamma$  мы можем или взять  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b \varphi d\gamma$ , или же воспользоваться данным выше определением, беря любое  $t_0 \leq a'$ , где  $a'$  достаточно велико; так же можно поступить в случае  $\int_a^\infty$  и  $\int_{-\infty}^a$ . Изменение нормализации функции  $\gamma$  не влияет на интеграл.

Мы говорим, что функции  $\gamma$  ограниченной вариации *соответствует* нульмерная цепь  $A$ , если (в отличие от определения в § 1)

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} D_X(t) d\gamma(t) = X \cdot A$$

для всех нульмерных коцепей  $X$ . Если производная  $\varphi(t) = d\gamma(t)/dt$  существует и непрерывна, то цепь  $A$  соответствует функции  $\varphi$ , как в (1.1). Очевидно, цепь  $A$  единственна.

Чтобы доказать существование цепи  $A$ , обозначим через  $\mathfrak{S}_k$  разбиение отрезка  $[-2^k, 2^k]$  на равные отрезки длины  $1/2^k$ . Для любого числа  $t$  пусть  $\bar{t}$  обозначает точку  $t$ , рассматриваемую в качестве нульмерной цепи. (Таким образом,  $t_2 - t_1$  есть число, а  $t_2 - \bar{t}_1$  — нульмерная цепь.) Положим

$$(3) \quad \begin{cases} A_k = \sum_{i=1}^{s_k} a_{ki} \bar{t}_{ki}, & t_{ki} = -2^k + \frac{i}{2^k}, \\ a_{ki} = \gamma(t_{ki}) - \gamma(t_{k,i-1}), & s_k = 2^{2k+1}. \end{cases}$$

Если  $\varphi(t)$  существует, то [в отличие от формулы (1.2), случай  $r=1$ ]

$$(4) \quad A_k = \sum_i a_{ki} \bar{t}_{ki}, \quad a_{ki} = \int_{t_{k,i-1}}^{t_{ki}} d\gamma = \int_{t_{k,i-1}}^{t_{ki}} \varphi(t) dt.$$

Обозначим через  $\bar{\gamma}(a, b)$  вариацию функции  $\gamma$  на отрезке  $[a, b]$ , т. е. верхнюю грань сумм, определяющих  $|\gamma|$ , при дополнительном ограничении  $a \leq t_0, t_m \leq b$ . Докажем, что

$$(5) \quad |A_l - A_k|^b \leq \bar{\gamma}(-\infty, -2^k) + \frac{|\gamma|}{2^k} + \bar{\gamma}(2^k, \infty), \quad l > k.$$

Запишем  $A_l = A_l^1 + A_l^2 + A_l^3$ , где  $A_l^1, A_l^2$  и  $A_l^3$  — части цепи  $A_l$ , лежащие соответственно слева от отрезка  $Q = [-2^k, 2^k]$ , на отрезке  $Q$  и справа от  $Q$ . Очевидно,

$$|A_l^1| \leq \bar{\gamma}(-\infty, -2^k), \quad |A_l^3| \leq \bar{\gamma}(2^k, \infty).$$

Возьмем типичный отрезок  $[t_{k,i-1}, t_{k,i}]$  из разбиения  $\mathfrak{S}_k$ , подразделенный на отрезки  $[t_{l,j-1}, t_{l,j}]$  из  $\mathfrak{S}_l$ . Обозначая через  $\sum_j^{(i)}$  сумму по всем таким значениям  $j$ , определим одномерные цепи

$$D_{kii} = \sum_j^{(i)} [\gamma(t_{l,j}) - \gamma(t_{l,j-1})] \bar{t}_{lj} \bar{t}_{ki}, \quad D_{kii} = \sum_i D_{kii}.$$

Тогда

$$\partial D_{kl} = [\gamma(t_{k,i}) - \gamma(t_{k,i-1})] \bar{t}_{kl} - \sum_j^{(i)} [\gamma(t_{l,j}) - \gamma(t_{l,j-1})] \bar{t}_{lj},$$

$$\partial D_{kl} = A_k - A_l^2.$$

Так как

$$|D_{kl}| \leq \sum_i \sum_j^{(i)} \frac{|\gamma(t_{l,j}) - \gamma(t_{l,j-1})|}{2^k} \leq \frac{|\gamma|}{2^k},$$

то мы находим, что сумма  $|A_k - A_l - \partial D_{kl}| + |D_{kl}|$  не превосходит правой части неравенства (5); таким образом, неравенство (5) доказано.

В силу (5) предел  $A = \lim^b A_k$  существует. Для любой цепи  $X$

$$(6) \quad X \cdot A_k = \sum_i a_{ki} (X \cdot \bar{t}_{ki}) = \sum_i D_X(t_{ki}) a_{ki};$$

по определению интеграла

$$X \cdot A = \lim_{k \rightarrow \infty} X \cdot A_k = \int_{-\infty}^{\infty} D_X d\gamma;$$

поэтому цепь  $A$  соответствует функции  $\gamma$ .

Пусть  $\gamma^\odot$  — нульмерная цепь, соответствующая функции  $\gamma$ . Мы докажем, что

$$(7) \quad |\gamma^\odot| = |\gamma|.$$

Если производная  $\varphi = d\gamma/dt$  существует и непрерывна, а  $\tilde{\varphi} = \gamma^\odot$  — соответствующая нульмерная цепь, то равенство (7) дает

$$(8) \quad |\tilde{\varphi}| = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt$$

[в соответствии с формулой (1.4) для одномерных цепей].

Так как в силу (6)

$$|X \cdot A_k| \leq |X| \sum_i |a_{ki}| \leq |X| |\gamma|,$$

то мы имеем  $|\gamma^\odot| \leq |\gamma|$ ; см. (V, 16.1).

Чтобы доказать обратное неравенство, прежде всего заметим, что ввиду нормализации (1)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \int_{a-\lambda}^{b-\lambda} d\gamma = \int_a^b d\gamma = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Допустим, что  $\xi_\lambda(t) = 1$  при  $a \leq t \leq b - 2\lambda$ ,  $\xi_\lambda(t) = 0$  при  $t \leq a - \lambda$  и при  $t \geq b - \lambda$  и что функция  $\xi_\lambda$  линейна в двух остающихся интервалах. Тогда из написанного выше равенства, очевидно, следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_\lambda(t) d\gamma(t) = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Если теперь задано  $\varepsilon > 0$ , то выберем точки  $t_0 < t_1 < \dots < t_m$  так, чтобы было

$$\sum_{i=1}^m |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| > |\gamma| - \varepsilon.$$

Для достаточно малого  $\lambda$  определим на каждом отрезке  $[t_{i-1} - \lambda, t_i - \lambda]$  функцию  $\xi_\lambda$ , совпадающую с определенной выше, если  $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \geq 0$ , и отличающуюся от нее знаком в противном случае; положим  $\xi_\lambda = 0$  во всех остальных точках. Функция  $\xi_\lambda$  определяет нульмерную коцепь  $X_\lambda$ , для которой  $|X_\lambda| = 1$ . Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} X_\lambda \cdot \gamma^\odot = \sum_{i=1}^m [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})];$$

отсюда следует, что  $|\gamma^\odot| > |\gamma| - \varepsilon$ , и поэтому  $|\gamma^\odot| \geq |\gamma|$ . Это завершает доказательство равенства (7).

**3. Умножение нульмерных цепей на диезные функции.** Мы определим цепь  $\varphi A$  для любой диезной функции  $\varphi$  (V, 4) и любой нульмерной цепи  $A$  в  $E^n$ ; случай  $r$ -мерных цепей рассмотрен в (VII, 1). Будут выполняться следующие неравенства:

$$(1) \quad |\varphi A| \leq |\varphi| |A|,$$

$$(2) \quad |\varphi A|^b \leq (|\varphi| + \mathfrak{L}_\varphi) |A|^b.$$

Эта операция будет билинейной.

Прежде всего для любой полиэдральной цепи  $\sum a_i p_i$  положим

$$(3) \quad \varphi \sum a_i p_i = \sum \varphi(p_i) a_i p_i;$$

очевидно, неравенство (1) выполняется. Чтобы доказать (2) для цепи  $A = \sum a_i p_i$ , выберем для заданного  $\varepsilon > 0$  цепь  $D$  так, чтобы было

$$|A - \partial D| + |D| < |A|^b + \varepsilon.$$

Пусть, например,  $D = \sum d_j(p'_j p''_j)$ , где отрезки  $p'_j p''_j$  не перекрываются. Положим

$$D' = \sum \varphi(p''_j) d_j(p'_j p''_j).$$

Теперь

$$A - \partial D = \sum a_i p_i - \sum d_j p''_j + \sum d_j p'_j,$$

$$\begin{aligned} \varphi A - \partial D' &= \sum \varphi(p_i) a_i p_i - \sum \varphi(p''_j) d_j p''_j + \sum \varphi(p'_j) d_j p'_j + \\ &\quad + \sum [\varphi(p''_j) - \varphi(p'_j)] d_j p'_j. \end{aligned}$$

Первые три суммы в правой части последнего равенства равны просто  $\varphi(A - \partial D)$ . Поэтому, пользуясь неравенством (1), имеем

$$\begin{aligned} |\varphi A - \partial D'| + |D'| &\leq |\varphi| |A - \partial D| + \mathfrak{L}_\varphi |D| + |\varphi| |D| \leq \\ &\leq (|\varphi| + \mathfrak{L}_\varphi) (|A|^b + \varepsilon), \end{aligned}$$

и неравенство (2) доказано.

Пусть теперь  $A$  — произвольная нульмерная цепь. Пусть, скажем,  $A = \lim^b A_k$ , где  $A_k$  — полиэдральные цепи. Положим  $\varphi A = \lim^b \varphi A_k$ . В силу (2) этот предел существует и не зависит от выбора последовательности. Теперь уже неравенство (2) выполняется в общем случае. Мы можем допустить, что  $\overline{\lim} |A_k| \leq |A|$ ; применяя неравенство (1) к каждому произведению  $\varphi A_k$ , мы получаем на основании (V, 16.1) неравенство (1) для цепи  $\varphi A$ .

В качестве дальнейшего следствия неравенства (2) мы находим, что если  $\lim^b A_k = A$  (цепи  $A_k$  не предполагаются полиэдральными), то  $\lim^b \varphi A_k$  существует и

$$(4) \quad \lim^b \varphi A_k = \varphi \lim^b A_k.$$

Мы установим условие, при котором масса суммы двух нульмерных цепей равна сумме их масс; относительно обобщения см. (VII, 3.22). *Носитель*  $\text{spt}(\psi)$  функции  $\psi$  есть замыкание множества точек, в которых  $\psi$  отлична от нуля.

**Лемма 3а.** Для любых дизъюнктивных функций  $\psi_1, \psi_2$  и любой нульмерной цепи  $A$  в  $E^n$

$$(5) \quad |(\psi_1 + \psi_2)A| = |\psi_1 A| + |\psi_2 A|, \quad \text{если } \rho(\text{spt}(\psi_1), \text{spt}(\psi_2)) > 0.$$

Мы предположим, что массы  $|\psi_1 A|$  и  $|\psi_2 A|$  конечны; в противном случае нужно лишь слегка изменить доказательство.

Пусть задано  $\varepsilon > 0$ ; выберем  $X_1, X_2$  так, чтобы было

$$|X_i| \leq 1, \quad X_i \cdot \psi_i A \geq |\psi_i A| - \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Определение цепей  $\psi_i A$  показывает, что если мы изменим  $D_{X_i}$  вне множества  $Q_i = \text{spt}(\psi_i)$ , то произведение  $X_i \cdot \psi_i A$  не изменится. Поэтому мы можем считать, что  $D_{X_i} = 0$  вне некоторого множества  $Q'_i$ , причем  $Q'_1 \cap Q'_2 = 0$ . Теперь  $D_{X_1}$  и  $D_{X_2}$  вместе образуют дизъюнктивную функцию и поэтому определяют некоторую нульмерную коцепь  $X$ , для которой

$$|X| \leq 1, \quad X_i \cdot \psi_i A = X_i \cdot \psi_i A \quad (i = 1, 2).$$

Следовательно,

$$X \cdot (\psi_1 + \psi_2) A \geq |\psi_1 A| + |\psi_2 A| - 2\varepsilon,$$

и неравенство  $\geq$  в (5) установлено. Обратное неравенство очевидно, и лемма доказана.

**4. Часть цепи конечной массы.** Если заданы нульмерная цепь  $A$  конечной массы в  $E^1$  и некоторое число  $T$ , то мы можем определить «часть  $A_T$  цепи  $A$ , которая  $< T$ ». Часть  $r$ -мерной цепи конечной массы (определенной в  $E^n$ ), лежащую в заданном борелевском множестве, мы определим в (XI, 13).

Пример (а). Пусть  $A = \bar{T}$  (обозначения см. в § 2). Тогда, естественно, часть цепи  $A$ , которая  $< T$ , равна нулю, в то время как часть, которая  $\leq T$ , равна  $A \neq 0$ . Если  $A$  — непрерывная цепь (§ 1), то из приводимого ниже определения легко видеть, что часть  $< T$  равна части  $\leq T$ .

Пример (б). Пусть  $A$  — нульмерная цепь примера (с) из (V, 5). Мы не можем определить часть  $A_0$ , потому что она должна была бы состоять из  $-\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i$ , а этот ряд расходится.

Пример (с). Пусть  $A'_i$  — цепь, определенная в (V, 5(с)). Положим  $A' = \lim_{i \rightarrow \infty} A'_i$ ; тогда  $A' = 0$ , так что  $(A')_0 = 0$ . Мы не могли бы определить  $(A')_0$  как  $\lim_{i \rightarrow \infty} (A'_i)_0$ , потому что  $(A'_i)_0 = \sigma_i$  и  $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_i = \bar{0}$ .

При фиксированном  $T$  определим непрерывные функции  $\varphi_0, \varphi_1, \dots$  следующим образом:

$$(1) \quad \varphi_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq T - \frac{2}{4^i}, \\ 0 & \text{при } t \geq T - \frac{1}{4^i}, \end{cases}$$

и функция  $\varphi_i(t)$  линейна в остающемся интервале. Положим

$$(2) \quad A_T = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i A.$$

Чтобы доказать существование и установить свойства цепи  $A_T$ , определим функции

$$(3) \quad \varphi'_0(t) = \varphi_0(t), \quad \varphi'_i(t) = \varphi_i(t) - \varphi_{i-1}(t) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Поскольку  $\text{spt}(\varphi'_0)$ ,  $\text{spt}(\varphi'_2)$ ,  $\text{spt}(\varphi'_4)$ , ... попарно не пересекаются, так же как и  $\text{spt}(\varphi'_1)$ ,  $\text{spt}(\varphi'_3)$ , ..., то, несколько раз применяя лемму 3а, получаем

$$|(\varphi'_0 + \varphi'_2 + \dots + \varphi'_{2j})A| = |\varphi'_0 A| + |\varphi'_2 A| + \dots + |\varphi'_{2j} A|,$$

$$|(\varphi'_1 + \varphi'_3 + \dots + \varphi'_{2j+1})A| = |\varphi'_1 A| + |\varphi'_3 A| + \dots + |\varphi'_{2j+1} A|.$$

Далее, так как  $\sum \varphi'_i(t) \leq 1$ , то неравенство (3.1) показывает, что каждая из левых частей в написанных выше равенствах  $\leq |A|$ . Следовательно,

$$|\varphi'_0 A| + |\varphi'_1 A| + \dots + |\varphi'_i A| \leq 2|A| \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, ряд из масс сходится, и поэтому

$$(4) \quad |\varphi_j A - \varphi_i A| \leq |\varphi'_{i+1} A| + \dots + |\varphi'_j A| \rightarrow 0,$$

чем доказано существование цепи  $A_T$ ; в действительности  $\lim |A_T - \varphi_i A| = 0$ .

Установим некоторые свойства цепи  $A_T$ :

$$(5) \quad |A_T| + |A - A_T| = |A|,$$

$$(6) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0+} A_{T-\lambda} = A_T,$$

$$(7) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} |A'_T| = 0, \quad \text{где} \quad A'_T = A_{-T} + (A - A_T).$$

Для любого  $i$  множества  $\text{spt}(\varphi_i)$  и  $\text{spt}(1 - \varphi_{i+1})$  не пересекаются. Кроме того,  $\varphi_i + (1 - \varphi_{i+1}) \leq 1$ . Поэтому лемма 3а и неравенство (3.1) дают

$$|\varphi_i A| + |(1 - \varphi_{i+1}) A| = |(\varphi_i + 1 - \varphi_{i+1}) A| \leq |A|.$$

При  $i \rightarrow \infty$  получаем в (5) неравенство  $\leq$ ; обратное неравенство очевидно.

Если задано  $\varepsilon > 0$ , то выберем  $i$  так, чтобы было  $|\varphi_j A - \varphi_i A| < \varepsilon/2$  для всех  $j > i$ . Затем возьмем любое  $T' = T - \lambda$ ,  $0 < \lambda < 1/4^i$ . Выберем номер  $j$ , для которого  $T' < T - 2/4^i$ . В таком случае при любом  $k$ , для которого  $T' - 2/4^k \geq T - 1/4^i$ , мы будем

иметь (если функции  $\varphi'_k$  определены для  $T'$  так же, как функции  $\varphi_i$  были определены для  $T$ )

$$\varphi'_k \varphi_i = \varphi_i, \quad \varphi'_k \varphi_j = \varphi'_k;$$

поэтому на основании теоремы (V, 16B)

$$|(\varphi'_k - \varphi_i)A| = |\varphi'_k[(\varphi_j - \varphi_i)A]| \leq |(\varphi_j - \varphi_i)A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|A_{T'} - \varphi_i A| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |(\varphi'_k - \varphi_i)A| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Кроме того,  $|\varphi_i A - A| \leq \varepsilon/2$ ; следовательно,  $|A_{T'} - A| \leq \varepsilon$ , и равенство (6) доказано.

Выберем  $\zeta$  так, чтобы из неравенства  $|A - A'|^b \leq \zeta$  следовало  $|A'| \geq |A| - \varepsilon$  (V, теорема 16B). Выберем полиэдральную цепь  $B$ , для которой  $|A - B|^b \leq \zeta/3$ , и функцию  $\varphi$  с ограниченным носителем  $\text{spt}(\varphi)$ , удовлетворяющую следующим условиям:  $|\varphi| = 1$ ,  $\mathfrak{L}_\varphi \leq 1$ ,  $\varphi = 1$  на  $B$ ; тогда

$$|\varphi A - B|^b = |\varphi(A - B)|^b \leq (|\varphi| + \mathfrak{L}_\varphi)|A - B|^b \leq \frac{2\zeta}{3}.$$

Поэтому

$$|\varphi A - A|^b \leq \zeta, \quad |\varphi A| \geq |A| - \varepsilon.$$

Возьмем теперь любое число  $T$ , для которого  $\text{spt}(\varphi) \subset (-T, T-2)$ . Если, как прежде,  $A_{-T} = \lim \varphi'_i A$ ,  $A_T = \lim \varphi_i A$ , то

$$A'_T = \lim \psi_i A, \quad \psi_i = \varphi'_i + (1 - \varphi_i).$$

Теперь в силу леммы 3а

$$|\psi_i A| + |\varphi A| = |(\psi_i + \varphi)A| \leq |A|,$$

и поэтому  $|\psi_i A| \leq \varepsilon$  для всех  $i$ . Следовательно,  $|A'_T| \leq \varepsilon$ , и (7) доказано.

Отметим одно обобщение свойства (5): пусть

$$(8) \quad t_0 < \dots < t_m, \quad A_i^* = A_{t_i} - A_{t_{i-1}} \quad (i = 1, \dots, m);$$

тогда

$$(9) \quad |A| = |A_{t_0}| + |A_1^*| + \dots + |A_m^*| + |A - A_{t_m}|.$$

В самом деле, очевидно,  $(A_{t_i})_{t_{i-1}} = A_{t_{i-1}}$ , и поэтому из (5) получаем

$$|A_{t_i}| = |A_{t_{i-1}}| + |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|;$$

комбинируя это с равенством (5) при  $T = t_m$ , получаем (9).

**5. Функции ограниченной вариации в  $E^1$ , определяемые нульмерными цепями.** Для данной нульмерной цепи  $A$  конечной массы в  $E^1$  соответствующую функцию  $\gamma_A$  мы определим условием

$$(1) \quad \gamma_A(t) = I^0 \cdot A_t,$$

где  $I^0$  — единичная нульмерная коцепь:  $I^0 \cdot t = 1$ . Прежде всего мы покажем, что  $\gamma_A$  есть функция ограниченной вариации. Возьмем произвольные точки  $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ ; тогда из (4.9) получаем

$$\sum_{i=1}^m |\gamma_A(t_i) - \gamma_A(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^m |I^0 \cdot A_i^*| \leq \sum_{i=1}^m |A_i^*| \leq |A|;$$

поэтому  $|\gamma_A| \leq |A|$ . Мы докажем, что цепь  $A$  соответствует функции  $\gamma_A$  (§ 2); отсюда будет следовать, что  $|\gamma_A| = |A|$ .

Нам понадобится лемма, сравнивающая цепь вблизи точки с цепью, „сжатой“ в точку; ср. ниже (VII, 7.2).

**Лемма 5а.** Пусть  $C = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k$ , где  $C_k$  — нульмерные полиэдральные цепи, лежащие в отрезке  $[t', t'']$ , и пусть  $t' \leq t \leq t''$ . Тогда

$$(2) \quad |C - (I^0 \cdot C)\bar{t}|^b \leq N(t'' - t'), \quad N = \lim_{k \rightarrow \infty} |C_k|.$$

Пусть, скажем,  $C_k = \sum_i c_{ki} \bar{t}_{ki}$ ,  $\sum_i |c_{ki}| \leq N + \varepsilon_k$ ,  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ . Положим  $\sigma_{ki} = \bar{t}_{ki} \bar{t}$ . Тогда, так как  $I^0 \cdot C_k = \sum_i c_{ki}$ , то

$$C_k - (I^0 \cdot C_k)\bar{t} = -\partial \sum_i c_{ki} \sigma_{ki} + [I^0 \cdot (C_k - C)]\bar{t},$$

$$\begin{aligned} |C_k - (I^0 \cdot C_k)\bar{t}|^b &\leq \sum_i |c_{ki}| |\sigma_{ki}| + |I^0 \cdot (C_k - C)| \leq \\ &\leq (N + \varepsilon_k)(t'' - t') + |C_k - C|^b; \end{aligned}$$

при  $k \rightarrow \infty$  мы получаем (2). (Взяв подпоследовательность, мы видим, что верхний предел можно заменить нижним пределом.)

Теперь, пользуясь обозначениями (4.8), мы докажем, что

$$(3) \quad |A_i^* - (I^0 \cdot A_i^*)\bar{t}_i|^b \leq |A_i^*|(t_i - t_{i-1}).$$

Пусть, скажем,  $A_{t_k} = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{kj} A$  ( $\varphi_{kj}$  аналогичны прежним функциям  $\varphi_i$ ); тогда

$$A_i^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{ij}^* A, \quad \varphi_{ij}^* = \varphi_{ij} - \varphi_{i-1,j}.$$

Пусть  $\psi_\lambda(t) = 1$  при  $t_{i-1} - \lambda \leq t \leq t_i$ ,  $\psi_\lambda(t) = 0$  при  $t \leq t_{i-1} - 2\lambda$  и  $t \geq t_i + \lambda$ , и пусть функция  $\psi_\lambda(t)$  линейна в остающихся интерва-

лах. Тогда  $\psi_\lambda \varphi_{ij}^* = \varphi_{ij}^*$  при достаточно большом  $j$ ; поэтому в силу (3.4)

$$A_i^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{ij}^* A = \lim_{j \rightarrow \infty} \psi_\lambda \varphi_{ij}^* A = \psi_\lambda A_i^*.$$

Выберем полиэдральные цепи  $A_{ij}^*$  так, чтобы было

$$A_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{ik}^*, \quad |A_{ik}^*| < |A_i^*| + \varepsilon_k, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0;$$

тогда, снова пользуясь (3.4), а затем (3.1), получаем

$$A_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_\lambda A_{ik}^*, \quad |\psi_\lambda A_{ik}^*| < |A_i^*| + \varepsilon_k.$$

Так как цепь  $\psi_\lambda A_{ik}^*$  лежит в интервале  $(t_{i-1} - 2\lambda, t_i + \lambda)$ , то лемма 5а дает

$$|A_i^* - (I^0 \cdot A_i^*) \bar{t}_i|^b \leq |A_i^*| (t_i - t_{i-1} + 3\lambda).$$

Поскольку  $\lambda$  произвольно, неравенство (3) доказано.

Пусть  $B$  — нульмерная цепь, соответствующая функции  $\gamma_A$ . Чтобы доказать, что  $B = A$ , возьмем любое  $\varepsilon > 0$ . В силу результатов из § 2 и в силу (4.7) мы можем выбрать  $k$  таким образом, чтобы было верно следующее. Пусть  $t_0 = -2^k$ ,  $t_1 = -2^k + 1/2^k$ , ...,  $t_m = 2^k$ , как в § 2, и пусть  $B'$  — соответствующая нульмерная полиэдральная цепь. Тогда

$$|B' - B|^b < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |A'_{2^k}| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{|A|}{2^k} < \frac{\varepsilon}{3},$$

где  $A'_{2^k}$  определяется, как в (4.7). По определению цепи  $B'$

$$B' = \sum_{i=1}^m b_i \bar{t}_i, \quad b_i = \gamma_A(t_i) - \gamma_A(t_{i-1}) = I^0 \cdot A_i^*.$$

Поэтому

$$A - B' = A_{t_0} + \sum_{i=1}^m (A_i^* - b_i \bar{t}_i) + (A - A_{t_m}),$$

и в силу (3) и (4.9)

$$|A - B'|^b \leq |A_{t_0}| + \sum_{i=1}^m |A_i^*| (t_i - t_{i-1}) + |A - A_{t_m}| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Таким образом,  $|A - B|^b < \varepsilon$  и, следовательно,  $A = B$ .

**Теорема 5А.** Между нульмерными цепями  $A$  конечной массы в  $E^1$  и нормализованными функциями  $\gamma_A$  ограниченной вариации существует взаимно однозначное линейное соответствие, определяемое соотношением (2.2); мы имеем

$$(4) \quad |\gamma_A| = |A|.$$

Для данной цепи  $A$  функция  $\gamma_A$  определяется, как указано выше; эта функция в силу (4.6) и (4.7) нормализована. Это соответствие, очевидно, взаимно однозначно и линейно. Равенство (4) следует из (2.7).

**6. Некоторые теоремы анализа.** Прежде всего мы приведем аналитическую формулировку некоторых предыдущих теорем. Пусть  $M$  — линейное пространство нормализованных функций ограниченной вариации в  $E^1$ ; в качестве нормы можно пользоваться вариацией. Другой нормой в  $M$  является *диезная норма*, определяемая соотношением

$$(1) |\gamma|^\# = \sup \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} D_X d\gamma : X \text{ — диезные коцепи, } |X|^\# \leq 1 \right\}.$$

(Так как  $r=0$ , то „бемольная норма“ совпадает с „диезной“.) В силу теоремы 5А и соотношения (2.2)

$$(2) |\gamma_A|^\# = |A|^\# = |A|^b.$$

Теперь формула (V, 4.1) вместе с теоремой 5А и теоремой (V, 4В) дают:

**Теорема 6А.** *Пространство  $S$  действительных диезных функций, определенных в  $E^1$ , является сопряженным к пространству  $M$  с диезной нормой.*

Следующая теорема утверждает, что, обратно,  $M$  есть пространство линейных функций, определенных в  $S$  и удовлетворяющих некоторому условию непрерывности.

**Теорема 6В.** *Пусть  $\Lambda$  — произвольная действительная линейная функция, определенная в пространстве  $S$  и обладающая следующим свойством: если  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — любая такая последовательность функций, являющихся элементами пространства  $S$ , что*

- (а)  $|\varphi_i| \leq N$  (для всех  $i$ ) при некотором  $N$ ,
- (б)  $\varphi_i(p) \rightarrow 0$  равномерно на всех компактных подмножествах пространства  $E^1$ ,

*то  $\lim \Lambda(\varphi_i) = 0$ . Тогда существует единственная функ-*

*ция  $\gamma \in M$ , для которой  $\Lambda(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi d\gamma$  для всех  $\varphi \in S$ . При*

*этом мы имеем*

$$(3) |\gamma| = \sup \{ \Lambda(\varphi) : |\varphi| \leq 1 \}.$$

Эта теорема представляет собой случай  $n = 1$  леммы (XI, 7b). См. также теорему (XI, 8B).

Возьмем любую нульмерную цепь  $A$  конечной массы и положим  $\Lambda_A(D_X) = X \cdot A$ . Пользуясь (4.7), мы легко находим, что функция  $\Lambda_A$  удовлетворяет условию теоремы; поэтому существует функция  $\gamma_A$ , для которой  $X \cdot A = \int_{-\infty}^{\infty} D_X d\gamma_A$ . Таким образом, мы имеем другое доказательство теоремы 5A. Ср. (XI, теорема 11A).

Рассмотрим пространство  $M'$  нормализованных функций ограниченной вариации, определенных на отрезке  $[0, 1]$ , с вариацией в качестве нормы, и пространство  $C'$  непрерывных функций  $\varphi$ , определенных на отрезке  $[0, 1]$ , с нормой  $|\varphi|$ . Тогда, в отличие от ситуации, описанной в теореме 6B, можно показать, что  $M'$  является пространством, сопряженным к  $C'$ . Это — известная теорема Ф. Рисса (см. Банах, стр. 61<sup>1)</sup>).

**7. Непрерывные  $r$ -мерные цепи в  $E^n$ .** Мы следующим образом обобщим определение, данное в § 1. Пусть  $\alpha$  — функция, клеточно-непрерывная в пространстве  $E^n$ , значениями которой являются  $r$ -векторы<sup>2)</sup>. Мы говорим, что функция  $\alpha$  *суммируема*, если интеграл  $\int \langle \alpha \rangle_0$  конечен, или, что то же самое, если конечен интеграл  $\int \langle \alpha \rangle$ , или же, если интеграл  $\int \langle \alpha^\lambda \rangle$  конечен для каждого  $\lambda$  ( $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ ). Мы говорим, что клеточно-непрерывной суммируемой функции  $\alpha$  *соответствует* бемольная  $r$ -мерная цепь  $A$ , если (мы пользуемся интегралом Римана)

$$(1) \quad \int_{E^n} D_X(p) \cdot \alpha(p) dp = X \cdot A \text{ для всех } r\text{-мерных дизельных}$$

коцепей  $X$ .

Ниже мы докажем, что цепь  $A$  существует; в силу теоремы (V, 13B) она единственна. Обозначим ее через  $\tilde{\alpha}$ ; мы будем называть ее *непрерывной цепью*. Мы докажем, кроме того, что

$$(2) \quad |\tilde{\alpha}| = \int_{E^n} \langle \alpha \rangle_0.$$

Имеются более общие теоремы; см. теорему (IX, 15A) и теорему (XI, 14A).

<sup>1)</sup> См. Банах С., Курс функционального анализа, Київ, 1948, стр. 51. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Такие функции в дальнейшем часто называются просто  $r$ -вектор-функциями. — *Прим. перев.*

Мы пользуемся в (1) только дизными коцепями  $X$  ввиду того, что доказательство существования формы  $D_X$  (V, 10) в этом случае сравнительно просто и этих цепей достаточно для определения цепи  $\tilde{\alpha}$ .

При  $r=0$  определение превращается в определение из § 1 (для  $n=1$ ). При  $r=n$  мы можем написать  $\alpha(p) = \varphi(p)\alpha_0$ , где  $\alpha_0$  — единичный  $n$ -вектор; тогда  $\int D_X \cdot \alpha = \int \varphi \bar{D}_X$ , и равенство (1) снова сводится к (1.1) (если  $n=1$ ).

Если при  $r=n$  мы будем рассматривать все измеримые суммируемые  $n$ -вектор-функции  $\alpha$ , то мы получим все  $n$ -мерные бемольные цепи (IX, теорема 15B). При  $r < n$  всех  $r$ -мерных цепей мы не получим; например, мы не получим никаких  $r$ -мерных полиэдральных цепей и никаких  $r$ -мерных цепей бесконечной массы. Однако мы получим некоторое множество цепей, которое всюду плотно (теорема 7A). Если вместо  $r$ -вектор-функций  $\alpha$  мы рассмотрим аддитивные функции множества, значениями которых являются  $r$ -векторы, то мы аналогичным образом получим все  $r$ -мерные цепи конечной массы (бемольные или дизные); см. теорему (XI, 11A), которая обобщает теорему 5A.

Чтобы выразить  $\tilde{\alpha}$  через  $\alpha$ , рассмотрим прежде всего следующий частный случай. Пусть  $Q$  — некоторый  $n$ -мерный куб с  $r$ -мерной ориентированной гранью  $Q''$  и дополнительной  $(n-r)$ -мерной гранью  $Q'$ . Пусть  $\alpha$  — функция, равная  $r$ -направлению грани  $Q''$  в  $Q$  и равная нулю вне  $Q$ . Для каждой точки  $q \in Q'$  пусть  $P(q)$  — ориентированный  $r$ -мерный куб в  $Q$ , проходящий через  $q$  и образованный параллельным переносом грани  $Q''$ . Тогда для любой  $r$ -мерной дизной коцепи  $X$  соотношение (V, 10.3) показывает, что

$$(3) \quad \int_Q D_X(p) \cdot \alpha dp = \int_{Q'} \int_{P(q)} D_X(p) \cdot \alpha dp dq = \int_{Q'} X \cdot P(q) dq.$$

Пусть  $\mathfrak{E}$  — подразделение грани  $Q'$  на клетки  $Q'_1, \dots, Q'_m$ , имеющие степень мелкости  $\leq \eta$  (П. II, 3). Выберем некоторые точки  $q'_i \in Q'_i$  и положим

$$(4) \quad A(\mathfrak{E}) = \sum_i |Q'_i| P(q'_i);$$

это — цепь, аппроксимирующая цепь  $\tilde{\alpha}$ . Мы покажем, что для любой дизной коцепи  $X$

$$(5) \quad \left| \int_Q D_X(p) \cdot \alpha dp - X \cdot A(\mathfrak{E}) \right| \leq |X|^b (|Q''| + |\partial Q''|) |Q'| \eta.$$

Для любой точки  $q \in Q'_i$  неравенство (V, 3.6) дает

$$|P(q) - P(q'_i)|^b \leq b\eta, \quad b = |Q''| + |\partial Q''|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_Q D_X(p) \cdot \alpha \, dp - X \cdot A(\mathfrak{S}) \right| &= \left| \sum_i \int_{Q'_i} X \cdot [P(q) - P(q'_i)] \, dq \right| \leq \\ &\leq \sum |X|^b b\eta |Q'_i| = |X|^b b |Q'| \eta. \end{aligned}$$

**Теорема 7А.** *Существует взаимно однозначное линейное отображение пространства клеточно-непрерывных суммируемых  $r$ -вектор-функций  $\alpha$  в пространство соответствующих  $r$ -мерных бемольных цепей  $\tilde{\alpha}$ ; имеет место соотношение (2). Множество образов  $\tilde{\alpha}$  для непрерывных функций  $\alpha$  плотно в  $C_r^b$ , а поэтому (V, теорема 14В) также и в  $C_r^\#$ .*

Если дана  $r$ -вектор-функция  $\alpha$ , которую мы в настоящий момент предположим непрерывной, то мы следующим образом выберем фундаментальную последовательность  $A_1, A_2, \dots$  полиэдральных  $r$ -мерных цепей, которая будет определять  $\alpha$ . Возьмем любые  $k$  и  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_r)$ . Мы можем найти куб  $Q$  с ребрами, параллельными выбранному множеству осей, для которого

$$\int_{E^n \setminus Q} \langle \alpha^\lambda \rangle < \varepsilon'_k = \frac{1}{3 \cdot 2^k \binom{n}{r}} \text{ для всех } \lambda.$$

Так как функция  $\alpha^\lambda$  равномерно непрерывна в  $Q$ , то мы можем разбить  $Q$  на кубы  $Q_1, \dots, Q_m$  и определить функцию  $\beta_k^\lambda$ , постоянную в каждом кубе  $Q_i$  и равную нулю вне  $Q$ , так, чтобы

$$\int_{E^n} \langle \beta_k^\lambda - \alpha^\lambda \rangle < 2\varepsilon'_k \text{ для всех } \lambda.$$

Неравенство (5) показывает, что для каждого куба  $Q_i$  мы можем определить  $r$ -мерную полиэдральную цепь  $B_{ki}^\lambda$  в  $Q_i$  так, чтобы для любой диезной коцепи  $X$  было выполнено неравенство

$$\left| \int_{Q_i} D_X \cdot \beta_k^\lambda e_\lambda - X \cdot B_{ki}^\lambda \right| \leq |X|^b \frac{\varepsilon'_k}{m}.$$

Поэтому, полагая  $B_k^\lambda = \sum_i B_{ki}^\lambda$ ,  $B_k = \sum_{(\lambda)} B_k^\lambda$ , мы находим

$$\begin{aligned} \left| \int_{E^n} D_X \cdot \alpha^\lambda e_\lambda - X \cdot B_k^\lambda \right| &\leq \int_{E^n} \langle D_X \rangle_0 \langle \alpha^\lambda - \beta_k^\lambda \rangle + \\ &+ \sum_i \left| \int_{Q_i} D_X \cdot \beta_k^\lambda e_\lambda - X \cdot B_{ki}^\lambda \right| \leq \\ &\leq 2 |X| \varepsilon'_k + \sum_i |X|^b \frac{\varepsilon'_k}{m} \leq 3 |X|^b \varepsilon'_k. \end{aligned}$$

$$(6) \quad \left| \int_{E^n} D_X \cdot \alpha - X \cdot B_k \right| \leq \frac{|X|}{2^k}.$$

Возьмем любые целые положительные числа  $k$  и  $l$ ,  $k < l$ . Тогда неравенство (6) дает

$$|X \cdot (B_l - B_k)| \leq \frac{2 |X|^b}{2^k}.$$

и формула (V, 13.13) показывает, что

$$(7) \quad |B_l - B_k|^b \leq \frac{1}{2^{k-1}}, \quad l > k.$$

Следовательно, предел  $A = \lim^b B_k$  существует. В силу (6) имеет место равенство (1); поэтому цепь  $A = \tilde{\alpha}$  соответствует  $r$ -вектор-функции  $\alpha$ . Если  $r$ -вектор-функция  $\alpha$  не непрерывна, то нам нужно только выбрать непрерывную  $r$ -вектор-функцию  $\alpha_k$  так, чтобы было  $\int \langle \alpha_k - \alpha \rangle 1/2^k$ , найти цепь  $B_k$ , соответствующую, как и выше, функции  $\alpha_k$ , и т. д.

Замечание. В терминологии параграфа (VII, 7) мы можем построить аппроксимацию для цепи  $\tilde{\alpha}$  следующим образом. Для достаточно большого куба  $Q$ , подразделенного на достаточно малые кубы  $Q_i$ , выберем точки  $q_i \in Q_i$ , обозначим через  $(\beta, q)$  диэзную цепь в точке  $q$ , соответствующую  $r$ -вектору  $\beta$ , и положим

$$(8) \quad B = \sum |Q_i| (\alpha(q_i), q_i).$$

Последовательность таких цепей будет сходиться к  $\tilde{\alpha}$  в диэзной норме.

Отображение  $\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}$ , очевидно, взаимно однозначно и линейно. Чтобы показать, что множество цепей  $\tilde{\alpha}$ , соответствующих непрерывным  $\alpha$ , всюду плотно, достаточно убедиться в том, что для

любого  $r$ -мерного ориентированного симплекса  $\sigma$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такая непрерывная  $r$ -вектор-функция  $\alpha$ , что

$$\left| \int D_X \cdot \alpha - X \cdot \sigma \right| \leq |X|^b \varepsilon$$

для любой дизъюнктной коцепи  $X$ , так как из этого неравенства следует  $|\tilde{\alpha} - \sigma|^b \leq \varepsilon$ . Выберем какую-либо  $(n-r)$ -мерную клетку  $Q'$ , проходящую через точку  $q_0 \in \sigma$  ортогонально к  $\sigma$ . Симплексы  $\sigma(q) = T_{q-q_0}\sigma$  для  $q \in Q'$  образуют клетку  $Q$ . Возьмем клетку  $Q'$  настолько малой, чтобы было

$$|\sigma(q) - \sigma|^b < \frac{\varepsilon}{2}, \quad q \in Q'.$$

Тогда (ср. проведенное выше доказательство), если  $\beta = \{\sigma\}/|Q|$  в  $Q$  и  $\beta = 0$  в  $E^n \setminus Q$ , то

$$\left| \int D_X \cdot \beta - X \cdot \sigma \right| = \left| \int_{Q'} \frac{1}{|Q'|} X \cdot [\sigma(q) - \sigma] \right| \leq \frac{|X|^b \varepsilon}{2}.$$

Мы можем выбрать такую непрерывную  $r$ -вектор-функцию  $\alpha$  в  $E^n$ , что  $\int \langle \beta - \alpha \rangle_0 < \varepsilon/2$ ; отсюда следует требуемое неравенство.

Чтобы доказать неравенство (2) [по поводу общего случая см. (XI, 14.7)], мы прежде всего заметим, что для любой дизъюнктной коцепи  $X$

$$|X \cdot \tilde{\alpha}| = \left| \int D_X \cdot \alpha \right| \leq |X| \int \langle \alpha \rangle_0;$$

поэтому (V, теорема 16A)  $|\tilde{\alpha}| \leq \int \langle \alpha \rangle_0$ .

Чтобы доказать обратное неравенство, допустим сначала, что функция  $\alpha$  равна постоянному  $r$ -вектору  $\alpha_1$  в кубе  $Q$  и равна нулю вне этого куба. Выберем такой  $r$ -ковектор  $\omega_1$ , что  $|\omega_1|_0 = 1$  и  $\omega_1 \cdot \alpha_1 = |\alpha_1|_0$  (I, теорема 13A), (П. I, лемма 8b), и положим  $D_X(p) = \omega_1$  в  $E^n$ . Тогда

$$|X| = 1, \quad \int_Q D_X \cdot \alpha_1 = |\alpha_1|_0 |Q| = \int_{E^n} \langle \alpha \rangle_0.$$

Если теперь дана любая клеточно-непрерывная суммируемая функция  $\alpha$ , то выберем куб  $Q$ , подразделенный на кубы  $Q_i$ , и  $r$ -вектор-функцию  $\beta(p)$  (ср. проведенное выше доказательство), постоянную в каждом кубе  $Q_i$  и равную нулю вне  $Q$ , так, чтобы

было  $\int_{E^n} \langle \beta - \alpha \rangle_0 < \varepsilon/3$ . Выберем, как и выше, такую дизную кощепь  $X_i$ , что

$$|X_i| = 1, \quad \int_{Q_i} D_{X_i} \cdot \beta = \int_{Q_i} \langle \beta \rangle_0.$$

Изменяя форму  $D_{X_i}$  вблизи граней куба  $Q_i$  и вне  $Q_i$ , мы можем сделать ее равной нулю вне  $Q_i$  и, таким образом, определить некоторую кощепь  $X'_i$ , для которой  $|X'_i| = 1$  и интеграл  $\int_{E^n} D_{X'_i} \cdot \beta$  сколь угодно близок к интегралу  $\int_{Q_i} D_{X_i} \cdot \beta$ . Таким образом, полагая  $X = \sum X'_i$ , мы получаем  $|X| = 1$  и

$$\int_{E^n} D_X \cdot \alpha \geq \int_{E^n} D_X \cdot \beta - \frac{\varepsilon}{3} \geq \sum \int_{Q_i} D_{X_i} \cdot \beta - \frac{2\varepsilon}{3} \geq \int_{E^n} \langle \alpha \rangle_0 - \varepsilon;$$

следовательно,  $|\tilde{\alpha}| \geq \int \langle \alpha \rangle_0$ , что и завершает доказательство.

**8. О компактных кощепях.** Первая лемма, доказываемая ниже, используется в доказательстве теоремы 9В; последняя лемма также необходима, если цепь  $A$  не компактна (см. § 9). Мы говорим, что форма  $\omega$  *компактна*, если она равна нулю вне некоторого компактного множества; мы говорим, что кощепь  $X$  *гладкая*, если гладкой является форма  $D_X$ ; кощепь  $X$  *компактна*, если *компактен* носитель  $\text{spt}(D_X)$ .

Лемма 8а. *Для любой гладкой компактной  $(n-1)$ -формы  $\omega$  в  $E^n$*

$$(1) \quad \int_{E^n} d\omega = 0.$$

В самом деле, пусть  $Q$  — некоторый куб, содержащий  $\text{spt}(\omega)$ . Тогда по теореме Стокса

$$\int_{E^n} d\omega = \int_Q d\omega = \int_{\partial Q} \omega = 0.$$

Следующая лемма в более общей обстановке будет рассмотрена в (VII, 1). Следует вспомнить определение дизной нормы  $|\omega|^\#$ , данное в (V, 10.2).

Лемма 8b. Для любой дизной функции  $\varphi$  и любой дизной  $r$ -формы  $\omega$

$$(2) \quad |\varphi\omega|^{\#} \leq |\varphi| |\omega|^{\#} + (r+1) \mathfrak{L}(\varphi) |\omega|_0 \leq (r+2) |\varphi|^{\#} |\omega|^{\#}.$$

В самом деле, в результате несложных вычислений получаем

$$(3) \quad \mathfrak{L}_0(\varphi\omega) \leq \mathfrak{L}(\varphi) |\omega|_0 + |\varphi| \mathfrak{L}_0(\omega);$$

полагая  $s = r + 1$ , находим

$$\begin{aligned} |\varphi\omega|^{\#} &= \sup \{ |\varphi\omega|_0, s \mathfrak{L}_0(\varphi\omega) \} \leq \\ &\leq \sup \{ |\varphi| |\omega|_0, s |\varphi| \mathfrak{L}_0(\omega) + s \mathfrak{L}(\varphi) |\omega|_0 \} \leq \\ &\leq |\varphi| \sup \{ |\omega|_0, s \mathfrak{L}_0(\omega) \} + s \mathfrak{L}(\varphi) |\omega|_0, \end{aligned}$$

что и дает требуемый результат.

Если даны дизная функция  $\varphi$  и  $r$ -мерная дизная коцепь  $X$ , то мы определим  $r$ -мерную дизную коцепь  $\varphi X$ , полагая

$$(4) \quad D_{\varphi X} = \varphi D_X;$$

ср. (VII, 2) и (IX, 7.6). Тогда с помощью (2) и (V, 10.4) получаем

$$(5) \quad |\varphi X|^{\#} \leq |\varphi| |X|^{\#} + (r+1) \mathfrak{L}(\varphi) |X| \leq (r+2) |\varphi|^{\#} |X|^{\#}.$$

В теореме (V, 13A) мы показали, каким образом  $r$ -мерную бемольную коцепь можно представить в виде слабого предела последовательности гладких коцепей. Здесь мы покажем, что любая  $r$ -мерная дизная коцепь является слабым пределом последовательности компактных дизных коцепей.

Лемма 8с. Пусть  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — такие дизные функции, что для некоторого  $N$  и открытых множеств  $R_i$  мы имеем

$$(6) \quad |\varphi_i|^{\#} \leq N, \quad \varphi_i(p) = 1 \text{ в } R_i, \quad R_i \subset R_{i+1}, \quad \bigcup R_i = E^n.$$

Тогда для любой  $r$ -мерной дизной коцепи  $X$

$$(7) \quad \text{wk}l^{\#} \varphi_i X = X.$$

Открытые множества  $R_i$  и функции  $\varphi_i$  мы можем выбрать так, чтобы функции  $\varphi_i$ , а следовательно, и коцепи  $\varphi_i X$  были компактными.

Допустим, что имеет место (6). Тогда в силу (5)

$$|\varphi_i X|^{\#} \leq (r+2) N |X|^{\#}.$$

Если  $\sigma$  — произвольный  $r$ -мерный симплекс,  $\sigma \subset R_i$ , то  $\varphi_i(p) = 1$  в  $\sigma$ ; поэтому  $\lim_{i \rightarrow \infty} (\varphi_i X \cdot \sigma) = X \cdot \sigma$ . Теперь равенство (7) является

следствием леммы (V, 13A). Последняя часть нашей леммы элементарна.

Замечание. Лемма 8с выполняется и для бемольных коцепей  $X$ , если в (7) заменить  $wk1^\#$  на  $wk1^b$ . В этом случае нужно только вместо неравенства (5) воспользоваться вторым из неравенств (VII, 2.2).

Мы покажем, что дизную норму  $|A|^\#$  можно найти с помощью компактных гладких коцепей:

$$(8) \quad |A|^\# = \sup \{ |X \cdot A| : X \text{ — компактные и гладкие коцепи, } |X|^\# \leq 1 \}.$$

[см. также (VII, 4.6)].

Пусть  $R_0$  и  $R'_0$  — концентрические сферы; мы можем определить гладкую функцию  $\varphi_0$ , равную единице на  $R_0$  и нулю на  $R'_0$  и такую, что  $|\varphi_0| = 1$ ; посредством растяжения пространства  $E^n$  мы можем определить  $R_i$ ,  $R'_i$  и  $\varphi_i$ , так чтобы было  $|\varphi_i| = 1$  и  $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i = 0$ . Тогда неравенство (5) дает

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} |\varphi_i Y|^\# \leq |Y|^\# \text{ для всех дизных коцепей } Y.$$

Если задано  $\varepsilon > 0$ , то выберем такую коцепь  $X$ , что  $|X|^\# \leq 1$ ,  $X \cdot A > |A|^\# - \varepsilon$ . В силу теоремы (V, 13A) мы можем выбрать  $\eta$ , так чтобы было  $X_\eta \cdot A > |A|^\# - 2\varepsilon$ . Пользуясь (7), мы можем выбрать  $i$  таким образом, что

$$\varphi_i X_\eta \cdot A > |A|^\# - 3\varepsilon, \quad |\varphi_i X_\eta|^\# \leq |X|^\# + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon;$$

так как  $\varepsilon$  произвольно, то отсюда следует (8).

Лемма 8d. Пусть  $r$ -мерная дизная или бемольная цепь  $A$  такова, что  $X \cdot A = 0$  для всех  $r$ -мерных гладких компактных коцепей  $X$ . Тогда  $A = 0$ .

Это непосредственно вытекает из (8); нужно вспомнить, что любая бемольная цепь является также и дизной.

9. Граница гладкой цепи. Мы говорим, что  $r$ -мерная непрерывная цепь  $A = \tilde{\alpha}$  гладкая, если гладкой является  $r$ -вектор-функция  $\alpha$ . Мы покажем, как найти цепь  $\partial A$ , дифференцируя  $\alpha$ . Определим непрерывную  $(r-1)$ -мерную цепь  $\tilde{\beta}$  с помощью функ-

ции  $\beta = d^*\alpha$ , имеющей в некоторой ортонормальной системе координат компоненты

$$(1) \quad (d^*\alpha)^{\lambda_1 \dots \lambda_{r-1}} = \sum_{k \neq \lambda_1 \dots \lambda_{r-1}} \frac{\partial}{\partial x^k} \alpha^{\lambda_1 \dots \lambda_{r-1} k}.$$

Мы не требуем, чтобы  $\lambda_1 < \dots < \lambda_{r-1}$ .

Следующая теорема показывает, что результат не зависит от выбора системы координат.

Теорема 9А. *Имеет место равенство*

$$(2) \quad d^*\alpha = \mathcal{D}' d \mathcal{D} \alpha,$$

где  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{D}'$  — двойственные операции из (I, 11), применяемые в каждой точке.

Возьмем любое множество индексов  $\mu_1, \dots, \mu_{n-r+1}$  в естественном порядке. Пусть  $\mu'_1, \dots, \mu'_{r-1}$  — дополнительное множество индексов, взятых в естественном порядке. Для любого  $i = 1, \dots, n-r+1$  пусть множество индексов  $\mu_1^i, \dots, \mu_r^i$ , взятых в естественном порядке, является дополнительным к множеству  $\mu_1, \dots, \mu_r, \dots, \mu_{n-r+1}$ . В силу (II, 8.4) и (I, 11.3)

$$\begin{aligned} (d\mathcal{D}\alpha)^{\mu_1 \dots \mu_{n-r+1}} &= \sum_{i=1}^{n-r+1} (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_i}} (\mathcal{D}\alpha)_{\mu_1 \dots \hat{\mu}_i \dots \mu_{n-r+1}} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-r+1} (-1)^{i-1} \varepsilon_{\mu_1^i \dots \mu_r^i \mu_1 \dots \hat{\mu}_i \dots \mu_{n-r+1}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_i}} \alpha^{\mu_1^i \dots \mu_r^i}. \end{aligned}$$

Индекс  $\mu_i$  входит в  $\mu_1^i, \dots, \mu_r^i$ . Перенеся этот индекс вправо и в  $\varepsilon$  и в  $\alpha$ , получаем

$$(d\mathcal{D}\alpha)_{\mu_1 \dots \mu_{n-r+1}} = \sum_{i=1}^{n-r+1} \varepsilon_{\mu_1^i \dots \mu_r^i \mu_1 \dots \mu_{n-r+1}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_i}} \alpha^{\mu_1^i \dots \mu_r^i \mu_i}.$$

Пользуясь формулой (I, 11.4), находим

$$(\mathcal{D}' d \mathcal{D} \alpha)^{\mu'} = \varepsilon_{\mu' \mu} (d\mathcal{D}\alpha)_{\mu} = \sum_{i=1}^{n-r+1} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_i}} \alpha^{\mu' \mu_i} = (d^*\alpha)^{\mu'}.$$

Пусть  $\alpha_0$  — единичный  $n$ -вектор в  $E^n$ . Вспомним [см. (I, 11.9)], что  $\omega \cdot \alpha = (\omega \vee \mathcal{D}\alpha) \cdot \alpha_0$  для любой  $r$ -формы  $\omega$  и любой  $r$ -вектор-функции  $\alpha$ . Поэтому

$$(3) \quad \int \omega \cdot \alpha = \int (\omega \vee \mathcal{D}\alpha) \cdot \alpha_0 = \int \omega \vee \mathcal{D}\alpha$$

[ср. (III, 5.1)].

Мы будем пользоваться обозначением

$$(4) \quad \Phi\beta = \tilde{\beta}.$$

**Теорема 9В.** Для любой гладкой суммируемой  $r$ -вектор-функции  $\alpha$

$$(5) \quad \partial\Phi\alpha = (-1)^r \Phi d^*\alpha.$$

В силу леммы 8d (или же более простого рассуждения, если цепь  $A$  компактна) достаточно показать, что для любой  $r$ -мерной гладкой компактной коцепи  $X$

$$X \cdot [\partial\Phi\alpha - (-1)^r \Phi d^*\alpha] = 0.$$

Положим  $\xi = D_X$ ,  $\omega = \mathcal{D}\alpha$ ; это — гладкие формы. В силу (7.1), (V, 10.16) и (3)

$$X \cdot \partial\Phi\alpha = dX \cdot \Phi\alpha = \int D_{dX} \cdot \alpha = \int d\xi \vee \omega.$$

Далее, так как  $\mathcal{D}\mathcal{D}'\eta = \eta$  (I, 11.2), то

$$X \cdot \Phi d^*\alpha = \int D_X \cdot D' d\alpha = \int \xi \vee DD' d\omega = \int \xi \vee d\omega.$$

Форма  $\xi \vee \omega$  является гладкой и компактной. Поэтому в силу леммы 8а и (II, 8.6)

$$\begin{aligned} X \cdot [\partial\Phi\alpha - (-1)^r \Phi d^*\alpha] &= \int [d\xi \vee \omega + (-1)^{r-1} \xi \vee d\omega] = \\ &= \int d(\xi \vee \omega) = 0, \end{aligned}$$

чем и завершается доказательство.

**10. Непрерывные цепи на гладких многообразиях.** На гладком  $n$ -мерном многообразии  $M$  полиэдральные цепи не определены, поэтому мы не можем построить теорию цепей и коцепей на  $M$ , как в гл. V. Вместо  $r$ -мерных коцепей  $X$  мы можем, как в (V, 10), пользоваться  $r$ -формами  $\omega$ . Мы покажем, каким образом вместо  $r$ -мерных цепей  $A$  можно воспользоваться «непрерывными цепями»  $\alpha$ , определить операцию  $\omega \circ \alpha$  и заменить  $X \cdot A$  интегралом  $\int_M \omega \circ \alpha$ .

(Мы не будем здесь входить в обсуждение требований непрерывности и интегрируемости.)

**Случай I.** Многообразие  $M$  риманово и ориентировано. Мы можем, имея на  $M$  функцию  $\alpha$ , значениями которой являются

$r$ -векторы, положить  $(\omega \circ \alpha)(p) = \omega(p) \cdot \alpha(p)$  и, как в (7.1), пользоваться интегралом Римана  $\int_M \omega \cdot \alpha$ .

Случай II. Многообразие  $M$  ориентировано, но не является римановым. Тогда интеграл Римана  $\int_M \varphi$  от действительной функции  $\varphi$  не определен. Мы можем в качестве  $\alpha$  взять  $(n-r)$ -форму и пользоваться интегралом  $\int_M \omega \vee \alpha$ ; применяется определение, данное в (III, 10).

Искусственность понимания  $\alpha$  как  $(n-r)$ -формы имеет своим источником искусственность интегрирования по  $M$ . Чтобы сделать интеграл более похожим на скалярное произведение, следует вместо  $M$  рассматривать полиэдральную область  $Q$  в  $E^n$ ; тогда, как в (III, 3.2), используя разбиения  $\sum \sigma_i$  области  $Q$ , найдем

$$(1) \quad \int_Q \omega \vee \alpha = \lim \sum [\omega(p_i) \vee \alpha(p_i)] \cdot \{\sigma_i\} = \lim \sum \omega(p_i) \cdot \tilde{\alpha}_i,$$

где в силу (I, 7.1)

$$(2) \quad \tilde{\alpha}_i = \alpha(p_i) \wedge \{\sigma_i\} \text{ есть некоторый } r\text{-вектор.}$$

Если форма  $\alpha$  непрерывна и клетки  $\sigma_i$  малы, то  $\tilde{\alpha}_i$  приближенно есть „часть формы  $\alpha$ “, лежащая в  $\sigma_i$  [см. (XI, 13), где рассматривается это понятие].

Случай III. Многообразие  $M$  не предполагается ориентируемым. Тогда не существует никакого однозначного представления многообразия  $M$  в виде  $n$ -мерной цепи. Пусть  $\xi(p)$  — функция следующего вида. Если задана точка  $p \in M$  и некоторая ориентация окрестности точки  $p$ , то  $\xi(p)$  есть  $n$ -ковектор; при выборе противоположной ориентации он меняет знак на обратный. Теперь для любой ориентируемой части  $R$  многообразия  $M$  интеграл  $\int_R \xi$  может быть

определен следующим образом: выберем какую-либо ориентацию  $\varepsilon$  множества  $R$ , образовав  $n$ -мерную цепь  $A$ ; обозначим  $n$ -форму, соответствующую ориентации  $\varepsilon$  вблизи каждой точки  $p \in R$ , через  $\xi_\varepsilon(p)$  и образуем  $\int_A \xi_\varepsilon$ . Если бы была выбрана противоположная ориентация, то мы получили бы

$$\int_{-A} \xi_{-\varepsilon} = \int_{-A} (-\xi_\varepsilon) = \int_A \xi_\varepsilon.$$

Таким образом, интеграл  $\int_R \xi = \int_A \xi_\varepsilon$  не зависит от выбранной ориентации.

Если функция  $\xi$  определена на  $M$ , то интеграл  $\int_M \xi$  мы можем определить следующим образом. Пусть  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — некоторое разложение единицы в  $M$  (III, 10), причем каждый носитель  $\text{spt}(\varphi_i)$  лежит в ориентированной части  $U_i$  многообразия  $M$  (например, в некоторой системе координат). Тогда положим  $\int_M \xi = \sum \int_{U_i} \varphi_i \xi$ .

Допустим, что  $\alpha(p)$  определяется, как и только что рассмотренная функция  $\xi(p)$ , с тем лишь отличием, что  $\alpha(p)$  есть  $(n - r)$ -ковектор, зависящий от ориентации. Тогда для любой  $r$ -формы  $\omega$  на  $M$  произведение  $\omega(p) \vee \alpha(p)$  будет функцией того же вида, что и только что рассмотренная функция  $\xi(p)$ , и мы можем определить  $\int_M \omega \vee \alpha$ . Следуя де Раму (де Рам, стр. 44), мы можем назвать  $\alpha$  „ $(n - r)$ -формой нечетного рода“. При  $r = n$   $\alpha$  есть „скаляр нечетного рода“;  $\alpha(p)$  есть число, зависящее от выбора ориентации вблизи точки  $p$  и изменяющее знак, когда ориентация заменяется противоположной.

## VII. Общие свойства цепей и коцепей

Мы укажем в этой главе целый ряд методов и теорем, играющих важную роль в дальнейшем исследовании. Сначала мы рассмотрим умножение цепей и коцепей на действительные дизные функции, а также носители цепей и коцепей и некоторые аппроксимационные теоремы. Затем мы рассмотрим „ $r$ -мерные дизные цепи в точке“ и покажем, что при  $r > 0$  такого рода цепей в бемольном случае не существует. В заключение мы изучим когомологии в комплексах.

До этого момента мы рассматривали пространство  $r$ -мерных бемольных коцепей в  $E^n$  как банахово пространство без дальнейших операций. Теперь мы введем действительные дизные функции в качестве кольца операторов на этом пространстве. Пусть  $A = \sum a_i \sigma_i$  — полиэдральная  $r$ -мерная цепь, а  $\varphi$  — дизная функция. Для каждого  $i$  функция  $\psi(p) = \varphi(p) a_i$  непрерывна в  $\sigma_i$ , и в силу (VI, 7) она определяет некоторую „непрерывную цепь“  $B_i$  в  $\sigma_i$  и поэтому в  $E^n$ ; положим  $\varphi A = \sum B_i$ . Мы покажем, что определение произведения  $\varphi A$  можно продолжить на все дизные или бемольные цепи  $A$ . Если потребовать, чтобы  $\varphi X \cdot A$  равнялось  $X \cdot \varphi A$ , то действительные дизные функции станут операторами и на пространствах бемольных или дизных коцепей. (Более общая теория произведений будет изложена в гл. IX.)

„Носитель“ цепи или коцепи, грубо говоря, есть наименьшее замкнутое множество, вне которого эта цепь или коцепь не оказывает никакого воздействия соответственно на коцепи или цепи. С помощью дизных функций, рассматриваемых в качестве операторов, выводятся основные свойства носителей. Затем мы покажем, как аппроксимировать цепь  $A$  компактной (т. е. имеющей компактный носитель) цепью  $A'$ ; если масса  $|A|$  конечна, то мы можем сделать массу  $|A'|$  близкой к  $|A|$ , и аналогично для  $|\partial A'|$ . Приводится теорема такого же характера, в которой требуется, чтобы цепь  $A'$  была полиэдральной.

Определение  $r$ -вектора  $\{A\}$  полиэдральной цепи  $A$ , данное в (III, 2), сразу распространяется на любую дизную или бемольную цепь. Мы показываем, что даже при  $r > 0$  существует  $r$ -мерная дизная цепь  $A \neq 0$ , носитель которой содержит одну только точку  $p$ ; в этом случае цепь  $A$  определяется парой  $p, \{A\}$ . Любую

дизную цепь  $A$  конечной массы можно аппроксимировать, представив ее в виде  $A = \sum A_i$ , где  $A_i = \varphi_i A$ ,  $\sum \varphi_i = 1$  и каждая функция  $\varphi_i$  обращается в нуль вне некоторой маленькой области  $U_i$ , и заменив каждую цепь  $A_i$  цепью  $B_i$ , сосредоточенной в некоторой точке  $p_i \in U_i$ , причем  $\{B_i\} = \{A_i\}$ . В отличие от этого носитель  $r$ -мерной бемольной цепи  $A \neq 0$  не может лежать ни в какой плоскости размерности  $< r$ . (Мы докажем это с помощью результатов гл. X.) Было бы ценно найти дальнейшие условия, которым должны удовлетворять носители бемольных цепей. Например, прямолинейный отрезок  $P$  может быть носителем одномерной бемольной цепи  $A \neq 0$ , но вектор  $\{A\}$  должен идти вдоль  $P$ .

В (IV, C) мы показали, каким образом на гладком многообразии  $M$  можно различными способами ввести когомологии, а именно алгебраически (с помощью триангуляций) или же с помощью дифференциальных форм; мы показали, что получающиеся в результате кольца когомологий изоморфны (теорема де Рама). (В алгебраической топологии даются и другие способы введения этого кольца.) На  $M$  можно определить бемольные коцепи (для простоты мы предполагаем, что  $M$  компактно); пользуясь ими, можно дать еще одно определение кольца когомологий. Этим определением в действительности можно воспользоваться в случае любого комплекса (§ 10); мы показываем (§ 12), что определенное таким образом кольцо когомологий изоморфно кольцу алгебраических когомологий. В действительности бемольные коцепи можно заменить „бемольными дифференциальными формами“ и таким образом получить для комплексов теорему, аналогичную теореме де Рама; см. введение к гл. IX.

Для обозначения любого из символов  $| |^b$  и  $| |^{\#}$  мы пользуемся единым символом  $| |^{\odot}$ .

**1. Умножение цепей на диззные функции.** Пусть  $\varphi$  — произвольная диззная функция в  $E^n$  (V, 4); мы хотим для любой  $r$ -мерной диззной или бемольной цепи  $A$  в  $E^n$  определить произведение  $\varphi A$ . Это произведение представляет собой частный случай ( $s=0$ ) произведения  $X^s \cap A^r$ , рассматриваемого в (IX, 16), получающийся, если положить  $\varphi = D_X$ . Этот случай изучить легче, и он играет особо важную роль. В (IX, 12) мы рассмотрим произведение  $\varphi A$  для функций  $\varphi$  более общего вида.

Начнем с определения произведения  $\varphi \sigma$  для  $r$ -мерного ориентированного симплекса  $\sigma$ . Пусть  $P$  — ориентированная  $r$ -мерная плоскость симплекса  $\sigma$  с  $r$ -направлением  $\alpha$ . Пользуясь введенным в (VI, 7) понятием непрерывной цепи, положим

$$(1) \quad \varphi \sigma = \tilde{\beta}, \quad \beta(p) = \varphi(p) \alpha \text{ в } \sigma, \quad \beta(p) = 0 \text{ в } P \setminus \sigma;$$

это — некоторая  $r$ -мерная цепь в  $P$  и поэтому в  $E^n$ . В силу формулы (VI, 7.2), применяемой к  $P$ , и теоремы (V, 16C)

$$(2) \quad |\varphi\sigma| = \int_{\sigma} \langle \varphi\alpha \rangle = \int_{\sigma} \langle \varphi \rangle.$$

Для любой  $r$ -мерной полиэдральной цепи  $A = \sum a_i \sigma_i$  положим  $\varphi A = \sum a_i \varphi \sigma_i$ .

Для любой  $r$ -мерной дизной цепи  $A$  запишем  $A = \lim^{\#} A_i$ , где  $A_i$  — полиэдральные цепи, и положим

$$(3) \quad \varphi A = \lim^{\#} \varphi A_i.$$

Аналогично определяется произведение  $\varphi A$  в случае бемольной нормы.

Существование предела и его независимость от выбора последовательности полиэдральных цепей  $A_i$  немедленно вытекает из следующих неравенств ( $A$  — произвольная  $r$ -мерная цепь):

$$\left. \begin{aligned} (4) \quad |\varphi A|^{\#} &\leq N_{\varphi}^{(r)} |A|^{\#}, \\ (5) \quad |\varphi A|^b &\leq N_{\varphi}^{(r)} |A|^b, \end{aligned} \right\} \quad N_{\varphi}^{(r)} = |\varphi| + (r+1) \mathfrak{L}_{\varphi},$$

которые следует применить к разностям  $A_j - A_i$ . Последнее неравенство в (IX, 16.19) будет усилено. Заметим, что если функцию  $\varphi$  рассматривать как дизную 0-форму, то на основании (V, 10.2) мы получим

$$(6) \quad |\varphi|^{\#} \leq N_{\varphi}^{(r)} \leq (r+2) |\varphi|^{\#}.$$

Укажем неравенство, являющееся следствием соотношения (2) для  $A = \sigma$  и, значит, для  $r$ -мерных полиэдральных цепей  $A$ :

$$(7) \quad |\varphi A| \leq |\varphi| |A|.$$

Мы докажем все эти неравенства для  $r$ -мерных дизных и бемольных цепей  $A$ , а также неравенства

$$(8) \quad |\varphi \partial A - \partial \varphi A| \leq r \mathfrak{L}_{\varphi} |A|,$$

$$(9) \quad |\partial \varphi A| \leq r \mathfrak{L}_{\varphi} |A| + |\varphi| |\partial A|$$

для  $r$ -мерных бемольных цепей  $A$ .

(а) Неравенство (4) можно доказать, пользуясь соотношением  $X \cdot \varphi A = \varphi X \cdot A$  (см. § 2) и неравенством (VI, 8.5), ниже мы дадим другое доказательство.

(б) Чтобы доказать неравенство (8) для полиэдральных цепей  $A$ , допустим, что  $A$  есть симплекс  $\sigma$ . Для заданного  $\epsilon > 0$  найдем

такие полиэдральные цепи  $H$  и  $K$ , аппроксимирующие  $\varphi\sigma$  и  $\varphi\partial\sigma$  соответственно, что

$$(10) \quad \begin{cases} |H - \varphi\sigma| < \frac{\varepsilon}{2}, & |K - \varphi\partial\sigma| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |\partial H - K| < r\mathfrak{L}_\varphi|\sigma| + \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда, полагая  $B = \partial H - K$ , мы будем иметь

$$|\varphi\partial\sigma - \partial\varphi\sigma + B|^b \leq |\varphi\partial\sigma - K| + |\partial(\varphi\sigma - H)|^b < \varepsilon,$$

что вместе с последним из неравенств (10) даст нам неравенство (8) [см. (V, 16.1)].

Разобьем плоскость симплекса  $\sigma$  на кубы с ребром длины  $h$ ; пусть, как в (V, 7),  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  — кубы, лежащие в  $\sigma$ , а  $\sigma_{m+1}, \dots, \sigma_l$  — части остальных кубов, содержащиеся в  $\sigma$ . Пусть  $p_i$  — центр клетки  $\sigma_i$  и  $\varphi_i = \varphi(p_i)$ . Положим

$$H = \sum_{i=1}^l \varphi_i \sigma_i.$$

Из равномерной непрерывности функции  $\varphi$  и равенства (2) следует, что если  $h$  достаточно мало, то первое из неравенств (10) выполняется.

Пусть  $\tau_1, \dots, \tau_s$  — части  $(r-1)$ -мерных граней клеток  $\sigma_i$ , лежащие в  $\text{int}(\sigma)$ , а  $\tau_{s+1}, \dots, \tau_t$  — те части этих граней, которые лежат в  $\partial\sigma$ . Тогда, если  $\tau_k$  — некоторая грань клетки  $\sigma_{\nu_k}$  ( $k > s$ ), то, полагая

$$K = \sum_{k=s+1}^t \varphi_{\nu_k} \tau_k,$$

мы получаем при достаточно малом  $h$  второе из неравенств (10)

При  $k \leq s$  пусть, скажем,  $\tau_k$  входит в границу клетки  $\sigma_{\mu_k}$  со знаком плюс, а в границу клетки  $\sigma_{\lambda_k}$  со знаком минус. В таком случае

$$\partial H - K = \sum_{k \leq s} (\varphi_{\mu_k} - \varphi_{\lambda_k}) \tau_k.$$

Положив  $\varepsilon' = \varepsilon/(r\mathfrak{L}_\varphi)$ , мы можем взять  $h$  настолько малым, что

$$lh^r < |\sigma| + \varepsilon', \quad s \leq rl < \frac{r(|\sigma| + \varepsilon')}{h^r}.$$

Кроме того,

$$|\varphi_{\mu_k} - \varphi_{\lambda_k}| \leq \mathfrak{L}_\varphi |p_{\mu_k} - p_{\lambda_k}| < \mathfrak{L}_\varphi h.$$

Поэтому

$$|\partial H - K| \leq \sum_{k \leq s} \mathfrak{L}_\varphi h |\tau_k| \leq s \mathfrak{L}_\varphi h^r < r \mathfrak{L}_\varphi |\sigma| + \varepsilon,$$

чем и завершается доказательство.

(с) Применяя этот результат к  $r$ -мерным симплексам  $\sigma$ , получаем

$$|\varphi \partial \sigma|^b \leq r \mathfrak{L}_\varphi |\sigma| + |\partial \varphi \sigma|^b \leq N_\varphi^{(r-1)} |\sigma|.$$

(d) Докажем теперь неравенство (5) для полиэдральной цепи  $A$ . Возьмем любое  $\varepsilon > 0$ . Выберем такую цепь  $D$ , что  $|A - \partial D| + |D| < |A|^b + \varepsilon$ . Тогда, пользуясь неравенствами (7) и (8) для полиэдральной цепи  $A$ , получаем

$$\begin{aligned} |\varphi A - \partial \varphi D| + |\varphi D| &\leq |\varphi(A - \partial D)| + |\varphi \partial D - \partial \varphi D| + |\varphi D| \leq \\ &\leq |\varphi|(|A - \partial D| + |D|) + (r+1) \mathfrak{L}_\varphi |D| \leq \\ &\leq |\varphi| + (r+1) \mathfrak{L}_\varphi (|A|^b + \varepsilon), \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (5).

(е) Для прямого доказательства неравенства (4) и еще одного доказательства неравенства (5) мы воспользуемся следующим неравенством:

$$(11) \quad |\varphi T_v \sigma - T_v \varphi \sigma| = \int_\sigma |\varphi(p+v) - \varphi(p)| dp \leq \mathfrak{L}_\varphi |v| |\sigma|,$$

из которого на основании неравенства (V, 6.3) (выполняющегося для полиэдральных цепей, аппроксимирующих  $\varphi \sigma$ , а поэтому и для  $\varphi \sigma$ ) вытекает неравенство

$$(12) \quad |\varphi(T_v \sigma - \sigma)|^\# \leq N_\varphi^{(r)} \frac{|v| |\sigma|}{r+1}.$$

Мы применим его в (f).

(f) Определим для полиэдральных цепей полунормы, полагая

$$|A|' = \frac{|\varphi A|^b}{N_\varphi^{(r)}}, \quad |A|'' = \frac{|\varphi A|}{N_\varphi^{(r)}}$$

(функция  $\varphi \neq 0$  фиксирована). Так как в силу (с)

$$|\sigma^r|' \leq \frac{|\varphi \sigma^r|}{N_\varphi^{(r)}} \leq \frac{|\varphi| |\sigma^r|}{N_\varphi^{(r)}} \leq |\sigma^r|,$$

$$|\partial \sigma^{r+1}|' = \frac{|\varphi \partial \sigma^{r+1}|^b}{N_\varphi^{(r)}} \leq |\sigma^{r+1}|,$$

то теорема (V, 8A) показывает, что  $|A|' \leq |A|^b$ , откуда следует неравенство (5); так как, далее,  $|A|'' \leq |A|'$ , то из неравенства (12)

и теоремы (V, 8A) мы получаем неравенство (4). Оба этих неравенства доказаны для полиэдральных цепей.

(г) Определение произведения  $\varphi A$ , таким образом, является удовлетворительным в случае любой из двух наших норм; отсюда следует, что неравенства (4) и (5) выполняются в общем случае. Заметим, что эти неравенства дают

$$(13) \quad \lim^{\odot} \varphi A_k = \varphi \lim^{\odot} A_k, \quad \text{если } \lim^{\odot} A_k \text{ существует (рассматривается любая из двух норм)}$$

(символ  $\odot$  заменяет любой из символов  $b, \#$ ).

(h) Неравенства (7) и (8), а поэтому также и неравенство (9) выполняются для бемольных цепей  $A$ . В самом деле, пусть  $A = \lim^b A_i$ ,  $|A| = \lim |A_i|$ , где  $A_i$  — полиэдральные цепи. В силу (13)

$$\varphi A_i \xrightarrow{b} \varphi A, \quad \varphi \partial A_i \xrightarrow{b} \varphi \partial A = \partial \varphi A,$$

откуда и следуют неравенства (7) и (8).

(i) Аналогично, неравенство (7) выполняется для дизельных цепей  $A$ .

Перечисленные ниже свойства очевидны для симплексов; следовательно, соответствующие равенства имеют место для полиэдральных цепей, а поэтому и для бемольных и дизельных цепей:

$$(14) \quad \varphi(A+B) = \varphi A + \varphi B, \quad (\varphi + \psi)A = \varphi A + \psi A,$$

$$(15) \quad (\varphi\psi)A = \varphi(\psi A),$$

$$(16) \quad \varphi A = aA, \quad \text{если } \varphi(p) = a \text{ для всех } p.$$

Установим условие, при котором масса суммы равна сумме масс [см. также (X, 12.11)]:

$$(17) \quad |(\varphi_1 + \varphi_2)A| = |\varphi_1 A| + |\varphi_2 A|, \quad \text{если } \varphi_1(p), \varphi_2(p) \geq 0.$$

В качестве следствия получаем

$$(18) \quad |\varphi A| \leq |\psi A|, \quad \text{если } 0 \leq \varphi(p) \leq \psi(p).$$

Если  $A = \sigma$ , то равенство (17) ясно из (2); поэтому оно выполняется для полиэдральных цепей  $A$ . Докажем его для любой дизельной цепи  $A$  [следовательно, и для любой бемольной цепи  $A$ ; см. теоремы (V, 14B) и (V, 16A)]. Нам нужно только показать, что для любого  $\varepsilon > 0$

$$|\varphi_1 A| + |\varphi_2 A| < |(\varphi_1 + \varphi_2)A| + \varepsilon.$$

Мы можем выбрать число  $M$  и дизельную функцию  $\varphi_3$  так, чтобы было

$$\varphi_3(p) = M - \varphi_1(p) - \varphi_2(p) \geq 0.$$

В силу теоремы (V, 16B) существует такое  $\zeta > 0$ , что

$$|B| \geq |\varphi_i A| - \frac{\varepsilon}{6}, \quad \text{если } |B - \varphi_i A|^{\#} \leq \zeta \quad (i = 1, 2, 3).$$

Положим  $\eta = \inf \{\zeta / N_{\varphi_i}^{(r)} : i = 1, 2, 3\}$  и выберем такую полиэдральную цепь  $A'$ , что

$$|A' - A|^{\#} < \eta, \quad |A'| < |A| + \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Тогда

$$|\varphi_i A' - \varphi_i A|^{\#} \leq N_{\varphi_i}^{(r)} |A' - A|^{\#} \zeta,$$

и поэтому

$$|\varphi_i A'| \geq |\varphi_i A| - \frac{\varepsilon}{6} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Следовательно, так как  $A'$  — полиэдральная цепь, то

$$\sum |\varphi_i A| \leq \sum |\varphi_i A'| + \frac{\varepsilon}{2} = M |A'| + \frac{\varepsilon}{2} < M |A| + \varepsilon.$$

Кроме того,

$$M |A| \leq |(\varphi_1 + \varphi_2) A| + |\varphi_3 A|;$$

эти неравенства и дают требуемый результат.

**2. Умножение коцепей на диезные функции.** Для любой диезной функции  $\varphi$  и любой диезной или бемольной коцепи  $X$  мы можем определить произведение  $\varphi X$ , полагая

$$(1) \quad \varphi X \cdot A = X \cdot \varphi A,$$

где  $A$  — соответственно диезная или бемольная цепь. Тогда неравенства (1.4) и (1.5) дают

$$(2) \quad |\varphi X|^{\#} \leq N_{\varphi}^{(r)} |X|^{\#}, \quad |\varphi X|^b \leq N_{\varphi}^{(r)} |X|^b;$$

см. также (IX, 14.25).

Из (1.7), (1.8), (1.11) (V, 7.4) и (V, 7.2) (последнее равенство выполняется для  $A = \varphi\sigma$ ) сразу находим для  $r$ -мерных коцепей  $X$

$$(3) \quad |\varphi X| \leq |\varphi| |X|,$$

$$(4) \quad |\varphi dX - d\varphi X| \leq (r+1) \mathfrak{L}_{\varphi} |X|,$$

$$(5) \quad |d\varphi X| \leq |\varphi| |dX| + (r+1) \mathfrak{L}_{\varphi} |X|,$$

$$(6) \quad \mathfrak{L}_{\varphi X} \leq |\varphi| \mathfrak{L}_X + \mathfrak{L}_{\varphi} |X|.$$

Поэтому в силу (V, 4.8) и (V, 7.8) для любой из двух норм

$$(7) \quad |\varphi X|^{\odot} \leq |\varphi| |X|^{\odot} + (r+1) \mathfrak{L}_{\varphi} |X|,$$

и мы еще раз доказали неравенства (2).

Докажем, что из только что данного определения следует равенство (VI, 8.4) для дизельных коцепей  $X$ . Возьмем любую точку  $p_0$  и любое  $r$ -направление  $\alpha$ . Как и в (V, 10.5), выберем последовательность симплексов  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ , чтобы определить  $D_X(p) \cdot \alpha$ . Так как в силу (1.2)

$$|\varphi\sigma_i - \varphi(p_0)\sigma_i| \leq \varrho_\varphi \text{diam}(\sigma_i) |\sigma_i|,$$

то мы находим

$$D_{\varphi X}(p_0) \cdot \alpha = \lim \frac{X \cdot \varphi\sigma_i}{|\sigma_i|} = \varphi(p_0) \lim \frac{X \cdot \sigma_i}{|\sigma_i|} = \varphi(p_0) D_X(p_0) \cdot \alpha,$$

откуда и следует нужный результат.

Очевидно, для коцепей имеют место равенства (1.14) — (1.16).

Докажем, что если  $A$  — непрерывная цепь, определяемая  $r$ -вектор-функцией  $\alpha$ , то цепь  $\varphi A$  определяется  $r$ -вектор-функцией  $\varphi\alpha$ , т. е. что

$$(8) \quad \varphi(\Phi\alpha) = \Phi(\varphi\alpha)$$

[см. (VI, 9.4)]. В самом деле, возьмем любую  $r$ -мерную дизельную коцепь  $X$ . Тогда из (1), (VI, 7.1) и (VI, 8.4) получаем

$$X \cdot \varphi\Phi\alpha = \varphi X \cdot \tilde{\alpha} = \int D_{\varphi X} \cdot \alpha = \int D_X \cdot \varphi\alpha = X \cdot \Phi\varphi\alpha.$$

**3. Носители цепей и коцепей.** Носитель полиэдральной цепи мы определили в (V, 1). Теперь мы дадим более общие определения.

*Носитель*  $\text{spt}(A)$  некоторой бемольной или дизельной цепи  $A$  есть множество точек  $p$ , для каждой из которых при любом  $\varepsilon > 0$  существует такая дизельная коцепь  $X$ , что

$$(1) \quad X \cdot A \neq 0, \quad D_X(q) = 0 \text{ вне } U_\varepsilon(p).$$

Мы говорим, что цепь  $A$  *компактна*, если компактен ее носитель  $\text{spt}(A)$ . *Носитель*  $\text{spt}(X)$  некоторой бемольной или дизельной коцепи  $X$  есть множество точек  $p$ , для каждой из которых при любом  $\varepsilon > 0$  существует такой симплекс  $\sigma$ , что

$$(2) \quad X \cdot \sigma \neq 0, \quad \sigma \subset U_\varepsilon(p).$$

Докажем, что для полиэдральной цепи  $A$  первое определение совпадает с определением, данным в (V, 1). Запишем  $A = \sum a_i \sigma_i$ , где симплексы  $\sigma_i$  не перекрываются и коэффициенты  $a_i \neq 0$ . Мы должны показать, что носитель  $\text{spt}(A)$  в смысле только что данного определения является объединением  $Q$  симплексов  $\sigma_i$ . Из (V, 10.3) ясно, что  $\text{spt}(A) \subset Q$ . Возьмем теперь любую точку  $p \in Q$ ; пусть, скажем,  $p \in \sigma_i$ . Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . С помощью метода параграфа (V, 12) мы легко найдем коцепь  $X$ , для

которой  $\text{spt}(D_X) \subset U_\varepsilon(p)$ ,  $X \cdot \sigma_i \neq 0$ ,  $X \cdot \sigma_j = 0$  ( $j \neq i$ ); но в таком случае  $X \cdot A \neq 0$ .

Носители, очевидно, являются замкнутыми множествами. Мы говорим, что некоторая цепь или коцепь *содержится* в множестве  $Q$ , если в множестве  $Q$  содержится ее носитель.

Вспомним определения множеств  $\text{car}(\varphi)$ ,  $\text{spt}(\varphi)$  (П. III). Любая дизная функция  $\varphi$  определяет некоторую нульмерную коцепь  $Z$ ; очевидно,  $\text{spt}(\varphi) = \text{spt}(Z)$ . Вообще,

$$(3) \quad \text{spt}(X) = \text{spt}(D_X), \text{ где } X \text{ — дизная коцепь.}$$

Перечисленные ниже свойства носителей [за исключением свойства (7), в случае когда граница  $\partial A$  не определена] справедливы и для бемольной и для дизной норм (функция  $\varphi$  всегда дизная)

$$(4) \quad A = 0, \text{ если } \text{spt}(A) = 0,$$

$$(5) \quad X = 0, \text{ если } \text{spt}(X) = 0,$$

$$(6) \quad X \cdot A = 0, \text{ если } \text{spt}(X) \cap \text{spt}(A) = 0,$$

$$(7) \quad \text{spt}(\partial A) \subset \text{spt}(A),$$

$$(8) \quad \text{spt}(dX) \subset \text{spt}(X),$$

$$(9) \quad \text{spt}(\varphi A) \subset \text{spt}(\varphi) \cap \text{spt}(A),$$

$$(10) \quad \text{spt}(\varphi X) \subset \text{spt}(\varphi) \cap \text{spt}(X),$$

$$(11) \quad \varphi A = 0, \text{ если } \text{car}(\varphi) \cap \text{spt}(A) = 0,$$

$$(12) \quad \varphi X = 0, \text{ если } \text{car}(\varphi) \cap \text{spt}(X) = 0,$$

$$(13) \quad \varphi A = A, \text{ если } \varphi(p) = 1 \text{ в } \text{spt}(A),$$

$$(14) \quad \varphi X = X, \text{ если } \varphi(p) = 1 \text{ в } \text{spt}(X).$$

Чтобы доказать (4), в силу леммы (VI, 8d) достаточно показать, что  $X \cdot A = 0$  для любой компактной дизной коцепи  $X$ . Каждая точка  $p \in Q = \text{spt}(X)$  содержится в некоторой окрестности  $U(p)$ , обладающей тем свойством, что  $Y \cdot A = 0$  для любой дизной коцепи  $Y$ , для которой  $D_Y = 0$  вне  $U(p)$ . Конечное число этих окрестностей, скажем  $U_1, \dots, U_m$ , покрывает  $Q$ . Определим, как в лемме (П. III, 2a), разложение единицы  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ . Тогда  $\varphi_0(p) D_X(p) = 0$  для всех  $p$ , так что  $\varphi_0 X = 0$  [см. (VI, 8.4)]. Теперь

$$X = (\sum \varphi_i) X = \varphi_1 X + \dots + \varphi_m X$$

и  $D_{\varphi_i X} = \varphi_i D_X = 0$  вне  $U_i$ . Поэтому

$$X \cdot A = \sum (\varphi_i X \cdot A) = 0.$$

Чтобы доказать (5), мы покажем, что  $X \cdot \sigma = 0$  для всех симплексов  $\sigma$ . Каждая точка  $p \in \sigma$  содержится в некоторой окрест-

ности  $U(p)$ , обладающей тем свойством, что  $X \cdot \tau = 0$  для всех симплексов  $\tau \subset U(p)$ . Мы можем найти такое подразделение  $\sum \sigma_i$  симплекса  $\sigma$ , что каждый симплекс  $\sigma_i$  содержится в некоторой окрестности  $U(p)$ , обладающей этим свойством; тогда  $X \cdot \sigma = \sum X \cdot \sigma_i = 0$ .

Чтобы доказать (9), возьмем сначала любую точку  $p$ , не принадлежащую  $\text{spt}(\varphi)$ . Тогда  $\varphi(q) = 0$  в некоторой окрестности  $U_\varepsilon(p)$ . Возьмем любую дизъюнктную цепь  $X$ , для которой  $D_X = 0$  вне  $U_\varepsilon(p)$ . Тогда в силу (VI, 8.4)  $\varphi X = 0$ , так что  $X \cdot \varphi A = \varphi X \cdot A = 0$ ; поэтому точка  $p$  не принадлежит носителю  $\text{spt}(\varphi A)$ . Доказательство того, что  $\text{spt}(\varphi A) \subset \text{spt}(A)$ , аналогично.

Включение (10) в случае дизъюнктной нормы очевидно. В случае бемольной нормы мы докажем, что  $\text{spt}(\varphi X) \subset \text{spt}(X)$ , следующим образом. Возьмем любую точку  $p$ , не входящую в  $\text{spt}(X)$ . Пусть, скажем,  $X \cdot \tau = 0$  для всех  $\tau \subset U_\varepsilon(p)$ . Возьмем любой симплекс  $\sigma \subset U_\varepsilon(p)$ . Для заданного  $\zeta > 0$ , рассмотрев симплициальное подразделение  $\sum \sigma_i$  симплекса  $\sigma$  и некоторую функцию  $\varphi'$ , аппроксимирующую функцию  $\varphi$  и постоянную внутри каждого из симплексов  $\sigma_i$ , мы получим полиэдральную цепь  $B = \sum b_i \sigma_i$ , для которой  $|B - \varphi \sigma| < \zeta$ . Мы имеем  $X \cdot \sigma_i = 0$ , поэтому  $X \cdot B = 0$  и

$$|X \cdot \varphi \sigma| = |X \cdot (\varphi \sigma - B)| \leq \zeta |X|;$$

следовательно,  $\varphi X \cdot \sigma = X \cdot \varphi \sigma = 0$  и  $p$  не входит в  $\text{spt}(\varphi X)$ . Доказательство того, что  $\text{spt}(\varphi X) \subset \text{spt}(\varphi)$ , аналогично, но проще.

Мы могли бы доказать свойства (11) и (12) с  $\text{spt}(\varphi)$  вместо  $\text{car}(\varphi)$ , а затем соответствующим образом ослабленные формы свойств (13) и (14) и остальные свойства, не рассматривая функцию  $\varphi_\eta$ , которая будет сейчас описана. Однако для нас представляют интерес свойства (11) — (14) в неослабленном виде, а также сама функция  $\varphi_\eta$ .

Определим для  $\eta > 0$  числовую функцию  $\gamma_\eta(t)$ , положив

$$(15) \quad \gamma_\eta(t) = \begin{cases} t - \eta, & \text{если } t \geq \eta, \\ 0, & \text{если } -\eta \leq t \leq \eta, \\ t + \eta, & \text{если } t \leq -\eta. \end{cases}$$

Для любой действительной функции  $\varphi$  определим функцию  $\varphi_\eta$

$$(16) \quad \varphi_\eta(p) = \gamma_\eta(\varphi(p)).$$

Очевидно,

$$(17) \quad \text{spt}(\varphi_\eta) \subset \text{car}(\varphi), \text{ если функция } \varphi \text{ непрерывна.}$$

Для любых дизьной функции  $\varphi$ , дизьной или бемольной коцепи  $X$  и симплекса  $\sigma$  мы имеем

$$(18) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} (\varphi_\eta X \cdot \sigma) = \lim_{\eta \rightarrow 0} (X \cdot \varphi_\eta \sigma) = X \cdot \varphi \sigma = \varphi X \cdot \sigma.$$

Чтобы доказать (12), воспользуемся включениями (10) и (17); мы получаем

$$\text{spt}(\varphi_\eta X) \subset \text{car}(\varphi) \cap \text{spt}(X) = 0;$$

на основании (5)  $\varphi_\eta X = 0$ . В силу (18)  $\varphi X \cdot \sigma = 0$  для всех  $\sigma$ , так что  $\varphi X = 0$ .

Чтобы доказать (14), положим  $\psi(p) = 1 - \varphi(p)$ . Тогда  $\psi$  — дизьная функция и  $\text{car}(\psi) \cap \text{spt}(X) = 0$ ; поэтому  $\psi X = 0$  и

$$\varphi X = \varphi X + \psi X = (\varphi + \psi) X = X.$$

Отметим, далее, что  $|\varphi_\eta| \leq |\varphi|$ ,  $\mathfrak{L}_{\varphi_\eta} \leq \mathfrak{L}_\varphi$  и, следовательно,  $N_{\varphi_\eta}^{(r)} \leq N_\varphi^{(r)}$ . Поэтому, помечая значком  $\odot$  любую из двух норм, в силу (2.2) имеем

$$|\varphi_\eta X|^\odot = N_{\varphi_\eta}^r |X|^\odot \leq N_\varphi^{(r)} |X|^\odot.$$

Это неравенство вместе с (18) показывает, что

$$(19) \quad \text{wkl}_{\eta \rightarrow 0}^\odot \varphi_\eta X = \varphi X.$$

Чтобы доказать (11), заметим, что в силу (9) и (17)

$$\text{spt}(\varphi_\eta A) \subset \text{car}(\varphi) \cap \text{spt}(A) = 0,$$

и поэтому  $\varphi_\eta A = 0$ . На основании (19)

$$X \cdot \varphi A = \varphi X \cdot A = \lim_{\eta \rightarrow 0} (\varphi_\eta X \cdot A) = \lim_{\eta \rightarrow 0} (X \cdot \varphi_\eta A) = 0$$

для всех коцепей  $X$  (бемольных или дизьных в зависимости от того, является  $A$  бемольной или дизьной цепью); следовательно,  $\varphi A = 0$ .

Свойство 13) следует из (11), подобно тому как свойство (14) следует из (12).

Чтобы доказать (6), допустим сначала, что множество  $Q = \text{spt}(X)$  компактно. Тогда (П. III, лемма 1a) существует дизьная функция  $\varphi$ , равная единице на  $Q$  и нулю в некоторой окрестности носителя  $\text{spt}(A)$ . В силу (14)  $\varphi X = X$ , а в силу (11) или же в силу (9) и (4)  $\varphi A = 0$ ; поэтому

$$X \cdot A = \varphi X \cdot A = X \cdot \varphi A = 0.$$

Для произвольных  $X$  и  $A$  выберем, как в лемме (VI, 8с), функции  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ . Тогда на основании этой леммы, следующего за ней замечания и только что доказанного утверждения

$$X \cdot A = \lim_{i \rightarrow \infty} (\varphi_i X \cdot A) = 0.$$

Чтобы доказать (8), возьмем любую точку  $p$ , не входящую в  $\text{spt}(X)$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  так, чтобы было  $X \cdot \tau = 0$  для любого  $r$ -мерного симплекса  $\tau \subset U_\varepsilon(p)$ . Тогда для любого  $(r+1)$ -мерного симплекса  $\sigma \subset U_\varepsilon(p)$  мы будем иметь  $dX \cdot \sigma = X \cdot \partial\sigma = 0$ ; поэтому  $p$  не входит в  $\text{spt}(dX)$ .

Наконец, чтобы доказать (7), возьмем любую точку  $p$ , не входящую в  $\text{spt}(A)$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  так, чтобы было  $\bar{U}_\varepsilon(p) \cap \text{spt}(A) = \emptyset$ . Возьмем любую  $(r-1)$ -мерную дизную кощепь  $X$ , для которой  $D_X = 0$  вне  $U_\varepsilon(p)$ . Тогда в силу (8)  $\text{spt}(dX) \cap \text{spt}(A) = \emptyset$  и в силу (6)  $X \cdot \partial A = dX \cdot A = 0$ ; поэтому  $p$  не входит в  $\text{spt}(\partial A)$ .

Свойство (6) мы усилим в дизном случае:

(20)  $X \cdot A = 0$ , если  $\text{car}(D_X) \cap \text{spt}(A) = \emptyset$  (дизные  $X, A$ ).

Запишем  $D_X(p) = \omega(p) = \sum_{(\lambda)} \omega_\lambda(p) e^\lambda$ . Положим [см. (16)]

$$\omega_\lambda^\eta(p) = \gamma_\eta(\omega_\lambda(p)), \quad D_{X\eta}(p) = \omega^\eta(p) = \sum_{(\lambda)} \omega_\lambda^\eta(p) e^\lambda.$$

Тогда, очевидно,  $\text{wkl}^\# X^\eta = X$ . Кроме того,  $\text{spt}(X^\eta) \cap \text{spt}(A) = \emptyset$ , и поэтому  $X \cdot A = \lim (X^\eta \cdot A) = 0$ .

Из определения непрерывных цепей (VI, 7) ясно, что

(21)  $\text{spt}(\tilde{\alpha}) = \text{spt}(\alpha)$ .

Мы докажем, что

(22)  $|A + B| = |A| + |B|$ , если  $\text{spt}(A) \cap \text{spt}(B) = \emptyset$

[ср. (XI, 13.6)]. Допустим сначала, что цепи  $A$  и  $B$  компактны. Тогда (II, III, лемма 1а) существует дизная функция  $\varphi$ ,  $0 \leq \varphi(p) \leq 1$ , равная единице на  $\text{spt}(A)$  и нулю на  $\text{spt}(B)$ . Теперь из (1.17), (11) и (13) получаем

$$\begin{aligned} |A + B| &= |(\varphi + \psi)(A + B)| = \\ &= |\varphi(A + B)| + |\psi(A + B)| = |A| + |B|, \end{aligned}$$

где  $\psi(p) = 1 - \varphi(p)$ . В общем случае доказательство сводится к компактному случаю с помощью доказанной ниже теоремы 4А. Заметим, что если одна из масс  $|A|$ ,  $|B|$  бесконечна, то бесконечной будет и масса  $|A + B|$ .

Мы докажем [см. также (XI, 12.5)], что

$$(23) \quad |\varphi A| = |\langle \varphi \rangle A|, \text{ если масса } |A| \text{ бесконечна.}$$

Пусть  $\varphi_\eta$  — функция, определенная формулой (16),  $\varphi_\eta^+$  и  $\varphi_\eta^-$  — ее положительная и отрицательная части; тогда  $\varphi_\eta = \varphi_\eta^+ - \varphi_\eta^-$ ,  $\langle \varphi_\eta \rangle = \varphi_\eta^+ + \varphi_\eta^-$ . Так как  $\text{spt}(\varphi_\eta^+) \cap \text{spt}(\varphi_\eta^-) = 0$ , то мы имеем

$$|\varphi_\eta A| = |\varphi_\eta^+ A| + |(-\varphi_\eta^-) A| = |\varphi_\eta^+ A| + |\varphi_\eta^- A| = |\langle \varphi_\eta \rangle A|.$$

Поскольку  $|\varphi A - \varphi_\eta A| \leq |\varphi - \varphi_\eta| |A| \leq \eta |A|$  и т. д., отсюда сразу следует равенство (23).

Установим свойства (для любой из двух норм)

$$(24) \quad \varphi X \cdot A = 0, \text{ если } \varphi(p) = 0 \text{ в } \text{spt}(X) \cap \text{spt}(A),$$

$$(25) \quad |\varphi X \cdot A| \leq N |X| |A|, \text{ если } \varphi(p) \leq N \text{ в } \text{spt}(X) \cap \text{spt}(A) = 0.$$

Чтобы доказать (24), возьмем любое  $\eta > 0$ . В силу (10) и (17)

$$\text{spt}(\varphi_\eta X) \cap \text{spt}(A) \subset \text{car}(\varphi) \cap \text{spt}(X) \cap \text{spt}(A) = 0;$$

в силу (6)  $\varphi_\eta X \cdot A = 0$ . Теперь на основании (19)  $\varphi X \cdot A = 0$ .

Чтобы доказать (25), рассмотрим функцию  $\psi(p)$ , равную  $\varphi(p)$ ,  $N$  или  $-N$  в зависимости от того,  $|\varphi(p)| \leq N$ ,  $\varphi(p) > N$  или  $\varphi(p) < -N$ . Тогда  $\theta(p) = \varphi(p) - \psi(p) = 0$  в  $\text{spt}(X) \cap \text{spt}(A)$ , поэтому  $\theta X \cdot A = 0$  и

$$|\varphi X \cdot A| = |\psi X \cdot A| \leq |\psi| |X| |A| \leq N |X| |A|.$$

Наконец (для бемольных или дизельных  $A$  и  $X$ ),

$$(26) \quad |\varphi A| \leq N |A|, \text{ если } |\varphi(p)| \leq N \text{ в } \text{spt}(A),$$

$$(27) \quad |\varphi X| \leq N |X|, \text{ если } |\varphi(p)| \leq N \text{ в } \text{spt}(X).$$

В самом деле, возьмем любую коцепь  $X$ ; тогда в силу (25)  $|X \cdot \varphi A| \leq N |X| |A|$ , откуда и следует (26); подобным же образом доказывается (27).

**4. О некомпактных цепях.** Мы покажем, что бóльшая часть любой цепи лежит в компактном множестве. Тем самым будет обобщено свойство (VI, 4.7).

**Теорема 4А.** *Для любой бемольной цепи  $A$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такая компактная бемольная цепь  $A'$ , что*

$$(1) \quad \text{spt}(A') \subset \text{spt}(A), \quad |A' - A|^b < \varepsilon,$$

$$(2) \quad |A' - A| < \varepsilon, \text{ если масса } |A| \text{ конечна,}$$

$$(3) \quad |\partial(A' - A)| < \varepsilon, \text{ если массы } |A| \text{ и } |\partial A| \text{ конечны.}$$

Это справедливо также и в случае дизной нормы, если опустить (3).

Более того, если задано некоторое число  $N$ , то мы можем найти такое компактное множество  $Q$ , что для любой компактной дизной функции  $\varphi$ , удовлетворяющей условиям

$$(4) \quad 0 \leq \varphi(p) \leq 1, \quad \varphi(p) = 1 \text{ в } Q, \quad \mathfrak{L}_\varphi \leq N,$$

мы можем взять  $A' = \varphi A$ .

Чтобы получить (1), выберем [если  $\dim(A) = r$ ] такую  $r$ -мерную полиэдральную цепь  $B$ , что

$$|B - A|^\odot < \frac{\varepsilon}{N'}, \quad N' = 2 + (r + 1)N \text{ (для любой из двух норм),}$$

и положим  $Q = \text{spt}(B)$ . Тогда в силу (3.13) для любой дизной компактной функции  $\varphi$ , удовлетворяющей условиям (4),  $\varphi B = B$ , и неравенства (1.4) и (1.5) дают

$$|\varphi A - A|^\odot \leq |\varphi(A - B)|^\odot + |B - A|^\odot \leq (N_\varphi^{(r)} + 1)|B - A|^\odot < \varepsilon.$$

Если масса  $|A|$  конечна, то, выбрав  $\zeta \leq \varepsilon$  так, чтобы было  $|A_1 - A|^\odot < \zeta$  (рассматривается любая из двух норм), получаем, что  $|A_1| > |A| - \varepsilon$  ( $V$ , теорема 16B). Выберем  $B$  и  $Q$ , как и выше, для числа  $\zeta$  вместо  $\varepsilon$ . Тогда для цепи  $A' = \varphi A$ , определенной как указано выше, условие (1) выполняется; кроме того,  $|\varphi A| > |A| - \varepsilon$ . Полагая  $\psi(p) = 1 - \varphi(p)$  и пользуясь равенством (1.17), получаем

$$|A' - A| = |\varphi A| = |A| - |\varphi A| < \varepsilon.$$

Допустим, что обе массы  $|A|$  и  $|\partial A|$  конечны. Применяя только что доказанное и к  $A$ , и к  $\partial A$ , мы можем найти такое компактное множество  $Q_1$ , что для любой компактной дизной функции  $\varphi'$ , удовлетворяющей условиям (4) с множеством  $Q_1$  вместо  $Q$ ,

$$(5) \quad |\varphi' A - A| < \frac{\varepsilon}{2rN}, \quad |\varphi' \partial A - \partial A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть  $\varphi_1$  — такая функция. Положим

$$Q = \text{spt}(\varphi_1), \quad \psi_1(p) = 1 - \varphi_1(p), \quad A_1 = \psi_1 A.$$

Возьмем теперь любую компактную дизную функцию  $\varphi$ , удовлетворяющую условиям (4); тогда для цепи  $A' = \varphi A$  выполняются условия (1) и (2). Положим  $\psi(p) = 1 - \varphi(p)$ . Так как  $\mathfrak{L}_\psi \leq N$ ,

то из неравенств (1.8) и (5) для функции  $\varphi_1$  следует

$$|\psi \partial A_1 - \partial \psi A_1| \leq r \mathfrak{L}_\psi |A_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку  $\text{car}(\psi) \cap \text{spt}(\varphi_1) = 0$ , из (3.7), (3.9) и (3.11) получаем

$$\psi \partial A = \psi \partial (\varphi_1 + \psi_1) A = \psi \partial A_1, \quad \partial \psi A = \partial \psi A_1.$$

Кроме того, так как  $\varphi + \psi = 1$ , то

$$\varphi \partial A - \partial \varphi A = -(\psi \partial A - \partial \psi A);$$

поэтому

$$|\varphi \partial A - \partial \varphi A| = |\psi \partial A_1 - \partial \psi A_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сопоставляя это неравенство со вторым из неравенств (5) для функции  $\varphi$ , получаем неравенство (3).

Замечание. Если масса  $|A|$  конечна, то мы можем получить (1) и (2), отбросив в (4) предположение о том, что  $\mathfrak{L}_\varphi \leq N$  [в связи с этим см. (XI, 12)]. В самом деле, сначала найдем  $Q_1$ , так чтобы при  $N=1$  выполнялось первое из неравенств (5), и выберем соответствующую функцию  $\varphi_1$ . Положим  $Q = \text{spt}(\varphi_1)$ ,  $\psi_1 = 1 - \varphi_1$ . Теперь, если задана функция  $\varphi$ , определим, как и раньше, функцию  $\psi$ ; тогда  $0 \leq \psi(p) \leq \psi_1(p)$  и (в случае любой из двух норм) на основании (1.18) получаем

$$|\psi A|^Q \leq |\psi A| \leq |\psi_1 A| < \varepsilon.$$

Пример (а). Мы не можем получить условия (1), отбросив предположение о том, что  $\mathfrak{L}_\varphi \leq N$ . Чтобы это показать, обозначим через  $B_i$  ориентированный отрезок  $[i, i + 1/2^i]$  на действительной прямой и положим  $B = \sum B_i$ ,  $A = \partial B$ . Если дано произвольное компактное множество  $Q$ , то мы можем найти компактную дизъюнктивную функцию  $\varphi$ , удовлетворяющую первым двум из условий (4), для которой  $\varphi(i) = 1$  и  $\varphi(i + 1/2^i) = 0$  при некотором  $i$ . Тогда, очевидно,  $|A - \varphi A|^{\#} = |A - \varphi A|^b \geq 1$ .

Пример (б). Мы не можем в (3) отбросить предположение о том, что масса  $|A|$  конечна. Чтобы это показать, построим следующим образом одномерный цикл  $A$  в плоскости  $E^2$ . Пусть  $Q_i$  — квадрат с вершинами  $(\pm 2^i, \pm 2^i)$ . Пусть, далее,  $B_i$  — двумерная цепь, составленная из  $2^{2i}$  узких прямоугольников ширины  $1/2^{4i}$ , каждый из которых идет от нижнего основания квадрата  $Q_i$  к его верхнему основанию, причем расстояния между двумя соседними прямоугольниками одинаковы; тогда  $|B_i| = 2/2^i$ . Пусть, наконец,  $C_i$  — цепь, составленная из подобного же множества

прямоугольников, идущих от левой стороны квадрата  $Q_i$  к правой. Положим

$$B = \sum (B_i + C_i), \quad A = \partial B.$$

Тогда  $\partial A = 0$ . Но для любой функции, не тождественно равной нулю, очевидно, масса  $|\varphi A|$  бесконечна, а если функция является гладкой и отлична от постоянной, то мы легко видим, что масса  $|\partial \varphi A|$  бесконечна.

Пользуясь условием (1) теоремы 4А, мы можем дать очень короткое доказательство того, что в случае любой из двух норм

$$(6) \quad |A|^\odot = \sup \{X \cdot A : X \text{ -- компактные коцепи, } |X|^\odot \leq 1\},$$

и тем самым доказать (VI, 8.8) и лемму (VI, 8d). Выберем функцию  $\varphi$  для  $\varepsilon' = \varepsilon/2$  и коцепь  $Y$  так, чтобы было  $|Y|^\odot \leq 1$  и  $Y \cdot A > |A|^\odot - \varepsilon/2$ , и положим  $X = \varphi Y$ . Сразу находим  $X \cdot A = Y \cdot \varphi A > |A|^\odot - \varepsilon$ .

**5. О полиэдральной аппроксимации.** Мы докажем теорему, аналогичную теореме 4А, но утверждающую, что можно найти полиэдральную цепь. Для доказательства условия (5) нам потребуется лемма 5b.

*Лемма 5a. Если заданы  $r$ -мерная полиэдральная цепь  $A$ , дизъюнктная функция  $\varphi$  и число  $\varepsilon > 0$ , то существует такая полиэдральная цепь  $B$ , что  $\text{spt}(B) \subset \text{spt}(A)$  и*

$$(1) \quad |B - \varphi A| < \varepsilon, \quad |\partial B - \varphi \partial A| < r \mathfrak{L}_\varphi |A| + \varepsilon.$$

Пусть, скажем,  $A = \sum a_i \sigma_i$ . Положим  $\varepsilon' = 2\varepsilon \sum |a_i|/3$  и выберем полиэдральные цепи  $H_i$  и  $K_i$ , удовлетворяющие условиям (1.10) для  $\sigma_i$  и  $\varepsilon'$ . Положим  $B = \sum a_i H_i$ ; тогда сразу ясно, что неравенства (1) выполняются.

*Замечание.* Как видно из доказательства, мы можем потребовать, чтобы цепь  $B$  лежала в произвольной окрестности носителя  $\text{spt}(\varphi)$ .

*Лемма 5b. Если заданы  $r$ -мерная полиэдральная цепь  $A$  и числа  $\eta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , то существует такая полиэдральная цепь  $D$ , что*

$$(2) \quad D \subset U_\eta(\text{spt}(A)), \quad |A - \partial D| + |D| < \left[1 + \frac{r+1}{\eta}\right] |A|^b + \varepsilon.$$

Возьмем такое число  $\zeta < \eta$ , что

$$\frac{(r+1)|A|^b}{\zeta} < \frac{(r+1)|A|^b}{\eta} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Выберем полиэдральную цепь  $D'$ , для которой

$$|A - \partial D'| + |D'| < |A|^b + \varepsilon', \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{8 + 2(r+1)/\zeta}.$$

Определим, как в (V, 12.3), такую функцию  $\varphi = \varphi_{Q,\zeta}$ , что  $\varphi(p) = 1$  в  $Q = \text{spt}(A)$ ,  $\varphi(p) = 0$  вне  $U_\zeta(Q)$  и  $\mathfrak{L}_\varphi = 1/\zeta$ . Для цепи  $D'$ , функции  $\varphi$  и числа  $\varepsilon'$  выберем цепь  $D$  в соответствии с предыдущей леммой и замечанием. Тогда

$$|D - \varphi D'| < \varepsilon', \quad |\partial D - \varphi \partial D'| < (r+1) \mathfrak{L}_\varphi |D'| + \varepsilon'.$$

В силу (3.13)  $\varphi A = A$ . Теперь

$$\begin{aligned} |A - \partial D| + |D| &\leq |\varphi(A - \partial D')| + |\partial D - \varphi \partial D'| + |D - \varphi D'| + |\varphi D'| \leq \\ &\leq |A - \partial D'| + (r+1) \mathfrak{L}_\varphi |D'| + 2\varepsilon' + |D'| \leq \\ &\leq \left[1 + \frac{r+1}{\zeta}\right] (|A - \partial D'| + |D'|) + 2\varepsilon \leq \\ &\leq \left[1 + \frac{r+1}{\zeta}\right] |A|^b + \frac{3\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

откуда и следует (2).

**Теорема 5А.** Для любой бемольной цепи  $A$ , любой окрестности  $U$  множества  $\text{spt}(A)$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такая полиэдральная цепь  $B$ , что

$$(3) \quad \text{spt}(B) \subset U, \quad |B - A|^b < \varepsilon,$$

$$(4) \quad |B| < |A| + \varepsilon, \text{ если масса } |A| \text{ конечна,}$$

$$(5) \quad |\partial B| < |\partial A| + \varepsilon, \text{ если массы } |A| \text{ и } |\partial A| \text{ конечны.}$$

Это же, без условия (5), справедливо и в случае дизной нормы.

Доказательство в случае любой из двух норм одинаково; мы рассмотрим случай бемольной нормы. В силу теоремы 4А мы, очевидно, можем считать, что множество  $Q = \text{spt}(A)$  компактно. Пусть, скажем,  $U_{2\eta}(Q) \subset U$ .

Чтобы доказать (3), выберем такую полиэдральную цепь  $B_1$ , что

$$|B_1 - A|^b < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2[1 + (r+1)/\eta]}.$$

Определим функцию  $\varphi = \varphi_{Q,\eta}$ , как в доказательстве последней леммы. Положим  $B_2 = \varphi B_1$ . Так как  $\varphi A = A$ , то мы имеем

$$|B_2 - A|^b = |\varphi(B_1 - A)|^b \leq N_\varphi^{(r)} |B_1 - A|^b < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если  $B_1 = \sum b_i \sigma_i$ , то  $B_2 = \sum b_i \varphi \sigma_i$ . Аппроксимируя функцию  $\varphi$  клеточно-постоянной в каждом симплексе  $\sigma_i$  функцией  $\varphi'$ , мы получим в окрестности  $U$  некоторую полиэдральную цепь  $B$ , для которой  $|B - B_2| < \varepsilon/2$ ; отсюда следует (3).

Допустим, что масса  $|A|$  конечна. Мы можем в то же время что проведенным доказательстве считать, что  $|B_1| < |A| + \varepsilon$ . Так как  $|B_2| \leq |B_1|$  и мы, очевидно, можем взять  $|B| \leq |B_2|$ , то мы получаем  $|B| < |A| + \varepsilon$ .

Допустим, наконец, что массы  $|A|$  и  $|\partial A|$  конечны. Выберем  $\varepsilon'$  так, чтобы было  $(2 + r/\eta) \cdot 2\varepsilon' \leq \varepsilon$ . По только что доказанному, мы можем выбрать такие полиэдральные цепи  $H$  и  $K$  в  $U_\eta(Q)$ , что

$$\begin{aligned} |H - A|^b &< \varepsilon', & |H| &< |A| + \varepsilon', \\ |K - \partial A|^b &< \varepsilon, & |K| &< |\partial A| + \varepsilon'. \end{aligned}$$

Теперь  $|\partial H - K|^b < 2\varepsilon'$ , и в силу последней леммы в  $U$  существует такая полиэдральная цепь  $D$ , что

$$|\partial H - K - \partial D| + |D| < \left(1 + \frac{r}{\eta}\right) \cdot 2\varepsilon' + \varepsilon'.$$

Положим  $B = H - D$ . Тогда

$$\begin{aligned} |B - A|^b &\leq |H - A|^b + |D| < \varepsilon, \\ |B| &\leq |H| + |D| < |A| + \varepsilon, \\ |\partial B| &\leq |\partial H - K - \partial D| + |K| < |\partial A| + \varepsilon, \end{aligned}$$

чем и завершается доказательство.

**6.  $r$ -вектор  $r$ -мерной цепи.** Вспомним определение  $r$ -вектора  $\{A\}$  клеточной (а следовательно, и полиэдральной)  $r$ -мерной цепи  $A$ , данное в (III, 2). Распространим это определение на все дизъюнктные — и поэтому [см. теорему (V, 14B)] на все бемольные — цепи, положив

(1)  $\{A\} = \lim \{A_i\}$ , если  $A = \lim^\# A_i$ ,  $A_i$  — полиэдральные цепи. Мы покажем, что этот предел существует и не зависит от выбора последовательности и что

$$(2) \quad |\{A\}|_0 \leq |A|^\#.$$

Сначала мы докажем неравенство (2) для полиэдральной цепи  $A$ . Если задано  $\varepsilon > 0$ , то мы запишем  $A = \sum a_i \sigma_i$  и выберем симплексы  $\sigma_i$ , векторы  $v_i$  и  $(r+1)$ -мерную цепь  $D$  так, чтобы было

$$\frac{\sum |a_i| |\sigma_i| |v_i|}{r+1} + \left| \sum a_i T_{v_i} \sigma_i - \partial D \right| + |D| < |A|^\# + \varepsilon$$

В силу теоремы (III, 2B)  $\{\partial D\} = 0$ . Ясно, что  $\{T_v \sigma\} = \{\sigma\}$  и  $|\{B\}|_0 \leq |B|$  для любой полиэдральной цепи  $B$ . Поэтому

$$A = - \sum a_i (T_{v_i} \sigma_i - \sigma_i) + (\sum a_i T_{v_i} \sigma_i - \partial D) + \partial D,$$

$$|\{A\}|_0 \leq |\sum a_i T_{v_i} \sigma_i - \partial D| < |A|^{\#} + \varepsilon.$$

Другое доказательство можно провести следующим образом. Положим  $\alpha = \{A\}$  и выберем такой  $r$ -ковектор  $\omega_0$ , что  $|\omega_0|_0 = 1$ ,  $\omega_0 \cdot \alpha = |\alpha|_0$ . Определим  $X$  условием  $D_X(p) = \omega_0$  (для всех  $p$ ); тогда  $|X|^{\#} = |X| = 1$ , и на основании (III, 4.1) мы получаем

$$X \cdot A = \omega_0 \cdot \{A\} = |\{A\}|_0.$$

Так как  $|X \cdot A| \leq |X|^{\#} |A|^{\#}$ , то неравенство (2) доказано.

Отсюда следует, что определение (1) допустимо и что неравенство (2) имеет место для любых дизельных цепей  $A$ .

Равенство (III, 4.1) теперь переходит в равенство

(3)  $X \cdot A = \omega_0 \cdot \{A\}$ , если  $D_X(p) = \omega_0$  для всех  $p$  ( $A$  — дизельная цепь).

**Теорема 6A.** *Отображение  $\Phi(A) = \{A\}$  непрерывно в пространстве  $C_r^{\#}$ .*

Это следует из (2).

**7. Дизельные цепи в точке.** Мы говорим, что дизельная цепь  $A \neq 0$  есть *цепь в точке*  $p$ , если  $\text{spt}(A) = p$ . Такую цепь мы будем называть *атомной*; конечную сумму таких цепей мы будем называть *молекулярной* цепью. Отличных от нуля  $r$ -мерных бемольных цепей в точке  $p$  при  $r > 0$  не существует, см. § 9.

**Теорема 7A.** *Для любой точки  $p$  и любого  $r$ -вектора  $\alpha \neq 0$  существует такая дизельная цепь  $A$  в точке  $p$ , что  $\{A\} = \alpha$ .*

Мы можем считать, что  $\alpha$  — простой  $r$ -вектор. Пусть  $\sigma_0$  — некоторый  $r$ -мерный куб, одной из вершин которого является точка  $p$  и для которого  $\{\sigma_0\} = \alpha$ . Пусть  $\sigma_i$  — тот же куб, сжатый к точке  $p$  в  $2^i$  раз; положим  $A_i = 2^{ri} \sigma_i$ ,  $A = \lim^{\#} A_i$ . Пусть, скажем, длина ребра куба  $\sigma_i$  равна  $h/2^i$ . Мы можем разбить  $\sigma_i$  на  $2^r$  кубов  $\sigma_{ik}$  и найти такие векторы  $v_{ik}$ , что

$$\sigma_{ik} = T_{v_{ik}} \sigma_{i+1}, \quad |v_{ik}| \leq \frac{d}{2^i}, \quad d := \frac{r^{1/2} h}{2}.$$

Так как  $|\sigma_{i+1}| = h^r/2^{r(i+1)}$ , то на основании (V, 6.3) мы получаем

$$A_{i+1} - A = 2^{r_i}(2^r \sigma_{i+1} - \sum_k \sigma_{ik}) = 2^{r_i} \sum_k (\sigma_{i+1} - T_{v_{ik}} \sigma_{i+1}),$$

$$|A_{i+1} - A|^\# \leq \frac{2^{r_i+r} |\sigma_{i+1}| d/2^i}{r+1} \leq \frac{r^{1/2} h^{r+1}}{(r+1) 2^{i+1}},$$

чем доказано существование предела  $A$ . Так как  $\{A_i\} = \alpha$ , то  $\{A\} = \alpha$ . Очевидно,  $\text{spt}(A) = p$ .

**Теорема 7В.** *Между  $r$ -мерными дизельными цепями в точке  $p$  и отличными от нуля  $r$ -векторами существует взаимно однозначное соответствие, определяемое условием  $A \rightarrow \{A\}$ .*

На основании предыдущей теоремы нам нужно только показать, что если  $\{A\} = 0$ , то  $A = 0$ . Возьмем любую  $r$ -мерную дизельную коцепь  $X$ . Определим коцепи  $X_0$  и  $Y$  условиями

$$D_{X_0}(q) = D_X(p) \text{ для всех } q; \quad Y = X - X_0.$$

Тогда  $D_Y(p) = 0$  и в силу (3.20)  $Y \cdot A = 0$ . Поэтому, согласно (6.3),

$$X \cdot A = X_0 \cdot A = D_X(p) \cdot \{A\} = 0, \quad A = 0.$$

**Теорема 7С.** *Для любой дизельной цепи  $A$  в точке  $p$*

$$(1) \quad X \cdot A = D_X(p) \cdot \{A\}, \quad |A|^\# = |A| = |\{A\}|_0.$$

Первое соотношение было только что доказано. В силу (6.2) нам нужно только показать, что для любого  $\varepsilon > 0$   $|A| < |\alpha|_0 + \varepsilon$ , где  $\alpha = \{A\}$ . Допустим сначала, что  $\alpha$  — простой  $r$ -вектор. В силу предыдущей теоремы мы можем представить  $A$  в таком же виде, как в доказательстве теоремы 7А. В этом случае

$$|A_i| = |A_0| = |\sigma_0| = |\alpha|, \quad |A| \leq |\alpha| = |\alpha|_0.$$

Для произвольного  $\alpha$  выберем на основании (I, 13.1) такие простые  $r$ -векторы  $\alpha_i$ , что

$$\alpha = \sum \alpha_i, \quad \sum |\alpha_i| < |\alpha|_0 + \varepsilon.$$

В соответствии с теоремой 7А выберем дизельные цепи  $A_i$  в точке  $p$  так, чтобы было  $\{A_i\} = \alpha_i$ . Тогда  $\{\sum A_i\} = \sum \alpha_i = \alpha$ , и поэтому  $A = \sum A_i$ . По доказанному выше  $|A_i| \leq |\alpha_i|$ . Следовательно,

$$|A| \leq \sum |A_i| \leq \sum |\alpha_i| < |\alpha|_0 + \varepsilon.$$

Мы докажем теорему, касающуюся аппроксимации дизельных цепей в точке  $p$ . Покажем сначала, что

$$(2) \quad |A|^\# \leq |\{A\}|_0 + \frac{\varepsilon |A|}{r+1}, \text{ если } \text{spt}(A) \subset U_\varepsilon(p).$$

Допустим сначала, что  $A$  — полиэдральная цепь. Пусть  $N$  обозначает число, стоящее в правой части. Достаточно показать, что  $|X \cdot A| \leq N |X|^\#$  для любой  $r$ -мерной диэзной коцепи  $X$ . Положим

$$\omega(q) = D_X(q), \quad \omega_0(q) = \omega(p) \quad \text{для всех } q.$$

Используя (6.3), имеем

$$\begin{aligned} X \cdot A &= \int_A \omega_0(q) dq + \int_A [\omega(q) - \omega_0(q)] dq, \\ \left| \int_A \omega_0(q) dq \right| &= |\omega(p) \cdot \{A\}| \leq |\omega(p)|_0 |\{A\}|_0 \leq |X|^\# |\{A\}|_0, \\ \left| \int_A [\omega(q) - \omega_0(q)] dq \right| &\leq \mathfrak{L}_0(\omega) \varepsilon |A| \leq \frac{|X|^\# \varepsilon |A|}{r+1}, \end{aligned}$$

откуда мы и получаем неравенство (2). Для произвольной диэзной цепи  $A$  неравенство (2) будет следовать из только что доказанного, если воспользоваться теоремой 5A и соотношением (V, 16.1).

**Теорема 7D.** Пусть  $A_1, A_2, \dots$  — такая последовательность цепей, что для некоторого числа  $N$  и  $r$ -вектора  $\alpha$

$$(3) \quad |A_i| \leq N, \quad \text{spt}(A_i) \subset U_{\varepsilon_i}(p), \quad \varepsilon_i \rightarrow 0, \quad \{A_i\} \rightarrow \alpha.$$

Тогда

$$(4) \quad \text{Предел } A = \lim^\# A_i \text{ существует и } \{A\} = \alpha.$$

Мы можем считать, что  $\varepsilon_j \leq \varepsilon_i$  при  $j > i$ . В силу неравенства (2)

$$|A_j - A_i|^\# \leq |\{A_j\} - \{A_i\}|_0 + \frac{2N\varepsilon_i}{r+1}, \quad \text{если } i \leq j.$$

Поэтому предел  $A$  существует. По теореме 6A  $\{A\} = \alpha$ .

**Пример.** В (3) мы не можем заменить неравенство  $|A_i| \leq N$  неравенством  $|A_i|^\# \leq N$ . В самом деле, пусть  $\sigma_i$  — некоторый  $(r+1)$ -мерный куб с ребром  $1/2^i$ , так что  $|\sigma_i| = 1/2^{(r+1)i}$ ,  $|\partial\sigma_i| = 2(r+1)/2^{ri}$ . Положим  $A_i = 2^{(r+1)i} \partial\sigma_i$ . Тогда

$$|A_i|^\# \leq 2^{(r+1)i} |\sigma_i| = 1, \quad \{A_i\} = 0,$$

и если мы выберем кубы  $\sigma_i$  так, чтобы их соответствующие грани были параллельны, но чтобы ориентации кубов  $\sigma_i$  и  $\sigma_{i+1}$  при любом  $i$  были противоположны, то предел  $\lim^\# A_i$  не будет существовать.

**8. Множество молекулярных цепей всюду плотно.** Докажем теорему.

**Теорема 8А.** *Множество  $r$ -мерных молекулярных цепей плотно в  $C_r^\#$ .*

Нам нужно только показать, что если заданы симплекс  $\sigma$  и число  $\varepsilon > 0$ , то существуют такие цепи  $A_1, \dots, A_m$  в некоторых точках  $p_1, \dots, p_m$ , что  $|\sigma - \sum A_i|^\# \leq \varepsilon$ . Запишем  $\sigma = \sum \sigma_i$ , где симплексы  $\sigma_i$  имеют диаметр  $\leq \zeta = (r+1)\varepsilon/(2|\sigma|)$ . Выберем произвольно точки  $p_i \in \sigma_i$ , и пусть  $A_i$  — цепь в точке  $p_i$ , для которой  $\{A_i\} = \{\sigma_i\}$ . Тогда неравенство (7.2) дает

$$|A_i - \sigma_i|^\# \leq \frac{\zeta(|A_i| + |\sigma_i|)}{r+1} = \frac{2\zeta|\sigma_i|}{r+1},$$

откуда и следует нужное нам неравенство.

Докажем теорему, дающую в случае цепей конечной массы более точную информацию.

**Теорема 8В.** *Пусть  $A$  — дизевная  $r$ -мерная цепь конечной массы в  $E^n$ . Тогда для всякого  $\varepsilon > 0$  существуют компактное множество  $Q$  и число  $\zeta > 0$ , обладающие следующим свойством. Пусть  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  — такие дизевные функции, образующие разложение единицы, что*

$$(1) \quad \varphi_1(p) + \dots + \varphi_m(p) = 1 \text{ в } Q, \text{ diam}(\text{spt}(\varphi_i)) \leq \zeta \quad (i \geq 1).$$

*Пусть  $A_i$  — дизевная  $r$ -мерная цепь в точке  $p_i \in \text{spt}(\varphi_i)$ , причем  $\{A_i\} = \{\varphi_i A\}$ . Тогда*

$$(2) \quad \left| \sum_{i=1}^m A_i - A \right|^\# < \varepsilon, \quad \sum |A_i| = \left| \sum A_i \right| \leq |A|.$$

Выберем множество  $Q$  в соответствии с теоремой 4А и следующим за ней замечанием для числа  $\varepsilon/2$ ; положим  $\zeta = (r+1)\varepsilon/(4|A|)$ . Пусть теперь заданы функции  $\varphi_i$ . Тогда из (7.2) получаем

$$|A_i - \varphi_i A|^\# \leq \frac{\zeta(|A_i| + |\varphi_i A|)}{r+1} \leq \frac{2\zeta|\varphi_i A|}{r+1}.$$

На основании (1.17) и (1.7)  $\sum |\varphi_i A| \leq |A|$ . В силу выбора множества  $Q$  имеем  $|\varphi_1 + \dots + \varphi_m A - A|^\# < \varepsilon/2$ . Теперь

$$\left| \sum_{i=1}^m A_i - \sum_{i=1}^m \varphi_i A \right|^\# \leq \frac{2\zeta \sum |\varphi_i A|}{r+1} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

и первое из неравенства (2) доказано. Далее [в силу (3.22)],

$$|\sum A_i| = \sum |A_i| \leq \sum |\varphi_i A| \leq |A|.$$

В качестве приложения этой теоремы мы покажем, каким образом масса цепи может быть аппроксимирована дизъюнктивными нормами „частей“ этой цепи. См. в связи с этим теорему (XI, 13A).

**Теорема 8C.** *В предыдущей теореме мы можем выбрать  $Q$  и  $\zeta > 0$  так, чтобы было*

$$\sum_{i=1}^m |\varphi_i A|^{\#} > |A| - \varepsilon,$$

где функции  $\varphi_i$  удовлетворяют тем же условиям, что и раньше.

Выберем  $\zeta' \leq \varepsilon/2$  так, чтобы из  $|B - A|^{\#} \leq \zeta'$  следовало  $|B| > |A| - \varepsilon/2$  (V, теорема 16B). Теперь выберем  $Q$  и  $\zeta$  в соответствии с предыдущей теоремой, взяв  $\zeta'$  вместо  $\varepsilon$ . Тогда, если функции  $\varphi_i$  удовлетворяют указанным условиям, то выписанные выше неравенства дают

$$|\varphi_i A|^{\#} \geq |A_i|^{\#} - \frac{2\zeta |\varphi_i A|}{r+1} = |A_i| - \frac{2\zeta |\varphi_i A|}{r+1}$$

и

$$\sum_{i=1}^m |\varphi_i A|^{\#} \geq |\sum A_i| - \frac{2\zeta |A|}{r+1} > \left(|A| - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

**9. Бемольные  $r$ -мерные цепи в  $E^{r-k}$  равны нулю.** Докажем (пользуясь результатами гл. X), что в отличие от теорем предыдущего параграфа имеет место.

**Теорема 9A.** *Любая  $r$ -мерная бемольная цепь  $A$  пространства  $E^n$ , для которой  $\text{spt}(A) \subset E^s$ , при  $s < r$  равна нулю.*

Допустим, что  $E^s$  является координатной плоскостью  $(x_1, \dots, x_s)$ . Положим

$$(1) \quad f_{\gamma}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_s, \gamma_{\gamma}(x_{s+1}), \dots, \gamma_{\gamma}(x_n)),$$

где  $\gamma_{\gamma}$  — функция, определенная в (3.15). Тогда

$$(2) \quad \mathfrak{L}_{f_{\gamma}} = 1, \quad |f_{\gamma}(p) - p| \leq n\gamma, \quad f_{\gamma}(U_{\gamma}(E^s)) \subset E^s$$

и отображение  $f_{\gamma}$  переводит полиэдральные цепи в полиэдральные же цепи. (Применяем  $\gamma_{\gamma}$  к каждой координате по очереди.) Кроме того,

$$(3) \quad |f_{\gamma}(B)|^b \leq |B|^b \quad \text{для любых } r\text{-мерных полиэдральных цепей } B,$$

что сразу следует из неравенства

$$|f_{\eta}(B) - \partial f_{\eta}(D)| + |f_{\eta}(D)| = |f_{\eta}(B - \partial D)| + |f_{\eta}(D)| \leq \leq |B - \partial D| + |D|$$

(где  $D$  — любая  $(r+1)$ -мерная полиэдральная цепь).

Допустим, что  $A \neq 0$ . Тогда  $|A|^b = a > 0$ . Пусть  $\varepsilon = a/4$ . Выберем полиэдральную цепь  $B$ , для которой  $|B - A|^b < \varepsilon$ . В силу (2) и леммы (X, 5a) при достаточно малом  $\eta$

$$|f_{\eta}(B) - B|^b \leq n\eta(|B| + |\partial B|) < \varepsilon.$$

По теореме 5A мы можем выбрать такую полиэдральную цепь  $B'$ , что

$$\text{spt}(B') \subset U_{\eta}(E^s), \quad |B' - A|^b < \varepsilon.$$

Теперь  $f_{\eta}(B')$  есть  $r$ -мерная полиэдральная цепь в  $E^s$ , и поэтому она равна нулю. Далее,  $|B - B'|^b < 2\varepsilon$ ; применяя неравенство (3) к разности  $B - B'$ , получаем

$$|f_{\eta}B|^b = |f_{\eta}(B - B')|^b \leq |B - B'|^b < 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|A|^b \leq |A - B|^b + |B - f_{\eta}B|^b + |f_{\eta}B|^b < 4\varepsilon = |A|^b;$$

это противоречие доказывает, что  $A = 0$ .

Докажем теорему, являющуюся частичным обращением теоремы (V, 16C); из нее сразу следует предыдущая теорема (аналогичная теорема для дизной нормы не справедлива, см. § 7).

**Теорема 9B.** Пусть  $E'$  — некоторое подпространство пространства  $E$ , и пусть  $A$  — бемольная цепь пространства  $E$ , у которой  $\text{spt}(A) \subset E'$ . Тогда  $A$  можно рассматривать как цепь пространства  $E'$ .

По существу мы следуем доказательству предыдущей теоремы. Пусть задано  $\varepsilon_i = 1/2^i$ . Выберем  $B_i$ ,  $\eta_i$ ,  $B'_i$  так, чтобы было  $B_i^* = f_{\eta_i}B'_i \subset E'$ . Мы не имеем  $B_i^* = 0$ ; однако  $|A - B_i^*|_E^b < 4/2^i$ . Поэтому  $\lim_E B_i^* = A$ . Теперь  $|B_j^* - B_i^*|_{E'}^b = |B_j^* - B_i^*|_E^b \rightarrow 0$  [см. теорему (V, 16C)] и предел  $\lim_E B_i^* = A^*$  существует. Но  $A$  в точности совпадает с цепью  $A^*$ , рассматриваемой как цепь пространства  $E$  (см. теорему, на которую мы ссылались).

**10. Бемольные коцепи в комплексах.** Пусть  $K$  — некоторый комплекс (П. II, 2). Пусть  $\sigma$  — какая-либо клетка комплекса  $K$ ; ее пространство  $P(\sigma)$  является аффинным пространством, которое

можно сделать евклидовым, выбрав метрику. *Бемольная  $r$ -мерная коцепь  $X$  в клетке  $\sigma$*  есть линейная функция  $X \cdot A$  от  $r$ -мерных полиэдральных цепей  $A$  в  $\sigma$ , для которой  $|X \cdot A| \leq N |A|^b$  при некотором  $N$ ; это условие не зависит от выбора метрики. Если  $\pi$  определяется, как в лемме (V, 2b), то мы можем продолжить  $X$  на  $P(\sigma)$ , положив  $X \cdot A = X \cdot \pi A$ ; при этом норма  $|X|^b$  не изменится. Как было отмечено в (V, 3), мы можем найти  $|A|^b$ , рассматривая  $(r+1)$ -мерные полиэдральные цепи в  $\sigma$ ; поэтому мы можем найти  $|X|^b$ , рассматривая только цепи в  $\sigma$ .

*Бемольная  $r$ -мерная коцепь  $X$  в  $K$*  есть такая совокупность  $r$ -мерных бемольных коцепей  $X(\sigma)$  в клетках  $\sigma$  комплекса  $K$ , что если  $\sigma_1$  — грань клетки  $\sigma$ , то часть коцепи  $X(\sigma)$  в  $\sigma_1$  равна  $X(\sigma_1)$ ; иными словами,  $X(\sigma) \cdot A = X(\sigma_1) \cdot A$  для полиэдральных цепей  $A$  в  $\sigma_1$ . Мы будем пользоваться одним и тем же символом  $X$  для всех  $X(\sigma)$ , когда нет необходимости различать их. *Полиэдральная  $r$ -мерная цепь  $A$  в  $K$*  есть сумма  $\sum A_i$  полиэдральных цепей в клетках  $\sigma_i$  комплекса  $K$ ; положим  $X \cdot A = \sum X(\sigma_i) \cdot A_i$ . Результат не зависит от выбора представления цепи  $A$ .

Допустим, что  $K'$  — некоторое подразделение комплекса  $K$ . Пусть  $X$  — бемольная коцепь в  $K$ . Для каждой клетки  $\sigma'$  комплекса  $K'$  выберем клетку  $\sigma$  комплекса  $K$ , ее содержащую; положим  $X'(\sigma') = X(\sigma)$  в  $\sigma'$ . Это определение не зависит от выбора клетки  $\sigma$ . Таким образом определяется бемольная коцепь  $X'$  в  $K'$ . Обратно, пусть задана коцепь  $X'$  в комплексе  $K'$ . Любая полиэдральная цепь  $A$  в клетке  $\sigma$  комплекса  $K$  может быть представлена в виде  $\sum A_i$ , где  $A_i$  — цепь в клетке  $\sigma'_i$  комплекса  $K'$ ; положим  $X(\sigma) \cdot A = \sum X'(\sigma'_i) \cdot A_i$ . Результат, очевидно, не зависит от представления цепи  $A$  и определяет некоторую бемольную коцепь  $X(\sigma)$  в  $\sigma$ ; эти коцепи дают бемольную коцепь  $X$  в  $K$ . Таким образом, между бемольными коцепями  $X$  в  $K$  и бемольными коцепями  $X'$  в  $K'$  определено взаимно однозначное соответствие; мы можем теперь говорить о бемольной коцепи  $X$  в произвольном полиэдре  $P$ . Если  $A$  — некоторая полиэдральная цепь в  $P$ , то мы можем с помощью любого разбиения полиэдра  $P$  определить  $X \cdot A$ , и результат не будет зависеть от выбора разбиения.

**Лемма 10а.** *Любая бемольная коцепь в подкомплексе  $K_1$  комплекса  $K$  может быть продолжена в бемольную коцепь в  $K$ .*

Достаточно показать, что если бемольная коцепь  $X$  определена на границе  $d\sigma$  клетки  $\sigma$ , то ее можно продолжить на  $\sigma$ . Выберем точку  $p_0 \in \text{int}(\sigma)$  и положим  $p_t = (1-t)p_0 + tp$ ,  $p \in d\sigma$ . Пусть  $Q$  — подмножество клетки  $\sigma$ , состоящее из тех точек  $p_t$ , для которых

$t \geq 1/2$ . Положим  $\pi(p_t) = p$ ; тогда  $\pi$  отображает  $Q$  в  $\partial\sigma$ . Очевидно, для любой полиэдральной цепи  $A$  в  $Q$   $\pi A$  есть полиэдральная цепь в  $\partial\sigma$ ; полагая  $X_1 \cdot A = X \cdot \pi A$ , мы определяем некоторую бемольную коцепь  $X_1$  в  $Q$ . Положим  $\varphi(p_t) = 2t - 1$  в  $Q$  и  $X = \varphi X_1$  в  $Q$ ; это — бемольная коцепь в  $Q$  (см. § 1). Отметим, что  $X$  в  $\partial\sigma$  не изменяется и что  $X = 0$  в подмножестве множества  $Q$ , где  $t = 1/2$ . Полагая  $X = 0$  в  $\sigma \setminus Q$ , мы завершаем определение коцепи  $X$ . Легко видеть, что  $X$  есть бемольная коцепь.

**Лемма 10b.** Пусть  $X$  — некоторый  $r$ -мерный бемольный коцикл ( $r > 0$ ) в ограниченном звездообразном подмножестве  $Q$  комплекса  $K$ . Тогда  $X$  является в  $Q$  кограницей.

**Замечание.**  $Q$  может, например, быть клеткой комплекса  $K$  или же звездой клетки.

Пусть, скажем,  $Q$  звездообразно относительно точки  $p_0$ . Положим

$$(1) \quad Y \cdot A = X \cdot J(p_0, A), \quad A \text{ — полиэдральные цепи в } Q.$$

Пользуясь формулой (П. II, 10.3) и тем фактом, что  $dX = 0$ , получаем

$$dY \cdot B = Y \cdot \partial B = X \cdot J(p_0, \partial B) = X \cdot [B - \partial J(p_0, B)] = X \cdot B,$$

и  $dY = X$  в  $Q$ . Очевидно, массы  $|Y|$  и  $|dY|$  конечны, и поэтому  $Y$  есть бемольная коцепь в  $Q$  [см. доказательство теоремы (V, 4A)].

Рассмотрим теперь дифференциальные формы в  $K$ . Под  $r$ -формой  $\omega(q)$  в комплексе  $K$  мы понимаем множество  $r$ -форм  $\omega(\sigma, q)$  в клетках  $\sigma$  комплекса  $K$ , обладающее следующим свойством. Если  $\sigma_1$  — грань клетки  $\sigma$ , то при  $q \in \sigma_1$  мы имеем  $\omega(\sigma, q) \cdot \alpha = \omega(\sigma_1, q) \cdot \alpha$  для всех  $r$ -векторов  $\alpha$  в  $\sigma_1$ ; таким образом, часть формы  $\omega(\sigma, q)$  в клетке  $\sigma_1$  равна  $\omega(\sigma_1, q)$ . Мы можем, как в (IX, 6), определить бемольные формы в  $K$ ; они потребуются только при рассмотрении произведений в теореме 12A.

**11. Элементарные бемольные коцепи в комплексе.** В произвольном комплексе  $K$  мы имеем, как в § 10, бемольные коцепи  $X$ , а также алгебраические коцепи  $x$  (П. II, 6). Любая бемольная коцепь  $X$ , как и в (IV, 27.1), определяет с помощью формулы

$$(1) \quad \psi X \cdot \sigma = X \cdot \sigma$$

некоторую алгебраическую коцепь  $\psi X$ ; таким образом,  $\psi X$  имеет в ориентированной клетке  $\sigma$  комплекса  $K$  коэффициент  $X \cdot \sigma$ . Очевидно,

$$(2) \quad d\psi X = \psi dX.$$

Обратно, определим линейное отображение  $\varphi$  пространства алгебраических коцепей  $x$  в пространство бемольных коцепей, обладающее следующими свойствами (мы пишем  $\varphi x = W_x$ ):

- (3)  $W_\sigma = 0$  вне  $\text{St}(\sigma)$ ,
- (4)  $W_{dx} = dW_x$ ,
- (5)  $\psi \varphi x = \psi W_x = x$ ,
- (6)  $W_{p^*} = 1$

[ $I^0$  и 1 определяются, как в (IV, 27.6)]. Чтобы связать этот параграф с параграфом (IV, 27), рассмотрим также некоторые дифференциальные формы в  $K$ , соответствующие коцепям  $W_\sigma$ . Формулы (9) и (12) были изучены автором в 1947 г.

При определении коцепи  $W_\sigma$  мы пользуемся *отношением двух  $r$ -векторов* в аффинном пространстве в одном определенном случае:

- (7)  $\frac{\alpha}{\beta} = a$ , если  $\alpha = a\beta$  и  $\beta \neq 0$  — простой  $r$ -вектор.

Мы должны определить  $r$ -мерную бемольную коцепь  $W_\sigma$  ( $\sigma = \sigma'$ ) в каждом симплексе  $\sigma'$  комплекса  $K$ . Если  $\sigma$  не является гранью симплекса  $\sigma'$ , то положим  $W_\sigma = 0$  в  $\sigma'$  [т. е. в обозначениях § 10  $W_\sigma(\sigma') = 0$ ]. Если же  $\sigma$  является гранью симплекса  $\sigma'$ , скажем,

- (8)  $\sigma = p_0 \dots p_r$ ,  $\sigma' = p_0 \dots p_r \dots p_s$ ,  $\sigma'' = p_{r+1} \dots p_s$  при  $s > r$ ,

то положим

- (9)  $W_{p_0 \dots p_r} \cdot (q_0 \dots q_r) = \frac{\{q_0 \dots q_r p_{r+1} \dots p_s\}}{\{p_0 \dots p_r p_{r+1} \dots p_s\}}, \quad q_0 \dots q_r \subset p_0 \dots p_s.$

Пользуясь соединениями, мы можем записать это в виде

- (10)  $W_\sigma \cdot \tau = \frac{\{\tau \sigma''\}}{\{\sigma'\}} = \frac{\{\tau \sigma''\}}{\{\sigma \sigma''\}}, \quad \tau \subset \sigma'.$

Чтобы показать, что  $W_\sigma$  — бемольная коцепь в  $K$ , возьмем произвольную клетку  $\sigma_2$  комплекса  $K$  и ее грань  $\sigma_1$ . Мы должны показать, что определения коцепи  $W_\sigma$  в  $\sigma_1$  и в  $\sigma_2$  согласуются в  $\sigma_1$ . Если  $\sigma$  не является гранью клетки  $\sigma_2$ , то  $W_\sigma = 0$  и в  $\sigma_1$  и в  $\sigma_2$ . Допустим, что  $\sigma_2 = \sigma'$ , где симплекс  $\sigma'$  определен, как и выше, но  $\sigma$  не является гранью симплекса  $\sigma_1$ . Пусть, скажем,  $\sigma_1 \subset \sigma^* = p_0 \dots p_{r-1} p_{r+1} \dots p_s$ . Тогда, так как  $\dim(\sigma^*) < s$  для любого симплекса  $\tau = q_0 \dots q_r \subset \sigma_1$ , то числитель в (9) равен нулю (симплекс  $\tau \sigma''$  вырождается); поэтому  $W_\sigma \cdot \tau = 0$ , если пользоваться как определением коцепи  $W_\sigma$  в  $\sigma_2$ , так и определением в  $\sigma_1$ . Допустим

теперь, что  $\sigma$  является гранью симплекса  $\sigma_1$ . Тогда нужное свойство следует из формулы

(11)

$$\frac{\{q_0 \dots q_r p_{r+1} \dots p_{s-1}\}}{\{p_0 \dots p_r p_{r+1} \dots p_{s-1}\}} = \frac{\{q_0 \dots q_r p_{r+1} \dots p_s\}}{\{p_0 \dots p_r p_{r+1} \dots p_s\}}, \quad q_0 \dots q_r \subset p_0 \dots p_{s-1}.$$

Чтобы доказать эту формулу, обозначим через  $a_1$  и  $a_2$  отношения, стоящие соответственно в левой и в правой части. Тогда [см. (III, 1.2)]

$$\begin{aligned} (q_1 - q_0) \vee \dots \vee (p_{r+1} - q_r) \vee \dots \vee (p_{s-1} - p_{s-2}) = \\ = a_1(p_1 - p_0) \vee \dots \vee (p_{s-1} - p_{s-2}); \end{aligned}$$

умножая обе части на  $p_s - p_{s-1}$ , мы видим, что  $a_2 = a_1$ . (Если  $s = r + 1$ , то нужно умножить на  $p_{r+1} - p_r$ .)

Равенство (3) имеет место; так как  $W_\sigma \cdot \sigma = 1$ , то имеет место и равенство (5). По формулам (9), (II, 10.3) и (III, 2.3) для  $q \in \sigma = p_0 \dots p_s$  получаем

$$[W_I \cdot q] \{\sigma\} = \sum_{i=0}^s (-1)^i \{q p_0 \dots \hat{p}_i \dots p_s\} = \{J(q, \partial\sigma)\} = \{\sigma\}.$$

Поэтому выполняется равенство (6).

Докажем (4) в  $\sigma'$  для  $x = \sigma$ . Возьмем любой симплекс  $\tau = q_0 \dots q_{r+1}$  в  $\sigma'$ . Так как  $\{\partial(\tau\sigma'')\} = 0$  (независимо от того, вырождается ли  $\tau\sigma''$  или нет), то, пользуясь введенными выше обозначениями, получаем

$$\begin{aligned} [dW_\sigma \cdot \tau] \{\sigma'\} &= \left[ W_\sigma \cdot \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i (q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_{r+1}) \right] \{\sigma'\} = \\ &= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_{r+1} p_{r+1} \dots p_s\} = \\ &= \sum_{k=r+1}^s (-1)^k \{q_0 \dots q_{r+1} p_{r+1} \dots \hat{p}_k \dots p_s\}. \end{aligned}$$

Кроме того, в силу (II, 7.5)

$$W_{d\sigma} \cdot \tau = \sum_{k=r+1}^s W_{p_k p_0 \dots p_r} \cdot \tau;$$

сравнивая эти формулы, получаем (4) для  $x = \sigma$  и поэтому для любой коцепи  $x$ .

Пользуясь метрикой в  $\sigma'$ , на основании (III, 1.3) и (I, 12.14) находим

$$\frac{|W_{\sigma} \cdot \tau|}{|\tau|} \leq \frac{r!(s-r)! |q_r \sigma''|}{s! |\sigma'|} \leq \frac{r!(s-r-1)! |\sigma''|}{s! |\sigma'|} \text{diam}(\sigma');$$

поэтому масса  $|W_{\sigma}|$ , а следовательно, и любая масса  $|W_x|$  конечны в  $\sigma'$ . В силу (4) конечна и масса  $|dW_x|$ . Поэтому коцепь  $W_x$  является бемольной во всяком симплексе  $\sigma'$ , а следовательно, и в  $K$ .

Определим дифференциальные формы в  $K$  следующим образом. Положим  $u_{ij} = p_j - p_i$ ; это — вектор в каждом симплексе комплекса  $K$ , имеющем  $p_i p_j$  своим ребром. Пусть  $\sigma, \sigma', \sigma''$  — рассмотренные выше симплексы; положим

$$(12) \quad \omega_{\sigma}(q) \cdot \alpha = r! \frac{\alpha \vee (p_{r+1} - q) \vee u_{r+1, r+2} \vee \dots \vee u_{r+1, s}}{u_{01} \vee \dots \vee u_{0s}} \quad \text{в } \sigma'.$$

По формуле (III, 1.2) отсюда получаем

$$(13) \quad \omega_{\sigma}(q) \cdot \{\tau\} = \frac{r! \{\tau\} \vee (s-r)! \{q \sigma''\}}{s! \{\sigma'\}} = \frac{\{\tau \sigma''\}}{\{\sigma'\}}, \quad q \in \tau \subset \sigma'.$$

Поэтому в силу (III, 4.1) и (10)

$$(14) \quad W_{\sigma} \cdot \tau = \int_{\tau} \omega_{\sigma};$$

этим показано, что коцепь  $W_{\sigma}$  и форма  $\omega_{\sigma}$  соответствуют одна другой.

Заметим, что (4) можно доказать, рассмотрев форму  $\omega_{\sigma}$ , с помощью формулы

$$(15) \quad \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_{r+1} p_{r+1} \dots p_s\} = \\ = (-1)^{r+1} (q_1 - q_0) \vee \dots \vee (q_{r+1} - q_0) \vee u_{r+1, r+2} \vee \dots \vee u_{r+1, s},$$

доказательство которой сходно с доказательством формулы (III, 1.4).

В заключение, пользуясь барицентрическими координатами  $\mu_i$  в  $K$ , мы установим явную формулу для  $\omega_{\sigma}$  в  $K$ :

$$(16) \quad \omega_{\sigma}(q) = r! \sum_{i=0}^r (-1)^i \mu_i(q) d\mu_0(q) \vee \dots \vee \hat{i} \dots \vee d\mu_r(q), \quad \sigma = p_0 \dots p_r.$$

Заметим, что эта формула в точности совпадает с формулой (IV, 27.12), если взять специальное разложение  $(\mu_1, \mu_2, \dots)$  единицы в  $K$ . В упомянутой формуле мы не могли бы пользоваться

функциями  $\mu_i$  (вернее,  $\nu_i$ ), так как эти функции не являются гладкими в  $M$ .

Пусть  $\bar{\omega}_\sigma$  обозначает выражение, стоящее в правой части (16); мы покажем, что  $\bar{\omega}_\sigma = \omega_\sigma$ . В любом симплексе  $\sigma'$  комплекса  $K$  [мы пользуемся обозначениями (8)] функция  $\mu_i$  аффинна и дифференциал  $d\mu_j$  постоянен; поэтому  $\bar{\omega}_\sigma$  аффинно. В любой вершине комплекса  $K$ , не принадлежащей  $\sigma$ ,  $\bar{\omega}_\sigma$  равно нулю. Определение величины  $\bar{\omega}_\sigma$  зависит только от ориентированного симплекса  $\sigma$ , и  $\bar{\omega}_\sigma$  изменяет знак при перемене ориентации. Это же выполняется и для  $\omega_\sigma$ . Поэтому нам нужно только доказать, что  $\bar{\omega}_\sigma(p_0) = \omega_\sigma(p_0)$  в  $\sigma'$ . Пользуясь тем фактом, что

$$(17) \quad d\mu_i \cdot u_{ij} = 1, \quad d\mu_i \cdot u_{jk} = 0, \quad \text{если } i \neq j, i \neq k,$$

и  $\mu_i(p_0) = 0$  ( $i \neq 0$ ), имеем

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_\sigma(p) \cdot (u_{01} \vee \dots \vee u_{0r}) &= r! \begin{vmatrix} d\mu_1 \cdot u_{01} & \dots & d\mu_1 \cdot u_{0r} \\ \dots & \dots & \dots \\ d\mu_r \cdot u_{01} & \dots & d\mu_r \cdot u_{0r} \end{vmatrix} = r!, \\ \bar{\omega}_\sigma(p_0) \cdot (u_{0j} \vee \beta) &= 0, \quad j = r+1, \dots, s. \end{aligned}$$

Эти формулы определяют  $\bar{\omega}_\sigma(p_0)$ . В силу (12) те же самые формулы выполняются для  $\omega_\sigma(p_0)$ ; следовательно,  $\bar{\omega}_\sigma = \omega_\sigma$ .

**12. Теорема об изоморфизме.** Определим кольцо бемольных когомологий  $H^b$  комплекса  $K$  следующим образом. Для каждого  $r$   $H^{br}$  есть фактор-пространство пространства  $r$ -мерных бемольных коциклов в  $K$  по пространству  $r$ -мерных бемольных кограниц;  $H^b$  есть прямая сумма пространств  $H^{br}$  с умножением, определяемым в (IX, 14). Пусть  $H^*$  — кольцо алгебраических когомологий комплекса  $K$ . Согласно (11.2), отображение  $\psi$  из (11.1) определяет некоторое линейное отображение  $\Psi$  кольца  $H^b$  в кольцо  $H^*$ .

**Теорема 12А.**  $\Psi$  есть изоморфизм кольца  $H^b$  на кольцо  $H^*$ .

Мы докажем сначала три леммы.

**Лемма 12а.** Пусть  $W$  — некоторый  $r$ -мерный бемольный коцикл в  $d\sigma$  ( $r \geq 0$ ,  $\sigma = \sigma^s$ ,  $s = 1$ ). Допустим, что

$$(1) \quad W \cdot d\sigma = 0, \quad \text{если } s = r+1.$$

Тогда существует  $r$ -мерный бемольный коцикл  $W'$  в  $\sigma$ , который равен  $W$  в  $d\sigma$ .

Лемма 12b. Пусть  $W$  — некоторая  $r$ -мерная бемольная коцепь в  $\sigma = \sigma^s$  ( $r \geq 1$ ,  $s \geq 1$ ), и пусть  $X$  — такая  $(r-1)$ -мерная бемольная коцепь в  $\partial\sigma$ , что  $dX = W$  в  $\partial\sigma$ . Допустим, что

$$(2) \quad X \cdot \partial\sigma = W \cdot \sigma, \quad \text{если} \quad s = r.$$

Тогда существует такая бемольная коцепь  $X'$  в  $\sigma$ , что  $X' = X$  в  $\partial\sigma$  и  $dX' = W$  в  $\sigma$ .

Следуя (IV, 26), мы сразу доказываем лемму ( $a_3$ ). Чтобы доказать ( $b_r$ ), выберем  $X_1$  по лемме 10b так, чтобы было  $dX_1 = W$  в  $\sigma$ . Положим  $Y = X - X_1$  в  $\partial\sigma$ . Тогда  $dY = 0$  в  $\partial\sigma$ , и

$$Y \cdot \partial\sigma = X \cdot \partial\sigma - X_1 \cdot \partial\sigma = W \cdot \sigma - dX_1 \cdot \sigma = 0, \quad \text{если} \quad s = r.$$

Поэтому в силу ( $a_{r-1}$ ) существует бемольный коцикл  $Y'$  в  $\sigma$ , который равен  $Y$  в  $\partial\sigma$ . Положим  $X' = X_1 + Y'$  в  $\sigma$ .

Чтобы доказать ( $a_r$ ),  $r > 0$ , допустим, что  $\sigma = p_0 \dots p_s$ ; определим  $\sigma'$ ,  $Q$ ,  $A$ , как в (IV, 26). Выберем бемольную коцепь  $X_0$  в  $Q$ , для которой  $dX_0 = W$  в  $Q$ . Если  $s-1 = r$ , то

$$W \cdot \sigma' - X_0 \cdot \partial\sigma' = W \cdot \sigma' + dX_0 \cdot A = W \cdot \partial\sigma = 0.$$

Поэтому в силу ( $b_r$ ) существует бемольная коцепь  $X_1$  в  $\sigma'$ , для которой  $X_1 = X_0$  в  $\partial\sigma'$  и  $dX_1 = W$  в  $\sigma'$ . Положим  $X' = X_0$  в  $Q$  и  $X' = X_1$  в  $\sigma'$ ; тогда  $X'$  есть бемольная коцепь в  $\partial\sigma$  и  $dX' = W$ . Пусть  $X$  — некоторая коцепь, полученная в результате продолжения коцепи  $X'$  на  $K$  (лемма 10a). Положим  $W' = dX$  в  $\sigma$ ; тогда  $W'$  обладает нужными свойствами.

Лемма 12с. Пусть  $W$  — некоторый  $r$ -мерный бемольный коцикл в  $K$  ( $r > 0$ ), и пусть  $y$  — алгебраическая  $(r-1)$ -мерная коцепь комплекса  $K$ , для которой  $\psi W = dy$ . Тогда существует такая  $(r-1)$ -мерная бемольная коцепь  $X$  в  $K$ , что  $dX = W$  и  $\psi X = y$ .

Пусть  $X = W_y$  (§ 11) в  $K^{r-1}$ ; тогда коцепь  $\psi X$  определена и равна  $y$ , и это справедливо для любого продолжения коцепи  $X$  на  $K$ . Заметим, что в  $K$  тривиальным образом  $dX = W = 0$ . Возьмем любой симплекс  $\sigma = \sigma'$  комплекса  $K$ . Так как

$$X \cdot \partial\sigma = W_y \cdot \partial\sigma = y \cdot \partial\sigma = dy \cdot \sigma = \psi W \cdot \sigma = W \cdot \sigma,$$

то мы можем по лемме 12b продолжить  $X$  на  $\sigma$  так, чтобы в  $\sigma$

было  $dX=W$ ; продолжим таким образом  $X$  на  $K'$ . Пользуясь той же леммой, продолжим  $X$  на остальную часть комплекса  $K$ , на один симплекс за другим.

Доказательство теоремы теперь протекает так же, как доказательство теоремы (IV, 29A).

Замечание. Одним из следствий этой теоремы является то, что алгебраическое кохомологическое строение полиэдра  $P$  (если пользоваться действительными коэффициентами) не зависит от используемого разбиения полиэдра  $P$ .

## VIII. Цепи и коцепи в открытых множествах

До сих пор мы изучали цепи и коцепи в  $E^n$  и лишь кратко упоминали о случае, когда коцепь определена, например, только в некотором открытом множестве  $R \subset E^n$ . Этот случай, очевидно играющий важную роль, является предметом настоящей главы. Определяя дизъюнктивную и бемольную „ $R$ -нормы“ коцепей в  $R$ , мы вводим в нашу теорию широкий класс коцепей, которые не обязательно могут быть продолжены на  $E^n$ . Эти нормы можно получить из аналогичных норм цепей в  $R$ . Общее изучение этих норм занимает первые три параграфа. В последних параграфах мы указываем для бемольных и дизъюнктивных цепей представления, которые столь же важны и для цепей в  $E^n$ .

Определения  $R$ -норм являются очевидными видоизменениями определений для случая пространства  $E^n$ . Однако при решении вопросов о том, какие цепи называть „цепями множества  $R$ “, следует проявлять осторожность. Если, например,  $R$  — внутренность круга, ограниченного окружностью  $C$  в  $E^2$ , то мы можем ориентировать ее и, приписав ей коэффициент 1, образовать двумерную цепь  $A$ . Возникает сомнение, следует ли рассматривать  $A$  как цепь множества  $R$ . В случае положительного ответа мы должны были бы рассматривать ее и как цепь множества  $R'$ , получающегося, например, если вырезать из  $R$  прямолинейный отрезок. Еще в меньшей степени можно было бы думать о границе  $\partial A$  как о цепи множества  $R$  (ее носителем является  $C$ ). Конечно, разумно потребовать, чтобы носитель  $\text{spt}(A)$  лежал в  $R$ . Но даже этого недостаточно, чтобы для разумно понимаемых коцепей  $X$  определить  $X \cdot A$ ; см. пример в начале § 1. Этого достаточно, однако, если цепь  $A$  компактна (теорема 2D) или имеет конечную массу (теорема 3D), или же если  $A$  есть предел, в  $R$ -норме, некоторой последовательности полиэдральных цепей множества  $R$  (теорема 4A). Если  $A$  есть цепь множества  $R$  (рассматривается любая из двух норм), то она является также (что будет очевидно) цепью любого большего открытого множества и цепью некоторого меньшего открытого множества (теоремы 5B и 6B).

Формулы для  $R$ -норм в сущности такие же, как и в  $E^n$ . Если множество  $R$  выпукло, то нормы совпадают с нормами в  $E^n$ ; сверх того, коцепи в  $R$  можно продолжить на  $E^n$  (при доказательстве этого факта мы пользуемся некоторыми предложениями из гл. X).

Менее элементарные свойства цепей и коцепей связаны с распространением на рассматриваемую здесь ситуацию теории дизельных функций в качестве операторов и теории носителей (§ 2). Затем, как в гл. V, устанавливаются некоторые свойства массы (§ 3).

Напомним (V, 3.1), что для полиэдральной цепи  $A$  норма  $|A|^b$  определяется как нижняя грань сумм  $|A - \partial D| + |D|$ , где  $D$  — полиэдральные цепи. В § 5 мы показываем, что та же самая формула имеет место и для любой бемольной цепи  $A$ , если в качестве  $D$  разрешить брать бемольные цепи. Аналогичная теорема в дизельном случае (§ 6) более трудна; мы пользуемся „сдвиговой нормой“ цепи, вообще говоря, большей, чем дизельная норма (и существующей, например, если масса  $|A|$  конечна).

Замечание. Для построения более полной теории следовало бы рассмотреть коцепи в  $R$ , являющиеся бемольными или дизельными в каждом компактном подмножестве множества  $R$ ; это соответствует использованию несобственных интегралов, как в (III, 6).

Если задано точечное множество  $Q$  и вектор  $v$ , то мы следующим образом определим точечное множество  $\mathcal{D}_v(Q)$ :

$$\mathcal{D}_v(Q) = \text{совокупности всех точек } q + tv, \quad q \in Q, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

**1. Цепи и коцепи в открытых множествах; элементарные свойства.** В приложениях встречаются дифференциальные формы с ограниченными первыми частными производными в некотором открытом множестве  $R$ , которые нельзя продолжить на  $E^n$  так, чтобы они продолжали обладать этим свойством. Чтобы работать с такими формами, нужна новая норма для цепей и коцепей, зависящая от множества  $R$ . Например, если в  $E^1$  множество  $R$  есть  $E^1$  без начала,  $r=0$  и  $D_X(t) = t/|t|$ , то  $X \cdot d\sigma = 0$  для любого одномерного симплекса  $\sigma$  в  $R$ ; но коцепь  $X$  нельзя продолжить так, чтобы она стала коцепью в  $E^1$ . Если мы вырежем маленькую окрестность точки 0, то полученная таким образом коцепь  $X$  продолжаема в некоторую коцепь  $Y$ , но  $|\partial Y| > |dX|$ . Если мы вырежем в  $E^2$  замкнутую положительную полуось  $x$  или множество точек  $(x, y)$ , для которых  $y^2 \leq x^3$ , то мы можем положить  $D_X(x, y) = \inf(x, 1)$  при  $x \geq 0$ ,  $y > 0$  и  $D_X = 0$  во всех остальных точках и получить таким образом непродолжаемую нульмерную коцепь; аналогично для  $r=1$ .

Непродолжаемые коцепи  $X$  могут не давать значений  $X \cdot A$  для некоторых цепей  $A$ , лежащих в  $R$ . Например, если  $R$  есть  $E^2$  без замкнутой положительной полуоси  $x$  и

$$p_i = \left(i, \frac{1}{2^i}\right), \quad q_i = \left(i, -\frac{1}{2^i}\right), \quad A = \sum (p_i - q_i),$$

то норма  $|A|^b$  конечна, но для коцепи  $X$ , определенной выше, произведение  $X \cdot A$  не существует. Если бы была определена новая норма  $|A|_R^b$ , то цепь  $A$  не существовала бы, даже несмотря на то, что  $\text{spt}(A) \subset R$ . Другой пример. Если

$$p'_i = \left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{4^i}\right), \quad q'_i = \left(\frac{1}{2^i}, -\frac{1}{4^i}\right), \quad A_i = 2^i(p'_i - q'_i),$$

то  $|A_i|^b = 2/2^i$ ,  $X \cdot A_i = 1$  и отношение  $|X \cdot A_i|/|A_i|^b$  неограниченно.

Мы определим новые нормы, связанные с  $R$ , и покажем, что, если пользоваться этими нормами, остаются справедливыми практически все результаты гл. V и VII.

(а) Бемольные цепи множества  $R$ . Для любой  $r$ -мерной полиэдральной цепи  $A$  в открытом множестве  $R$  масса  $|A|$  определяется, как и ранее. Положим

$$(1) \quad |A|_R^b = \inf \{ |A - \partial D| + |D| : \text{полиэдральные } (r+1)\text{-мерные цепи } D \text{ в } R \}.$$

Это — норма, *бемольная  $R$ -норма*, и

$$(2) \quad |A|_{R'}^b \geq |A|_R^b \geq |A|^b, \quad A \subset R' \subset R.$$

Как и раньше,

$$(3) \quad |\partial A|_R^b \leq |A|_R^b.$$

Пространство  $r$ -мерных полиэдральных цепей в  $R$ , пополненное в этой норме, является банаховым пространством  $C_r^b(R)$ . Мы будем рассматривать только подмножество  $C_r^b(R)$  этого пространства, состоящее из цепей  $A$  (в  $E^n$ ), обладающих следующим свойством. Существует замкнутое в  $E^n$  множество  $Q \subset R$  и такая фундаментальная последовательность  $A_1, A_2, \dots$  (в  $R$ -норме) полиэдральных цепей в  $Q$ , что  $A = \lim^b A_i$ . Тогда также  $A = \lim_R^b A_i$ . Такие цепи мы будем называть бемольными цепями множества  $R$ , лежащими в  $Q$ . В § 2 мы определим носитель  $\text{spt}(A)$ ; он является пересечением таких множеств  $Q$  (теорема 2А). Мы будем тогда также говорить, что  $A$  лежит в  $\text{spt}(A)$ . Приведенный выше пример показывает, что для цепей пространства  $E^n$  мы можем иметь  $\text{spt}(A) \subset R$ , в то время как  $A$  не является цепью множества  $R$ ; вот почему мы говорим о цепях „множества“  $R$ , а не „в множестве“  $R$ .

Очевидно, что для любой бемольной цепи  $A$  множества  $R$  граница  $\partial A$  является бемольной цепью множества  $R$ .

Допустим, что  $r = n$  и  $R$  ограничено. Пусть  $A_1, A_2, \dots$  — одинаково ориентированные полиэдральные области в  $R$ , объединение которых равно  $R$ . Хотя это и фундаментальная последовательность в бемольной  $R$ -норме, ее предел  $A$  не принадлежит пространству  $C_R^b(R)$ ; не является цепью множества  $R$  и граница  $\partial A$  (что вполне естественно).

Если  $R$  есть пространство  $E^1$  с выброшенным началом координат и  $A = \partial \sigma$ , где  $\sigma$  — одномерная клетка, содержащая начало, то  $|A|_R^b = 2$ . Читатель может исследовать  $R$ -норму в случае других приведенных выше примеров.

Для нижеследующих утверждений (в настоящий момент мы рассматриваем полиэдральные цепи  $A$ )

$$(4) \quad |T_v A - A|_R^b \leq |v|(|A| + |\partial A|), \text{ если } \mathcal{D}_v(\text{spt}(A)) \subset R,$$

$$(5) \quad |\sigma|_R^b = |\sigma|^b = |\sigma| \text{ для симплексов } \sigma,$$

(6)  $|A|_R^b = \inf \{ |A - \partial D|_R^b + |D|_R^b : D \text{ — полиэдральные цепи в } R \}$  проходят прежние доказательства (V, 3). Ниже, в § 2, мы сравним норму  $|A|_R^b$  с нормой  $|A|^b$ . Согласно лемме (V, 2b) [см. также (h) ниже],

$$(7) \quad |A|_R^b = |A|^b \text{ (для всех } A), \text{ если } R \text{ выпукло.}$$

(b) Бемольные коцепи в  $R$ . Бемольная  $r$ -мерная коцепь в  $R$  есть элемент пространства  $C^{br}(R)$ , сопряженного к пространству  $C_r^b(r)$ . Бемольная  $R$ -норма  $|X|_R^b$  и комасса  $|X|$  — это, как и ранее, наименьшие числа, удовлетворяющие неравенствам

$$(8) \quad |X \cdot A| \leq |X|_R^b |A|_R^b, \quad |X \cdot A| \leq |X| |A| \quad (\text{полиэдральные } r\text{-мерные цепи } A \text{ в } R).$$

Как и ранее,

$$(9) \quad |A|_R^b = \sup \{ |X \cdot A| : X \text{ в } R, |X|_R^b = 1 \}.$$

Если  $X$  — бемольная коцепь в  $R$ , то бемольной коцепью в  $R$  является также определяемая, как и ранее, кограница  $dX$ ; при этом  $ddX = 0$ . Мы могли бы определить  $dX \cdot A$ , если  $\partial A$  есть цепь множества  $R$ ; однако мы этим пользоваться не будем. Вновь мы доказываем (рассматривая коцепь  $X$  только в  $R$ , даже если она определена в большем множестве)

$$(10) \quad |X|_R^b = \sup \{ |X|, |dX| \}.$$

Отметим, что если  $X_S$  обозначает коцепь  $X$ , рассматриваемую только в множестве  $S$ , то или на основании (8) и (2), или же на основании (10)

$$(11) \quad |X_{R'}|_R^b \leq |X_R|_R^b \leq |X|^b, \quad R' \subset R,$$

для коцепей  $X$ , определенных в  $E^n$ . Если коцепь  $X$  определена только в  $R$ , то выполняется первое из неравенств (11).

Как и ранее, линейная функция  $X \cdot A$  полиэдральной  $r$ -мерной цепи  $A$  множества  $R$ , для которой  $|X|$  и  $|dX|$  конечны, определяет  $r$ -мерную бемольную коцепь в  $R$ .

Вновь мы находим

$$(12) \quad |X| = \sup \frac{|X \cdot \sigma|}{|\sigma|}, \quad |dX| = \sup \frac{|X \cdot \partial \sigma|}{|\sigma|}.$$

(с) Диезные цепи множества  $R$ . Диезная  $R$ -норма  $|A|_R^\#$  полиэдральной  $r$ -мерной цепи  $A$  в  $R$  определяется по формуле (V, 6.1), в которой символ  $|^b$  следует заменить символом  $|^b_R$  и потребовать, чтобы

$$(13) \quad \text{каждая клетка } \mathcal{D}_{v_i}(\sigma_i) \text{ лежала в } R,$$

ср. (2.8). Тогда  $|A|_R^\#$  есть норма, и

$$(14) \quad |A|_R^\# \leq |A|_R^b, \quad |A|_R^\# \geq |A|_{R'}^\# \geq |A|^\#, \quad A \subset R' \subset R.$$

Очевидно, что для этой нормы выполняются равенства (5). Кроме того,

$$(15) \quad |T_v A - A|_R^\# \leq \frac{|v| |A|}{r+1}, \quad \text{если } \mathcal{D}_v(\text{spt}(A)) \subset R.$$

Диезные цепи множества  $R$  определяются, как и в бемольном случае. При  $r=0$  диезная и бемольная  $R$ -нормы совпадают.

(d) Диезные коцепи в  $R$ . Определим пространство  $\mathbf{C}^{\#r}(R)$  подобно тому, как было определено пространство  $\mathbf{C}^{br}(R)$ . Тогда

$$(16) \quad |X \cdot A| \leq |X|_R^\# |A|_R^\#, \quad |X|_R^b \leq |X|_R^\#,$$

$$(17) \quad |X_{R'}|_R^\# \leq |X_R|_R^\# \quad (X_R \text{ в } R, R' \subset R).$$

Каждая диезная коцепь в  $R$  является бемольной коцепью в  $R$ . Положим

$$(18) \quad \mathfrak{L}_{X,R} = \sup \left\{ \frac{|X \cdot (T_v A - A)|}{|A| |v|} : A \text{ — полиэдральные цепи, } \mathcal{D}_v(\text{spt}(A)) \subset R \right\}.$$

И на этот раз

$$(19) \quad \mathfrak{L}_{X,R} = \sup \left\{ \frac{|X \cdot (T_v \sigma - \sigma)|}{|\sigma| |v|} : \text{симплексы } \sigma, \mathcal{D}_v(\sigma) \subset R \right\}.$$

Как и ранее, требуя, чтобы все деформации цепей с помощью векторов лежали в  $R$ , доказываем, что

$$(20) \quad |dX| \leq (r+1) \mathfrak{L}_{X,R}, \text{ если } X \text{ — дизная коцепь в } R.$$

$$(21) \quad |X|_R^\# = \sup \{ |X|_R^b, (r+1) \mathfrak{L}_{X,R} \} = \sup \{ |X|, (r+1) \mathfrak{L}_{X,R} \}.$$

Любая бемольная коцепь в  $R$  с конечной константой Липшица  $\mathfrak{L}_{X,R}$  является дизной коцепью в  $R$ .

Дизная функция  $\varphi$  в  $R$  есть ограниченная действительная функция, для которой верхняя грань

$$(22) \quad \mathfrak{L}_{\varphi,R} = \sup \left\{ \frac{|\varphi(q) - \varphi(p)|}{|q - p|} : \text{отрезки } pq \subset R \right\}$$

конечна; дизные функции в  $R$  в точности соответствуют нульмерным дизным коцепям в  $R$ . При  $r = n$  дизные функции также соответствуют  $n$ -мерным дизным коцепям; это соответствие зависит от метрики.

(е) При каждом  $r$  массу, бемольную  $R$ -норму и дизную  $R$ -норму полиэдральных цепей в  $R$  можно охарактеризовать как наибольшую полунорму, удовлетворяющую соответственно первому, первым двум и всем трем условиям

$$(23) \quad \begin{cases} |\sigma^r|' \leq |\sigma^r| & (\sigma^r \subset R), \\ |\partial \sigma^{r+1}|' \leq |\sigma^{r+1}| & (\sigma^{r+1} \subset R), \\ |T_v \sigma^r - \sigma^r|' \leq \frac{|\sigma^r| |v|}{r+1} & (\mathcal{D}_v(\sigma^r) \subset R). \end{cases}$$

Проходит и доказательство из (V, 8), где нужно только потребовать, чтобы все цепи и деформации цепей лежали в  $R$ .

(f) Дизные  $r$ -формы в  $R$ . Комассовая константа Липшица в  $R$  дифференциальной  $r$ -формы  $\omega$ , определенной в  $R$ , есть

$$(24) \quad \mathfrak{L}_0(\omega, R) = \sup \left\{ \frac{|\omega(q) - \omega(p)|_0}{|q - p|} : pq \subset R \right\}.$$

Мы говорим, что форма  $\omega$  (определенная в  $R$ ) является дизной формой в  $R$ , если конечны и  $|\omega|_0$  и  $\mathfrak{L}_0(\omega, R)$ ; дизная  $R$ -норма формы  $\omega$  есть

$$(25) \quad |\omega|_R^\# = \sup \{ |\omega|_0, (r+1) \mathfrak{L}_0(\omega, R) \}.$$

Как и в теореме (V, 10A), соотношение  $X \cdot \sigma = \int_{\sigma} D_X$  ( $\sigma \in R$ ) определяет взаимно однозначное соответствие между дизельными коцепями и дизельными формами в  $R$ , и при этом

$$(26) \quad |D_X|_0 = |X|, \quad \mathfrak{L}_0(D_X, R) = \mathfrak{L}_{X,R}, \quad |D_X|_R^{\#} = |X|_R^{\#}.$$

(г) Слабая сходимостъ. Пусть символ  $\odot$  отмечает любую из двух норм. Мы пишем

$$(27) \quad X = \text{wkl}_R^{\odot} X_i, \quad \text{если} \quad |X_i|_R^{\odot} \leq N, \quad \lim (X_i \cdot A) = X \cdot A$$

для некоторого  $N$  и всех цепей  $A$  множества  $R$ . Как и в (V, 13), последнее соотношение можно заменить соотношением  $\lim (X_i \cdot \sigma) = X \cdot \sigma$  (для всех  $\sigma$  в  $R$ ). Если  $X$  обладает этими свойствами, то  $X$  является коцепью в соответствующей норме.

Если дана бемольная или дизельная коцепь  $X$  в  $R$ , то мы можем сгладить ее в множестве  $\text{int}_{\zeta}(R)$ :

$$(28) \quad X_{\eta} \cdot A = \int_V \chi_{\eta}(v) (X \cdot T_v A) dv, \quad A \text{ в } \text{int}_{\zeta}(R), \quad \eta < \zeta.$$

В самом деле, мы можем записать  $A = \lim_R^{\odot} A_i$ , где  $A_i$  — полиэдральные цепи в  $Q = \overline{\text{int}_{\zeta}(R)}$ ; тогда  $T_v A_i \subset Q_{\zeta} = \overline{U_{\zeta}(Q)}$ , множество  $Q_{\zeta}$  замкнуто и содержится в  $R$ , поэтому  $T_v A = \lim_R^{\odot} T_v A_i$  при  $|v| \leq \eta$  существует, так что формула (28) имеет смысл. [По теореме (X, 7B)  $T_v A$  непрерывно.]

Свойства, описанные в (V, 13), выполняются в  $\text{int}_{\zeta}(R)$ .

Проблема. Пусть дана  $r$ -мерная бемольная коцепь  $X$  в  $R$ . Существует ли такая последовательность  $r$ -мерных дизельных коцепей  $X_1, X_2, \dots$  в  $R$ , что  $\text{wkl}_R^b X_i = X$ ? Трудность состоит в том, чтобы так определить коцепи  $X_i$ , чтобы комассы  $|dX_i|$  были равномерно ограничены.

Поскольку эта проблема не решена, мы не можем сразу перенести результаты из (V, 14) на рассматриваемый здесь случай. В связи с этим см. замечание, сделанное в самом начале этой главы.

(h) Выпуклые открытые множества. Мы покажем, что для любой из двух норм

$$(29) \quad |A|_R^{\odot} = |A|^{\odot}, \quad \text{если } R \text{ выпукло,}$$

а также что любую коцепь  $X$  в  $R$  можно продолжить в коцепь  $Y$  в пространстве  $E$  так, чтобы было

$$(30) \quad |Y|^{\odot} = |X|_R^{\odot}, \quad \text{если } R \text{ выпукло.}$$

Для бемольной нормы равенство (29) совпадает с (7). Пусть, далее,  $\pi$  — проекция пространства  $E^n$  на  $\bar{R}$ :  $\pi(p)$  — ближайшей к  $p$  точке множества  $\bar{R}$ . Тогда  $\mathfrak{L}_\pi = 1$ . В самом деле, если заданы точки  $p, q$ , то положим  $p' = \pi(p)$ ,  $q' = \pi(q)$  и обозначим через  $P, Q$   $(n-1)$ -мерные плоскости, проходящие через  $p', q'$  соответственно и перпендикулярные к отрезку  $p'q'$ . Так как  $p'q' \subset \bar{R}$ , то ни  $p$ , ни  $q$  не лежат между этими плоскостями; поэтому  $|q - p| \geq |q' - p'|$ . Допустим теперь, что  $X$  — дизная коцепь в  $R$ , так что  $|D_X|$  и  $\mathfrak{L}_0(D_X)$  конечны. Продолжим форму  $D_X$ , чтобы она стала непрерывной в  $\bar{R}$ , и положим  $D_Y(p) = D_X(\pi(p))$  в  $E^n$ . Тогда  $|D_Y| = |D_X|$ ,  $\mathfrak{L}_0(D_Y) = \mathfrak{L}_0(D_X)$ , так что коцепь  $Y$ , определяемая формой  $D_Y$ , является искомым продолжением коцепи  $X$ . Ввиду этого и на основании равенства (9) с  $\#$  вместо  $\flat$  равенство (29) для дизной нормы выполняется.

Наконец, если дана бемольная коцепь  $X$  в  $R$ , то с помощью некоторых предложений из гл. X мы найдем ее продолжение  $Y$  следующим образом. Для любого симплекса  $\sigma = p_0 \dots p_r$  с вершинами в  $\bar{R}$  выберем некоторую последовательность  $p_{i1}, p_{i2}, \dots \rightarrow p_i$  точек множества  $R$  и положим

$$Y \cdot (p_0 \dots p_r) = \lim_{k \rightarrow \infty} X \cdot (p_{0k} \dots p_{rk});$$

существование и свойства коцепи  $Y$  до этого места следуют из леммы (X, 5a). Далее, для любой липшицевской цепи  $A$  в  $\bar{R}$  (X, 6), пусть  $A = \lim^b B_k$ , как в (X, 6.1); положим тогда  $Y \cdot A = \lim Y \cdot B_k$ . Наконец, для любой полиэдральной цепи  $A$  в  $E^n$   $\pi A$  есть липшицевская цепь в  $\bar{R}$ , и мы можем положить  $Y \cdot A = Y \cdot \pi A$ ; равенство (30) следует из (X, 7.10).

**2. Цепи и коцепи в открытых множествах; дальнейшие свойства.** Остальные результаты из гл. V и VII, которые нас интересуют в применении к открытому множеству  $R$ , получить не так легко. Необходимы некоторая перестройка и кое-какой новый материал.

(а) Умножение цепей и коцепей на дизные функции. Пусть  $\varphi$  — дизная функция в  $R$ . (Обычно  $\varphi$  будет дизной функцией в  $E^n$ , рассматриваемой только в  $R$ .) Для полиэдральной цепи  $A$  в  $R$  мы определяем произведение  $\varphi A$ , как и ранее. Полагая

$$(1) \quad N_{\varphi, R}^{(r)} = |\varphi| + (r+1) \mathfrak{L}_{\varphi, R},$$

мы, в точности как и ранее, докажем (сначала для полиэдральных цепей  $A$  в  $R$ ), что

$$(2) \quad |\varphi A|_R^\odot \leq N_{\varphi, R}^{(r)} |A|_R^\odot.$$

$$(3) \quad |\varphi \partial A - \partial \varphi A|_R^b \leq r \mathfrak{L}_{\varphi, R} |A|,$$

$$(4) \quad |\varphi(T_\sigma \sigma - \sigma)|_R^\# \leq \frac{N_{\varphi, R}^{(r)} |\sigma| |\sigma|}{r+1}, \quad \text{если } \mathcal{D}_v(\sigma) \subset R,$$

где  $\odot$  отмечает любую из двух норм. Так как мы еще не определили массу для цепей множества  $R$ , то мы даем ослабленную форму (3) неравенства (VII, 1.8); из доказательства этого последнего неравенства, очевидно, следует (3). Более сильное неравенство (3.10) см. ниже. В силу (2) мы можем определить произведение  $\varphi A$  для бемольных или дизельных цепей  $A$  множества  $R$ , и неравенство (2) все еще будет выполняться. Доказательства, связанные с массой, мы рассмотрим позднее.

Определение и свойства произведения  $\varphi X$  устанавливаются, как и ранее.

Лемма 8с из гл. VI выполняется для любой из двух норм:

$$(5) \quad \text{wkl}_R^{\odot} \varphi_i X = X, \quad \text{если } |\varphi_i|_R^{\odot} \leq N, \quad \varphi_i = 1 \text{ в } R_i, \\ R_i \subset R_{i+1}, \quad \bigcup R_i = R.$$

(b) Носители. *Носитель* цепи или коцепи множества  $R$  определяется совершенно так же, как и раньше; окрестности  $U_\varepsilon(p)$  мы берем в  $R$ . Очевидно, носитель  $\text{spt}(A)$  совпадает с носителем цепи  $A$ , рассматриваемой в  $E^n$ . Если цепь  $A$  лежит в замкнутом множестве  $Q$ , то, очевидно,  $\text{spt}(A) \subset Q$ ; см. также теорему 2А ниже. Носители цепей множества  $R$  являются замкнутыми в  $E^n$  множествами, лежащими в  $R$ ; носители коцепей в  $R$  являются замкнутыми подмножествами множества  $R$  (которые могут и не быть замкнутыми в  $E^n$ ).

Мы говорим, что цепь  $A$  *компактна*, если мы можем записать  $A = \lim_R^{\odot} A_i$ , где  $A_i$  — полиэдральные цепи в компактном множестве, лежащем в  $R$ . [На основании доказываемой ниже теоремы 2А это равносильно требованию, чтобы носитель  $\text{spt}(A)$  был компактен.] Многие свойства лучше всего доказать для компактного случая, а затем перенести на общий случай с помощью следующей леммы:

Лемма 2а. *Если заданы цепь  $A$  множества  $R$  (рассматривается любая из двух норм) и число  $\varepsilon > 0$ , то существует такая компактная дизельная функция  $\varphi$  в  $E^n$ , что*

$$(6) \quad 0 \leq \varphi(p) \leq 1, \quad \mathfrak{L}_\varphi \leq 1, \quad |\varphi A - A|_R^{\odot} < \varepsilon.$$

Здесь применимо доказательство утверждения (VII, 4.1), причем нужно воспользоваться неравенством (2).

Следующая лемма станет тривиальной после того, как будут установлены свойства носителей.

**Лемма 2b.** *Если функция  $\varphi$  компактна, то для произвольной цепи  $A$  множества  $R$  (рассматривается любая из двух норм) компактна и цепь  $\varphi A$ .*

Запишем  $A = \lim_R^\circ A_i$ , где  $A_i$  — полиэдральные цепи в замкнутом множестве  $Q \subset R$ . Мы можем аппроксимировать цепь  $\varphi A_i$  полиэдральной цепью  $B_i$ , для которой  $\text{spt}(B_i) \subset \text{spt}(\varphi A_i)$ . Теперь  $\varphi A = \lim_R^\circ B_i$ , причем цепи  $B_i$  лежат в  $\text{spt}(\varphi) \cap Q$ .

Докажем, что из  $\text{spt}(A) = 0$  следует  $A = 0$ , сначала в предположении, что цепь  $A$  компактна (в том смысле, как это определено выше). Пусть, скажем,  $A = \lim_R^\circ A_i$ , где  $A_i$  — полиэдральные цепи в компактном множестве  $Q \subset R$ . Каждая точка  $p \in Q$  содержится в такой окрестности  $U(p)$ , что  $Y \cdot A = 0$  для любой дизной коцепи  $Y$ , для которой  $D_Y = 0$  вне  $U(p)$ . Конечное число таких окрестностей, скажем  $U_1, \dots, U_m$ , покрывает  $Q$ . Пусть  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  — соответствующее разложение единицы (П. III, лемма 2a). Возьмем теперь любую дизную коцепь  $X$  в  $R$ . Тогда  $\varphi_i X \cdot A = 0$  ( $i > 0$ ), так как  $D_{\varphi_i X} = \varphi_i D_X = 0$  вне  $U_i$ , и  $\varphi_0 X \cdot A = 0$ , так как  $\varphi_0 X \cdot A_i = 0$ . Поэтому  $X \cdot A = \sum (\varphi_i X \cdot A) = 0$ . В дизном случае это доказывает, что  $A = 0$ . Рассмотрим бемольный случай. Пусть взятая выше коцепь  $X$  является бемольной. Тогда  $\varphi_0 X \cdot A = X \cdot \lim \varphi_0 A_k = 0$ . При  $i > 0$  мы можем продолжить  $\varphi_i X$  в такую бемольную коцепь  $Y_i$  в  $E$ , что  $Y_i \cdot \sigma = 0$  для симплексов  $\sigma$ , лежащих вне  $R$  [см. ниже п. (d) при  $\rho = 1$ ]. Пусть  $(Y_i)_\eta$  — среднее для коцепи  $Y_i$  (V, теорема 13A). При достаточно малом  $\eta$ , очевидно,  $D_{(Y_i)_\eta} = 0$  вне  $U_i$ ; поэтому  $\varphi_i X \cdot A = \lim (Y_i)_\eta \cdot A = 0$ . Вновь мы получаем  $X \cdot A = 0$  и  $A = 0$ .

Для произвольной бемольной или дизной цепи  $A$  в  $R$  мы можем выбрать последовательность удовлетворяющих указанным в лемме 2a условиям функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , для которых  $\lim_R^\circ \varphi_i A = A$ . Очевидно,  $\text{spt}(\varphi_i A) \subset \text{spt}(A) = 0$ . В силу леммы 2b цепь  $\varphi_i A$  компактна. По доказанному выше  $\varphi_i A = 0$ . Следовательно,  $A = 0$ .

Доказательства всех остальных свойств носителей (VII, 3.5—14), (VII, 3.19—20) проходят с несущественными изменениями за одним лишь исключением. Чтобы доказать (VII, 3.6), допустим сначала, что цепь  $A$  компактна (в том смысле, как это определено выше). Тогда  $\rho(\text{spt}(A), \text{spt}(X)) > 0$ , и мы можем построить функцию  $\varphi$ , как в прежнем доказательстве, и найти, что  $X \cdot A = 0$ . Для произвольной цепи  $A$  нужно воспользоваться леммой 2a.

Следующая лемма в теореме 3C будет обобщена.

Лемма 2с. Для произвольной цепи  $A$  множества  $R$  (рассматривается любая из двух норм), произвольной окрестности  $U$  носителя  $\text{spt}(A)$  и произвольного числа  $\varepsilon > 0$  существует такая полиэдральная цепь  $B$ , что

$$\text{spt}(B) \subset U, \quad |B - A|_R^{\odot} < \varepsilon.$$

Доказательство такое же, как доказательство утверждения (VII, 5.3); нужно воспользоваться леммой 2а.

Теорема 2А. Для произвольной цепи  $A$  множества  $R$  (рассматривается любая из двух норм) носитель  $\text{spt}(A)$  является пересечением всех замкнутых множеств  $Q \subset R$ , для которых  $A$  лежит в  $Q$  в смысле § 1 (а).

Очевидно,  $\text{spt}(A) \subset Q$  для любого такого  $Q$ . Обратно, пусть  $Q_1, Q_2, \dots$  — последовательность замкнутых множеств, лежащих в  $R$ , каждое из которых содержит некоторую окрестность носителя  $\text{spt}(A)$  и пересечением которых является  $\text{spt}(A)$ . Предыдущая лемма показывает, что  $A$  лежит в каждом  $Q_i$ .

Конечно, носитель  $\text{spt}(A)$  не обязательно является таким множеством  $Q$ , например, если  $A$  есть одномерная цепь, образованная криволинейной дугой.

(с)  $R$ - $\rho$ -нормы. Распространим определения из параграфа (V, 15) на случай открытых множеств. Некоторые из этих свойств нам потребуются при изучении массы, а остальные, в случае  $\rho = 1$ , для общих целей.

Бемольная  $R$ - $\rho$ -норма полиэдральной цепи  $A$  множества  $R$  есть

$$(7) \quad |A|_{R,\rho}^b = \inf \left\{ |A - \partial D| + \frac{|D|}{\rho} : \text{полиэдральные цепи } D \text{ в } R \right\}.$$

Диезная  $R$ - $\rho$ -норма есть

$$(8) \quad |A|_{R,\rho}^{\#} = \inf \left\{ \frac{\sum |a_i| |\sigma_i| |v_i|}{(r+1)\rho} + \left| \sum a_i T_{v_i} \sigma_i \right|_{R,\rho}^b : \right. \\ \left. A = \sum a_i \sigma_i, \text{ каждое } \mathcal{D}_{v_i}(\sigma_i) \subset R \right\}.$$

Заметим, что каждый симплекс  $\sigma_i$  содержится в  $R$ . Следуя приведенным ранее доказательствам, мы сразу находим, сначала в полиэдральном случае,

$$(9) \quad |\partial A|_{R,\rho}^b = \frac{|A|_{R,\rho}^b}{\rho},$$

$$(10) \quad |T_v A - A|_{R,\rho}^{\#} \leq \frac{|A| |v|}{(r+1)\rho}, \text{ если } \mathcal{D}_v(\text{spt}(A)) \subset R.$$

Первое неравенство сразу переносится на случай любых бемольных цепей  $A$  множества  $R$  (в  $R$ - $\rho$ -норме); см. также (3.7), (3.8). Мы находим, далее,

$$(11) \quad |X|_{R,\rho}^b = \sup \{ |X|, \rho |dX| \},$$

$$(12) \quad |X|_{R,\rho}^\# = \sup \{ |X|, (r+1) \rho \mathfrak{L}_{X,R} \}$$

для коцепи  $X$  в множестве  $R$ . Справедливы также остальные формулы и теоремы из (V, 15).

Как в § 1 (е), рассматриваемые нормы характеризуются двумя или тремя из следующих условий ( $\sigma$  и  $\mathcal{D}_v(\sigma)$  берутся в  $R$ ):

$$(13) \quad |\sigma'| \leq |\sigma|, \quad |\partial\sigma'| \leq \frac{|\sigma|}{\rho}, \quad |T_v\sigma - \sigma'| \leq \frac{|\sigma| |\nu|}{(r+1)\rho}.$$

Полагая

$$(14) \quad N_{\varphi, R, \rho}^{(r)} = |\varphi| + (r+1) \rho \mathfrak{L}_{\varphi, R},$$

мы находим для любой из двух норм

$$(15) \quad |\varphi A|_{R,\rho}^\circ \leq N_{\varphi, R, \rho}^{(r)} |A|_{R,\rho}^\circ, \quad |\varphi X|_{R,\rho}^\circ \leq N_{\varphi, R, \rho}^{(r)} |X|_{R,\rho}^\circ.$$

(д) О продолжении коцепей. (См. также лемму 4b.) Пусть  $X$  — бемольная или дизная коцепь в  $R$ , для которой носитель  $\text{spt}(X)$  является замкнутым в  $E^n$  множеством, лежащим в  $R$ . Тогда мы можем определить продолжение  $Y$  коцепи  $X$  на  $E^n$ , причем  $Y=0$  вне  $R$ , и мы будем иметь

$$(16) \quad |Y| = |X|, \quad |dY| = |dX|, \quad \mathfrak{L}_Y = \mathfrak{L}_{X,R}, \quad |Y|_p^\circ = |X|_{R,\rho}^\circ.$$

Чтобы определить  $Y$ , возьмем любой симплекс  $\sigma$  и запишем его в виде полиэдральной цепи  $\sum \sigma_i$ , где каждый симплекс  $\sigma_i$  или лежит в  $R$ , или же не имеет ни одной точки в  $\text{spt}(X)$ . Напишем  $Y \cdot \sigma_i = X \cdot \sigma_i$  в первом случае и  $Y \cdot \sigma_i = 0$  во втором и положим  $Y \cdot \sigma = \sum Y \cdot \sigma_i$ . Результат, очевидно, не зависит от представления  $\sum \sigma_i$ , которым мы воспользовались [см. лемму (П. II, 3b)].

Первые два из соотношений (16) очевидны. Третье будет установлено, если мы докажем надлежащее неравенство относительно  $Y \cdot (T_v\sigma - \sigma)$  для достаточно малых  $\sigma$ . Но это последнее будет следовать из неравенств

$$|Y \cdot (T_{kv/m}\sigma - T_{(k-1)v/m}\sigma)| \leq \mathfrak{L}_{X,R} \frac{|\nu| |\sigma|}{m}, \quad k = 1, \dots, m.$$

При достаточно большом  $m$  рассматриваемая цепь деформации или будет лежать в  $R$ , или же не будет иметь ни одной точки в  $\text{spt}(X)$ , что делает нужное неравенство очевидным. Последнее из равенств (16) тем самым также доказано.

(е) О нормах компактных цепей. Пусть  $A$  — некоторая (дизная или бемольная) цепь множества  $R$ . Если  $R \subset R'$ , то в силу неравенств (1.2) и (1.14) ее можно также рассматривать и как цепь множества  $R'$ ; см. ниже п. (f). Обратное утверждение может быть и неверно; см. начало § 1. Но оно верно, если цепь компактна. Это вытекает из следующей теоремы:

*Теорема 2В. Пусть  $A$  — некоторая цепь (рассматривается любая из двух норм) множества  $R$ ; тогда*

$$(17) \quad |A|_{R,\rho}^{\odot} \leq \left[ 1 + \frac{(r+1)\rho}{\eta} \right] |A|_{\rho}^{\odot}, \text{ если } U_{\eta}(\text{spt}(A)) \subset R.$$

Возьмем любое  $\zeta < \eta$  и любое  $\varepsilon > 0$ . Выберем такую коцепь  $X$  в  $R$  (относительно той же нормы), чтобы

$$|X|_{R,\rho}^{\odot} \leq 1, \quad X \cdot A \geq |A|_{R,\rho}^{\odot} - \varepsilon.$$

Как и в (V, 12.3), определим  $\varphi = \varphi_{Q,\eta}$ ,  $Q = \text{spt}(A)$ . В силу п. (d) (15), (14) и (VII, 3.13) мы можем продолжить коцепь  $\varphi X$ , получив коцепь  $Y$  в  $E^n$ , для которой

$$|Y|_{\rho}^{\odot} = |\varphi X|_{R,\rho}^{\odot} \leq 1 + \frac{(r+1)\rho}{\zeta},$$

$$Y \cdot A = \varphi X \cdot A = X \cdot \varphi A = X \cdot A \geq |A|_{R,\rho}^{\odot} - \varepsilon.$$

Эти неравенства показывают, что

$$|A|_{\rho}^{\odot} \geq \frac{|A|_{R,\rho}^{\odot} - \varepsilon}{1 + (r+1)\rho/\zeta},$$

откуда и следует (17).

Заметим, что в случае бемольной нормы (17) сразу же следует из леммы (VII, 5b), если  $A$  — полиэдральная цепь; при  $\rho \neq 1$  в доказательстве нужно сделать очевидные изменения. Случай произвольной бемольной цепи  $A$  можно с помощью леммы 2с свести к этому случаю.

(f) Связи между пространствами цепей и коцепей. Допустим, что  $R' \subset R$ . В силу (1.11) и (1.17) каждая (бемольная или дизная) коцепь  $X$  в  $R$  определяет некоторую коцепь  $X_{R'}$  в  $R'$  — часть коцепи  $X$  в  $R'$ . Как мы отметили в начале § 1, коцепь в  $R'$  может не быть продолжаема в коцепь в  $R$ . Напомним, что мы не знаем, является ли пространство  $C_R^{\#r}$  слабо плотным в  $C_R^{br}$ .

Остается справедливой теорема 14В гл. V: бемольные цепи множества  $R$  можно рассматривать как дизные цепи множества  $R$ .

Мы должны показать, что если  $A \neq 0$  — некоторая бемольная цепь множества  $R$ , то соответствующая дизная цепь  $A'$  будет  $\neq 0$ . В силу (b)  $\text{spt}(A) \neq \emptyset$ ; поэтому существует точка  $p \in R$  и дизная коцепь  $X$  в  $R$ , для которой  $X \cdot A \neq 0$  и  $D_X = 0$  вне некоторой окрестности  $U_\varepsilon(p)$ . Если  $A = \lim_R^b A_i$ , где  $A_i$  — полиэдральные цепи, лежащие в замкнутом в  $E^n$  множестве  $Q \subset R$ , то  $X \cdot A = \lim X \cdot A_i$ . Но вместе с тем  $A' = \lim_R^\# A_i$ ; поэтому  $X \cdot A' \neq 0$  и  $A' \neq 0$ .

**Теорема 2С.** Допустим, что  $R' \subset R$ . Пусть  $A$  — некоторая цепь множества  $R'$  (рассматривается любая из двух норм). Тогда при любом  $\rho$  ее можно также рассматривать и как цепь множества  $R$  в  $R$ - $\rho$ -норме. Множество  $\text{spt}(A)$  во всех случаях остается одним и тем же. Если  $A = 0$  в одной норме, то это верно и во всех нормах; поэтому отображение пространства  $C_r^\odot(R')$  в пространство  $C_r^\odot(R)$  является взаимно однозначным.

Пусть, скажем,  $A = \lim_{R'}^\odot A_i$ , где  $A_i$  — полиэдральные цепи в замкнутом множестве  $Q \subset R'$ . На основании неравенств (1.2), (1.14) и неравенства (V, 15.7) для  $R$  предел  $\lim_{R, \rho}^\odot A_i$  при всех  $\rho$  существует; поэтому в  $R$ - $\rho$ -норме определена некоторая цепь  $A'$  множества  $R$ , которую можно будет отождествить с  $A$ , коль скоро мы докажем, что если  $A \neq 0$ , то и  $A' \neq 0$ . Определение носителя  $\text{spt}(A)$  показывает, что он не зависит от  $R$ , если только  $R' \subset R$ . Как и в теореме (V, 15А), мы видим, что этот носитель не зависит от  $\rho$ . Если  $A \neq 0$ , то  $\text{spt}(A') = \text{spt}(A) \neq \emptyset$  и  $A' \neq 0$ , что и завершает доказательство.

**Теорема 2D.** Пусть  $A$  — некоторая цепь множества  $R$  (рассматривается любая из двух норм); допустим, что  $U_\eta(\text{spt}(A)) \subset R'$ . Тогда  $A$  можно при любом  $\rho$  рассматривать как цепь множества  $R'$  в  $R'$ - $\rho$ -норме. В частности, если цепь  $A$  компактна, то это выполняется для любого открытого множества  $R'$ , содержащего  $\text{spt}(A)$ .

Эта теорема доказывается так же, как и предыдущая; следует воспользоваться леммой 2С и теоремой 2В.

**3. Свойства массы.** Мы покажем, что массу цепей множества  $R$  можно определить, как в (V, 16), и что она не зависит от  $R$ ; ранее установленные свойства массы продолжают сохраняться.

Пусть  $A$  — некоторая бемольная цепь множества  $R$ . Тогда мы по определению полагаем

$$(1) \quad |A|_{R,b} = \inf \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} |A_i| : \lim_R^b A_i = A, A_i \text{ — полиэдральные цепи,} \right. \\ \left. A_i \text{ лежат в } Q \text{ (для всех } i), Q \text{ замкнуто, } Q \subset R \right\},$$

$$(2) \quad |A|_{R,(b)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} |A|_{R,\rho}^b,$$

$$(3) \quad |A|_{R,[b]} = \sup \{X \cdot A : X \text{ — бемольные коцепи в } R, |X| \leq 1\}.$$

Подобным же образом мы определяем дизельные массы; они определены для любой дизельной цепи  $A$ . На основании приводимой ниже теоремы 3А мы можем любую из всех этих масс обозначать через  $|A|$ .

*Теорема 3А. Для бемольных цепей все шесть масс совпадают; для дизельных цепей совпадают дизельные массы. Для полиэдральной цепи  $A$  все они равны  $|A|$ . Эти массы не зависят от  $R$  и равны массе  $|A|$ , определяемой, если рассматривать цепь  $A$  как лежащую в  $E^n$ .*

Прежде всего мы, как и ранее, доказываем, что  $|A|_{R,[\odot]} = |A|_{R,(\odot)}$  (обе нормы), а также что  $|A|_{R,(\odot)} \leq |A|_{R,\odot}$ .

Затем мы докажем, что

$$(4) \quad |A|_{R,\odot} \leq |A|.$$

Мы можем считать, что масса  $|A|$  конечна. Допустим сначала, что цепь  $A$  компактна; пусть, скажем,  $U_{2\eta}(Q_0) \subset R$ ,  $Q_0 = \text{spt}(A)$ . Положим  $R' = U_{\eta}(Q_0)$ ,  $Q = \bar{R}'$ . Если задано  $\varepsilon > 0$ , то нам нужно только найти полиэдральную цепь  $B$  в  $Q$ , для которой

$$(5) \quad |B - A|_R^{\odot} < \varepsilon, \quad |B| < |A| + \varepsilon.$$

Рассматривая сначала бемольную норму, выберем  $\rho \leq 1$  так, чтобы было

$$\frac{(r+1)\rho|A|}{\eta} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(|A| + \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем полиэдральную цепь  $A'$  в  $R'$ , для которой (см. теорему 2D)

$$|A' - A|_{R',\rho}^b < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, так как  $|A|_{\rho}^b \leq |A|$ , то из (2.17) получаем

$$|A'|_{R', \rho}^b < |A|_{R', \rho}^b + \frac{\varepsilon}{2} \leq \left[1 + \frac{(r+1)\rho}{\eta}\right] |A|_{\rho}^b + \frac{\varepsilon}{2} < |A| + \varepsilon.$$

Поэтому найдется такая полиэдральная цепь  $D$  в  $R'$ , что

$$|A' - \partial D| + \frac{|D|}{\rho} < |A| + \varepsilon.$$

Положим  $B = A' - \partial D$ . Тогда  $|B| < |A| + \varepsilon$  и

$$\begin{aligned} |B - A|_R^b &\leq |A' - A|_R^b + |\partial D|_R^b \leq |A' - A|_{R', \rho}^b + |D| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \rho(|A| + \varepsilon) < \varepsilon. \end{aligned}$$

В случае дизной нормы выберем  $\rho$  и  $A'$ , как и прежде. Тогда  $|A'|_{R', \rho}^{\#} < |A| + \varepsilon$ , и мы можем написать  $A' = \sum a_i \sigma_i$  и найти векторы  $v_i$  и полиэдральную цепь  $D$  в  $R'$ , для которых  $\mathcal{D}_{v_i}(\sigma_i) \subset R'$  и

$$\frac{\sum |a_i| |\sigma_i| |v_i|}{(r+1)\rho} + \left| \sum a_i T_{v_i} \sigma_i - \partial D \right| + \frac{|D|}{\rho} < |A| + \varepsilon.$$

Положим  $B = \sum a_i T_{v_i} \sigma_i - \partial D$ . Тогда  $|B| < |A| + \varepsilon$  и

$$\begin{aligned} |B - A|_R^{\#} &\leq |A - A'|_{R', \rho}^{\#} + \left| \sum a_i (T_{v_i} \sigma_i - \sigma_i) \right|_R^{\#} + |\partial D|_R^{\#} < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sum |a_i| |\sigma_i| |v_i|}{r+1} + |D| < \frac{\varepsilon}{2} + \rho(|A| + \varepsilon) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Если цепь  $A$  не компактна, то по лемме 2а выберем такую компактную дизную функцию  $\varphi$ , что  $|\varphi A - A|_R^{\odot} < \varepsilon/2$ . Выберем замыкание  $Q$  некоторой окрестности носителя  $\text{spt}(A)$ ,  $Q \subset R$ . Тогда  $U_{\eta}(\text{spt}(\varphi A)) \subset Q$  при некотором  $\eta > 0$ . Выберем в соответствии с доказанным выше такую полиэдральную цепь  $B$  в  $Q$ , что  $|B - \varphi A|_R^{\odot} < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $|B| < |\varphi A| + \varepsilon$ . Так как в силу (VII, 1.7)  $|\varphi A| \leq |A|$ , то отсюда мы получаем (5), а следовательно, и (4).

Так как  $|A|_{\rho}^{\odot} \leq |A|_{R, \rho}^{\odot}$ , то при  $\rho \rightarrow 0$  мы получаем

$$|A| = |A|_{\odot} \leq |A|_{R, (\odot)}.$$

Таким образом, все массы (когда они определены) равны  $|A|$ , что и завершает доказательство.

**Теорема 3В.** *Масса полунепрерывна снизу в любом из рассматриваемых пространств.*

Это непосредственно вытекает из теоремы (V, 16B) и того факта, что если цепь множества  $R$  рассматривается как цепь пространства  $E^n$ , то ее норма при этом не возрастает.

Теорема 3C. Теоремы 4A и 5A гл. VII справедливы для цепей множества  $R$ .

Остаются в силе прежние доказательства. Мы получаем  $|A' - A|_R^\odot < \varepsilon$ ,  $|B - A|_R^\odot < \varepsilon$  (рассматривается любая из двух норм).

Теорема 3D. Произвольную цепь  $A$  множества  $R$  (рассматривается любая из двух норм), имеющую конечную массу, мы можем рассматривать как цепь любого открытого множества  $R'$ , содержащего  $\text{spt}(A)$ .

Выберем некоторую окрестность  $U$  множества  $\text{spt}(A)$ , замыкание  $Q$  которой содержится в  $R'$ . Выберем по предыдущей теореме компактные дизъюнктные функции  $\varphi_i$  так, чтобы было

$$|A - \varphi_i A| < \frac{1}{2^{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Пусть, скажем,  $Q_i = \text{spt}(\varphi_i A)$ ,  $U_{2\eta_i}(Q_i) \subset U$ . Найдем по предыдущей теореме такую полиэдральную цепь  $B_i$  в  $U_{\eta_i}(Q_i)$ , что

$$|B_i - \varphi_i A|_R^\odot < \varepsilon_i, \quad \left[1 + \frac{r+1}{\eta_i}\right] \varepsilon_i < \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Тогда в силу (2.17)

$$|B_i - \varphi_i A|_{R'}^\odot \leq \left[1 + \frac{r+1}{\eta_i}\right] |B_i - \varphi_i A|^\odot < \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Поэтому  $B_1, B_2, \dots$  — фундаментальная последовательность цепей в  $Q$  относительно  $R'$ -нормы, и, следовательно, она определяет некоторую цепь  $A'$  множества  $R'$ . Рассматривая последовательность  $B_1, B_2, \dots$  в  $R$ -норме, мы видим, что цепь  $A$  равна цепи  $A'$ , рассматриваемой как цепь множества  $R$ .

Как и ранее, масса обладает и другими элементарными свойствами; например,

$$(6) \quad |X \cdot A| \leq |X| |A|,$$

$$(7) \quad \left. |T_v A - A|_{R,p}^b \leq |v| \left( \frac{|A|}{p} + |\partial A| \right) \right\}, \text{ если } \mathcal{D}_v(\text{spt}(A)) \subset R,$$

$$(8) \quad |T_v A - A|_{R,p}^\# \leq \frac{|v| |A|}{(r+1)p}$$

$$(9) \quad |\varphi A| \leq |\varphi| |A|, \quad |\partial \varphi A| \leq r_{\varphi,R}^Q |A| + |\varphi| |\partial A|,$$

$$(10) \quad |\varphi \partial A - \partial \varphi A| \leq r_{\varphi,R}^Q |A|.$$

При выводе неравенства (10) для бемольных цепей  $A$  на основании уже рассмотренного случая полиэдральных цепей  $A$  мы пользуемся найденной по теореме 3С последовательностью полиэдральных цепей  $B_1, B_2, \dots$  в замкнутом множестве  $Q \subset R$ , для которой  $\lim_R^b B_i = A$ ,  $\lim |B_i| = |A|$ . Аналогично поступаем при выводе неравенств (7) и (8), причем мы дополнительно требуем, чтобы было  $\mathcal{D}_v(\text{spt}(B_i)) \subset Q$ .

**Теорема 3Е.** Пусть  $\alpha(p)$  — клеточно-непрерывная суммируемая  $r$ -вектор-функция в  $E^n$ . Положим  $Q = \text{spt}(\alpha)$ . Тогда для любого открытого множества  $R \supset Q$  функция  $\alpha$  определяет некоторую бемольную цепь  $\tilde{\alpha}$  множества  $R$ , и при этом  $|\tilde{\alpha}| = \int \langle \alpha \rangle_0$ ,  $\text{spt}(\tilde{\alpha}) = Q$ .

Мы можем применить (VI, 7.2), теоремы 3D и 3А и (VII, 3.21).

**4. Об открытых множествах, которым принадлежит цепь.** В § 1 мы определили цепи множества  $R$  (рассматривается любая из двух норм) как элементы пополнения линейного пространства полиэдральных цепей, наделенного  $R$ -нормой, предполагая, что удовлетворяется некоторое условие. Теорема 4А показывает, что это условие эквивалентно включению  $\text{spt}(A) \subset R$ . Теорема 4В показывает, что если  $A$  — произвольная цепь множества  $R$ , то она является также цепью некоторых меньших открытых множеств. См. также теоремы 5В и 6В.

Мы будем говорить, что множества  $Q_1, Q_2, \dots \rightarrow \infty$ , если каждое компактное множество пересекается лишь с конечным числом из них. Мы говорим, что функции  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  образуют расширяющуюся последовательность, если  $0 \leq \varphi_i(p) \leq 1$ , множества  $\text{spt}(\varphi_i)$  компактны, множества  $\text{spt}(1 - \varphi_i) \rightarrow \infty$  и при некотором  $N$  мы имеем  $\mathcal{L}_{\varphi_i} \leq N$  (для всех  $i$ ).

**Лемма 4а.** Пусть  $A_1, A_2, \dots$  — цепи множества  $R$  (рассматривается любая из двух норм), для которых ряд  $\sum |A_i|_{R,p}^\odot$  сходится, и множества  $\text{spt}(A_i) \rightarrow \infty$ . Тогда  $A = \sum^\odot A_i$  есть цепь множества  $R$  и  $A = \sum_{R,p}^\odot A_i$ .

Выберем такие окрестности  $U_i$  множеств  $\text{spt}(A_i)$ , что  $\bar{U}_i \subset R$  и  $\bar{U}_i \rightarrow \infty$ . Для каждого  $i$  и  $k$  выберем полиэдральную цепь  $A_{ik}$  в  $U_i$ , для которой  $|A_i - A_{ik}|_{R,p}^\odot < 1/2^{i+k}$  [лемма 2с, 2(с)]; положим

$$B_k = A_{1k} + \dots + A_{kk}.$$

Тогда легко видеть, что если  $k' > k$ , то

$$\begin{aligned} |B_{k'} - B_k|_{R,\rho}^{\odot} &\leq \sum_{j=1}^k |A_{jk'} - A_{jk}|_{R,\rho}^{\odot} + \sum_{j=k+1}^{k'} |A_{jk'}|_{R,\rho}^{\odot} < \\ &< \sum_{j=k+1}^{k'} |A_j|_{R,\rho}^{\odot} + \frac{2}{2^k}; \end{aligned}$$

поэтому предел  $B = \lim^{\odot} B_k$  существует. Так как

$$|B_k - (A_1 + \dots + A_k)|^{\odot} < \frac{1}{2^k},$$

то мы имеем  $B = A$ . Теперь  $Q = \bigcup \overline{U_i}$  есть замкнутое множество, лежащее в  $R$ ,  $B_k$  — полиэдральные цепи в  $Q$ , образующие фундаментальную последовательность в  $R$ - $\rho$ -норме, и  $A = \lim^{\odot} B_k$ ; следовательно,  $A$  есть цепь множества  $R$  и  $A = \lim_{R,\rho}^{\odot} B_k = \sum_{R,\rho}^{\odot} A_k$ .

**Теорема 4А.** Пусть  $A_1, A_2, \dots$  — цепи множества  $R$  (рассматривается любая из двух норм), пусть  $A$  — цепь пространства  $E$ , и пусть

$$(1) \quad \lim_{i,j \rightarrow \infty} |A_j - A_i|_{R,\rho}^{\odot} = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} A_i = A, \quad \text{spt}(A) \subset R.$$

Тогда  $A$  есть цепь множества  $R$  и  $A = \lim_{R,\rho}^{\odot} A_i$ .

Напомним, что, как мы показали примером почти в самом начале § 1, одно лишь условие  $\text{spt}(A) \subset R$  не является достаточным; см., однако, теоремы 2D и 3D.

Прежде всего, выбрав некоторую полиэдральную цепь  $A'_i$  в  $R$ , для которой  $|A'_i - A_i|_{R,\rho}^{\odot} < 1/2^i$ , мы видим, что условия будут выполняться, если заменить цепи  $A_i$  цепями  $A'_i$ ; поэтому мы можем считать, что  $A_i$  — полиэдральные цепи. Далее, перейдя, если это необходимо, к подпоследовательности, мы можем считать, что

$$(2) \quad |A_j - A_i|_{R,\rho}^{\odot} < \frac{1}{(r+3)2^i} \quad \text{при} \quad j \geq i.$$

Пусть  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — такая расширяющаяся последовательность, что  $\varphi_i = 1$  в  $\text{spt}(A_i)$  и  $\varrho_{\varphi_i} \leq 1/\rho$ . Тогда из (VII, 3.13), (2.15) и (2.14) мы получаем

$$\begin{aligned} (3) \quad |A_j - \varphi_i A_j|_{R,\rho}^{\odot} &\leq |A_j - A_i|_{R,\rho}^{\odot} + |\varphi_i(A_j - A_i)|_{R,\rho}^{\odot} \leq \\ &\leq \frac{1 + N_{\varphi_i, R, \rho}^{(r)}}{(r+3)2^i} \leq \frac{1}{2^i}, \quad j \geq i. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$(4) \quad |(\varphi_i - \varphi_{i-1}) A_j|_{R, \rho}^{\odot} \leq \frac{3}{2^i}, \quad j \geq i.$$

По теореме 2D  $\varphi_i A$  и  $(\varphi_i - \varphi_{i-1}) A$  являются цепями множества  $R$ . Теперь мы покажем, что

$$(5) \quad \lim_{j \rightarrow \infty}^{\odot}_{R, \rho} \varphi_i A_j = \varphi_i A, \quad \lim_{j \rightarrow \infty}^{\odot}_{R, \rho} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) A_j = (\varphi_i - \varphi_{i-1}) A.$$

Так как  $\lim_{\rho}^{\odot} A_j = A$  (V, 15), то, если опустить индекс  $R$ , эти соотношения сразу будут следовать из (2.15). Поскольку  $\text{spt}(\varphi_i)$  и  $\text{spt}(\varphi_i - \varphi_{i-1})$  компактны, с помощью (2.17) мы получаем эти соотношения также и с индексом  $R$ .

В силу теоремы (VII, 4A)

$$\varphi_0 A + \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) A = \lim_{i \rightarrow \infty}^{\odot} \varphi_i A = A.$$

Кроме того, из (4) и (5) следует, что  $|(\varphi_i - \varphi_{i-1}) A|_{R, \rho}^{\odot} \leq 3/2^i$ . Так как  $\text{spt}((\varphi_i - \varphi_{i-1}) A) \rightarrow \infty$ , то лемма 4a показывает, что  $A$  есть цепь множества  $R$ , и

$$(6) \quad A = \lim_{i \rightarrow \infty}^{\odot}_{R, \rho} \varphi_i A.$$

Если задано  $\varepsilon > 0$ , то мы берем такое  $k$ , что

$$|A - \varphi_k A|_{R, \rho}^{\odot} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда в силу (3)  $|A_j - \varphi_k A_j|_{R, \rho}^{\odot} < \varepsilon/3$ ,  $j \geq k$ . На основании (5) мы можем так выбрать  $j_0 \geq k$ , что

$$|\varphi_k A - \varphi_k A_j|_{R, \rho}^{\odot} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad j \geq j_0.$$

Из этих неравенств получаем  $|A - A_j|_{R, \rho}^{\odot} < \varepsilon$ ,  $j \geq j_0$ , чем доказано, что  $A = \lim_{j \rightarrow \infty}^{\odot}_{R, \rho} A_j$ . Теорема доказана.

Для доказательства следующей теоремы нам потребуется лемма:

Лемма 4b. Пусть  $X$  — некоторая коцепь в открытом множестве  $R$  (рассматривается любая из двух норм). Положим

$$(7) \quad S = \overline{\text{spt}}(X) \setminus R, \quad R^* = E \setminus S.$$

Тогда существует такая коцепь  $Y$  в  $R^*$ , равная  $X$  в  $R$  и нулю в  $E \setminus \bar{R}$ , что

$$(8) \quad |Y| = |X|, \quad |dY| = |dX|, \quad \mathfrak{L}_{Y, R^*} = \mathfrak{L}_{X, R}, \quad |Y|_{R^*, \rho}^{\odot} = |X|_{R, \rho}^{\odot}.$$

Здесь применимо доказательство, изложенное в п. (d) § 2.

Теорема 4В. Пусть  $A$  — некоторая цепь множества  $R$  (рассматривается любая из двух норм). Положим

$$(9) \quad R' = R \cap U_\eta(Q), \quad Q = \text{spt}(A).$$

Тогда  $A$  есть цепь множества  $R'$  и

$$(10) \quad |A|_{R',p}^\odot \leq \left[1 + \frac{(r+1)\rho}{\eta}\right] |A|_{R,p}^\odot.$$

Допустим сначала, что  $A$  — полиэдральная цепь; тогда  $A$  является цепью множества  $R'$ . Если задано  $\varepsilon < \eta$ , то мы выберем такую коцепь  $X$  в  $R'$ , что

$$|X|_{R',p}^\odot \leq 1, \quad X \cdot A > |A|_{R',p}^\odot - \varepsilon.$$

Положим  $\zeta = \eta - \varepsilon$ ,  $\varphi = \varphi_{Q,\zeta}$  (V, 12.3),  $Y = \varphi X$ ; продолжим  $Y$ , как указано в последней лемме, заменив в ней  $X$  и  $R$  на  $\varphi X$  и  $R'$ . Возьмем любую точку  $p \in R$ . Если  $p \in R'$ , то  $p$  не принадлежит  $S$ ; если же  $p$  не содержится в  $R'$ , то  $\rho(p, Q) \geq \eta > \zeta$ ,  $p$  не содержится в  $\text{spt}(\varphi X)$  и снова  $p$  не принадлежит  $S$ . Это показывает, что  $R \subset R^*$  и что коцепь  $Y$  определена в  $R$ . В силу (8), (2.15) и (2.14)

$$|Y|_{R,p}^\odot = |\varphi X|_{R',p}^\odot \leq 1 + \frac{(r+1)\rho}{\zeta}.$$

Кроме того, из (VII, 3.13) получаем

$$Y \cdot A = \varphi X \cdot A = X \cdot \varphi A = X \cdot A > |A|_{R,p}^\odot - \varepsilon.$$

Так как  $Y \cdot A \leq |Y|_{R,p}^\odot |A|_{R,p}^\odot$ , то неравенство (10) доказано.

Теперь рассмотрим общий случай. Если задано  $\varepsilon < \eta$ , то положим  $\zeta = \eta - \varepsilon$  и выберем полиэдральные цепи  $A_0, A_1, \dots$  в  $R'' = R \cap U_\varepsilon(Q)$  (лемма 2с) так, чтобы было

$$|A_i - A|_{R,p}^\odot < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Положим  $B_i = A_i - A_{i-1}$  ( $i \geq 1$ ); тогда

$$R_i = R \cap U_\zeta^\eta(\text{spt}(B_i)) \subset R'.$$

и поэтому в силу доказанного выше

$$|B_i|_{R',p}^\odot \leq |B_i|_{R_i,p}^\odot \leq N_\zeta |B_i|_{R,p}^\odot \leq \frac{3N_\zeta \varepsilon}{2^i},$$

где  $N_\zeta = 1 + (r+1)\rho/\zeta$ . Кроме того,

$$|A_0|_{R',p}^\odot \leq N_\zeta |A_0|_{R,p}^\odot \leq N_\zeta (|A|_{R,p}^\odot + \varepsilon).$$

Теперь  $A_i$  являются цепями множества  $R'$ ,  $\lim |A_j - A_i|_{R', \rho}^{\odot} = 0$ ,  $\lim^{\odot} A_i = A$  и  $\text{spt}(A) \subset R'$ ; следовательно, в силу теоремы 4А  $A$  есть цепь множества  $R'$ , и  $A = \lim_{R', \rho}^{\odot} A_i$ . Далее,

$$|A|_{R', \rho}^{\odot} \leq |A_0|_{R', \rho}^{\odot} + \sum |B_i|_{R', \rho}^{\odot} \leq N_{\zeta} (|A|_{R, \rho}^{\odot} + 4\varepsilon),$$

и неравенство (10) доказано.

**5. Одно представление для бемольных цепей.** Мы покажем, что любая бемольная цепь  $A$  множества  $R$  является суммой двух цепей, одна из которых  $A - \partial D$  является цепью конечной массы, а другая  $\partial D$  — границей цепи конечной массы; кроме того, как в (1.1), сумма этих масс сколь угодно близка к  $R$ -норме цепи  $A$ . Мы будем пользоваться  $R$ - $\rho$ -нормой и докажем теорему:

**Теорема 5А.** Пусть  $A$  — некоторая бемольная цепь множества  $R$ . Тогда для всякого  $\varepsilon > 0$  существует такая бемольная цепь  $D$  множества  $R$ , что

$$(1) \quad |A - \partial D| + \frac{|D|}{\rho} < |A|_{R, \rho}^b + \varepsilon.$$

Допустим сначала, что  $A$  — компактная цепь. Пусть, скажем,

$$U_{3\eta}(Q) \subset R, \quad Q = \text{spt}(A).$$

Положим  $N_{\zeta} = 1 + (r+1)\rho/\zeta$ . Если задано  $\varepsilon > 0$ , то положим  $\varepsilon' = \varepsilon/(1 + 3N_{\eta})$  и выберем полиэдральные цепи  $A_0, A_1, \dots$  в  $U_{\eta}(Q)$  (лемма 2с) так, чтобы было

$$|A_i - A|_{R, \rho}^b < \frac{\varepsilon'}{2^i}.$$

Мы можем найти полиэдральную цепь  $D_0$  в  $R$ , для которой

$$|A_0 - \partial D_0| + \frac{|D_0|}{\rho} < |A|_{R, \rho}^b + \varepsilon'.$$

Если положить  $R' = U_{2\eta}(Q)$ , то при  $i \geq 1$  теорема 2В дает

$$|A_i - A_{i-1}|_{R', \rho}^b \leq N_{\eta} |A_i - A_{i-1}|_{\rho}^b < \frac{3N_{\eta}\varepsilon'}{2^i};$$

поэтому мы можем выбрать такую полиэдральную цепь  $D_i$  в  $U_{2\eta}(Q)$ , что

$$|A_i - A_{i-1} - \partial D_i| + \frac{|D_i|}{\rho} < \frac{3N_{\eta}\varepsilon'}{2^i}.$$

Теперь  $D = \sum D_i$  есть цепь, лежащая в некотором компактном подмножестве множества  $R$ ; поэтому  $D$  является цепью множества  $R$ .

Цепью множества  $R$  является и  $A = A_0 + \sum (A_i - A_{i-1})$ , где ряд сходится в  $R$ - $\rho$ -норме; поэтому

$$A - \partial D = (A_0 - \partial D_0) + (A_1 - A_0 - \partial D_1) + \dots$$

и

$$|A - \partial D| + \frac{|D|}{\rho} < |A|_{R, \rho}^b + \varepsilon' + \sum \frac{3N_i \varepsilon'}{2^i} = |A|_{R, \rho}^b + \varepsilon.$$

Возьмем теперь любую бемольную цепь  $A$  множества  $R$ . Если задано  $\varepsilon > 0$ , то, как и ранее, определим  $N_1$  ( $\eta = 1$ ) и  $\varepsilon'$ . Выберем расширяющуюся последовательность  $\varphi_0, \varphi_1, \dots$  (§ 4), для которой (лемма 2а)

$$|\varphi_i A - A|_{R, \rho}^b < \frac{\varepsilon'}{2^i}.$$

По доказанному выше существует такая бемольная цепь  $D_0$  множества  $R$ , что

$$|\varphi_0 A - \partial D_0| + \frac{|D_0|}{\rho} < |A|_{R, \rho}^b + \varepsilon'.$$

Положим

$$R_i = R \cap U_1(\text{spt}(\varphi_i A - \varphi_{i-1} A)).$$

По теореме 4В

$$|(\varphi_i - \varphi_{i-1}) A|_{R_i, \rho}^b \leq N_1 |(\varphi_i - \varphi_{i-1}) A|_{R, \rho}^b < \frac{3N_1 \varepsilon'}{2^i};$$

поэтому существует такая бемольная цепь  $D_i$  множества  $R$ , что

$$|(\varphi_i - \varphi_{i-1}) A - \partial D_i| + \frac{|D_i|}{\rho} < \frac{3N_1 \varepsilon'}{2^i}.$$

Так как ряд  $\sum |D_i|$  сходится и  $\text{spt}(D_i) \rightarrow \infty$ , то  $D = \sum D_i$  есть цепь множества  $R$  (лемма 4а или же теорема 3D). В точности так же, как и раньше, показываем, что неравенство (1) выполняется.

В качестве следствия теоремы 5А мы докажем теорему о непрерывности:

**Теорема 5В.** Для любой бемольной цепи  $A$  множества  $R$  и любых чисел  $\rho, \varepsilon > 0$  существует такое открытое множество  $R'$ , что  $\bar{R}' \subset R$ ,  $A$  есть бемольная цепь множества  $R'$  и

$$(2) \quad |A|_{R', \rho}^b < |A|_{R, \rho}^b + \varepsilon.$$

Выберем  $D$  по теореме 5А, и пусть  $R'$  — такая окрестность множества  $\text{spt}(A) \cup \text{spt}(D)$ , что  $\bar{R}' \subset R$ . По теореме 3D, цепи  $A - \partial D$  и  $D$  являются бемольными цепями множества  $R'$ ; поэтому бемольными цепями множества  $R'$  будут также  $\partial D$  и  $A$ . Далее,

$$|A|_{R', \rho}^b \leq |A - \partial D|_{R', \rho}^b + |\partial D|_{R', \rho}^b \leq |A - \partial D| + \frac{|D|}{\rho} < |A|_{R, \rho}^b + \varepsilon.$$

**6. Одно представление для дизельных цепей.** Мы докажем теорему, находящуюся в таком же отношении к (2.8), в каком теорема 5А находится к (2.7). Сначала мы введем новую норму.

Для данного открытого множества  $R$  и числа  $\rho > 0$  *сдвиговая  $R$ - $\rho$ -норма*  $|A|_{R,\rho}^T$  полиэдральной цепи  $A$  в  $R$  задается формулой (2.8), в которой бемольная  $R$ - $\rho$ -норма заменена массой. Очевидно,

$$(1) \quad |A|_{R,\rho}^\# \leq |A|_{R,\rho}^T \leq |A|.$$

Это — норма в линейном пространстве полиэдральных цепей в  $R$ . Элементы пополнения этого пространства, получающиеся при рассмотрении последовательностей полиэдральных цепей в замкнутом множестве, лежащем в  $R$ , образуют пространство *сдвиговых цепей множества  $R$* . Сдвиговые цепи можно также рассматривать и как дизельные цепи, подобно тому как в качестве дизельных цепей мы могли рассматривать бемольные цепи [2(f)].

Как и в (2.10), мы сразу находим

$$(2) \quad |T_v A - A|_{R,\rho}^T \leq \frac{|A| |v|}{(r+1)\rho}, \text{ если } \mathcal{D}_v(\text{spt}(A)) \subset R,$$

[см. (V, теорема 6А); нам нужен только полиэдральный случай].

**Теорема 6А.** Пусть  $A$  — дизельная цепь множества  $R$ . Тогда для заданного  $\varepsilon > 0$  существуют такая бемольная цепь  $C$  множества  $R$  и такая бемольная цепь конечной массы  $D$  множества  $R$ , что  $A - C$  есть сдвиговая цепь множества  $R$  и

$$(3) \quad |A - C|_{R,\rho}^T + |C - \partial D| + \frac{|D|}{\rho} < |A|_{R,\rho}^\# + \varepsilon.$$

Допустим сначала, что цепь  $A$  компактна. Пусть, скажем,  $U_{3\eta}(Q) \subset R$ ,  $Q = \text{spt}(A)$ . Положим  $N_\eta = 1 + (r+1)\rho/\eta$ ,  $\varepsilon' = \varepsilon/(1 + 3N_\eta)$  и выберем полиэдральные цепи  $A_0, A_1, \dots$  в  $U_\eta(Q)$ , для которых

$$|A_i - A|_{R,\rho}^\# < \frac{\varepsilon'}{2^i}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Мы можем записать  $A_0 = \sum_k a_{0k} \sigma_{0k}$ ,  $C_0 = \sum_k a_{0k} T_{v_{0k}} \sigma_{0k}$ , причем  $\mathcal{D}_{v_{0k}}(\sigma_{0k}) \subset R$ , и найти такую полиэдральную цепь  $D_0$  в  $R$ , что

$$|A_0 - C_0|_{R,\rho}^T + |C_0 - \partial D_0| + \frac{|D_0|}{\rho} < |A|_{R,\rho}^\# + \varepsilon'.$$

Так как  $U_{\eta}(\text{spt}(A_i - A_{i-1})) \subset R' = U_{2\eta}(Q)$ , то

$$|A_i - A_{i-1}|_{R', \rho}^{\#} \leq N_{\eta} |A_i - A_{i-1}|_{\rho}^{\#} < \frac{3N_{\eta}\varepsilon'}{2^i},$$

и мы можем записать  $A_i - A_{i-1} = \sum_k a_{ik} \sigma_{ik}$ ,  $C_i = \sum_k a_{ik} T_{v_{ik}} \sigma_{ik}$ , причем  $\mathcal{D}_{v_{ik}}(\sigma_{ik}) \subset R'$ , и найти такую полиэдральную цепь  $D_i$  в  $R'$ , что

$$|A_i - A_{i-1} - C_i|_{R', \rho}^T + |C_i - \partial D_i| + \frac{|D_i|}{\rho} < \frac{3N_{\eta}\varepsilon'}{2^i}.$$

Теперь  $A = A_0 + \sum (A_i - A_{i-1})$ , и цепи

$$C = \sum C_i, \quad D = \sum D_i$$

определены. Последнее неравенство показывает, что ряды  $\sum |C_i|_{R, \rho}^b$  и  $\sum |D_i|$  сходятся; поэтому  $C$  — бемольная цепь, а  $D$  — цепь конечной массы. Так как

$$A - C = (A_0 - C_0) + \sum (A_i - A_{i-1} - C_i),$$

то мы видим также, что  $A - C$  есть сдвиговая цепь. Так как все аппроксимирующие цепи лежат в некотором замкнутом множестве, содержащемся в  $R$ , то  $C$ ,  $D$  и  $A - C$  являются цепями множества  $R$ . Неравенство (3) непосредственно вытекает из определения числа  $\varepsilon'$ .

В общем случае доказательство проводится так же, как аналогичное доказательство в теореме 5А. Мы получаем  $|\varphi_i A - A|_{R, \rho}^{\#} < \varepsilon'/2^i$  и

$$|\varphi_0 A - C_0|_{R, \rho}^T + |C_0 - \partial D_0| + \frac{|D_0|}{\rho} < |A|_{R, \rho}^{\#} + \varepsilon',$$

$$|(\varphi_i - \varphi_{i-1}) A - C_i|_{R, \rho}^T + |C_i - \partial D_i| + \frac{|D_i|}{\rho} < \frac{3N_1\varepsilon'}{2^i}$$

и т. д.

**Теорема 6В.** *Теорема 5В справедлива и для диезной нормы.*

Мы пользуемся неравенством (3). Возьмем открытое множество  $R'$ , замыкание которого содержится в  $R$  и которое содержит носители цепей  $A$ ,  $C$  и  $D$ , а также все встречающиеся цепи деформации  $\mathcal{D}_{v_{ik}}(\sigma_{ik})$ . Это возможно для каждой цепи  $(\varphi_i - \varphi_{i-1})A$  по построению, а в общем случае ввиду того, что  $\text{spt}((\varphi_i - \varphi_{i-1})A) \rightarrow \infty$ . Последние неравенства в доказательстве предыдущей теоремы теперь выполняются, если в левых частях этих неравенств заменить  $R$  на  $R'$ , и, пользуясь леммой 4а, мы видим, что  $A - C$  есть диезная цепь (в действительности сдвиговая цепь) множества  $R'$ .

Как и в доказательстве теоремы 5B,  $D$  и  $C - \partial D$  оказываются бемольными цепями множества  $R'$ ; поэтому бемольными цепями множества  $R'$  будут и цепи  $\partial D$  и  $C$ . Теперь  $A - C$  и  $C$  являются дизными цепями множества  $R'$ , и поэтому дизной цепью множества  $R'$  будет и  $A$ . Наконец, неравенство (3) будет выполняться если в левой его части  $R$  заменить на  $R'$ , и мы получаем

$$|A|_{R', \rho}^{\#} \leq |A - C|_{R', \rho}^{\#} + |C - \partial D|_{R', \rho}^{\#} + |\partial D|_{R, \rho}^{\#} < |A|_{R, \rho}^{\#} + \varepsilon.$$

Ч а с т ь   т р е т ь я

## ЛЕБЕГОВСКАЯ ТЕОРИЯ



## IX. Бемольные коцепи и дифференциальные формы

В гл. V мы установили абстрактное определение  $r$ -мерного интегрирования в  $E^n$ ; интегрируемое в зависимости от того, какое из двух предположений непрерывности было сделано, было названо бемольной или же дизной коцепью. В (V, 10) было доказано, что каждая дизная коцепь соответствует некоторой ограниченной и удовлетворяющей условию Липшица дифференциальной форме. Более общий и во многих отношениях более важный интеграл дается бемольными коцепями. Основная цель этой главы состоит в доказательстве теоремы Уолфа (теорема 7C) о том, что каждая  $r$ -мерная бемольная коцепь в  $E^n$  соответствует некоторой дифференциальной форме, „бемольной“  $r$ -форме, и обратно. Бемольные формы измеримы, но, вообще говоря, не непрерывны. (Слово „измеримы“ в этой главе всегда будет означать „измеримы по Лебегу“.) С помощью бемольных форм выводится теория произведений ( $\cup$ - и  $\cap$ -произведения в алгебраической топологии).

Помимо результатов из гл. V, нам понадобится теория из (VI, 7). В одном месте (теорема 12A) мы пользуемся леммой (VII, 10b); доказательство этой леммы просто. Глава VIII используется в той мере, в какой мы пользуемся коцепями, определенными в открытых множествах; нам понадобятся лишь элементарные факты, относящиеся к таким коцепям. Однако предполагается, что читатель хорошо понимает лебеговскую теорию (см. П. III).

Мы рассматриваем некоторые крайние случаи. При  $r = n$  теорема Уолфа превращается в теорему о дифференцировании относительно аддитивных функций множества  $\Phi(Q)$ , удовлетворяющих при некотором  $N$  неравенству  $|\Phi(Q)| \leq N|Q|$ ; бемольные  $n$ -формы являются ограниченными измеримыми функциями. В этом случае легко устранить требование ограниченности; в общем случае это — очень трудная проблема. При  $r = 0$  теорема Уолфа элементарна. При  $r = 1$ , если пользоваться одномерными коцепями, являющимися кограницами, эта теорема вместе с теоремой об аппроксимации из § 10 дает теорему Радемахера (§ 11) о дифференцируемости липшицевских функций п. в. (почти всюду). В остальных случаях теорема Уолфа является новой.

Бемольная форма  $D_X(p)$ , соответствующая бемольной коцепи  $X$ , определяется ее значениями  $D_X(p) \cdot \alpha = D_X(p, \alpha)$  для  $r$ -направлений  $\alpha$  точно таким же образом [см. (4.1)], как и в (V, 10.5).

Однако, как это обычно бывает в лебеговской теории, существует ограничение, налагаемое на используемую последовательность симплексов; эта последовательность должна быть „полной“ в том смысле, что объемы входящих в нее симплексов должны быть не слишком малы по сравнению с их диаметрами. Это понятие, уже применявшееся в (IV, 14), в § 2 подвергается дальнейшему изучению. В § 3 мы изучаем проекции симплексов. Следующий параграф посвящен доказательству того, что при фиксированном  $\alpha$  функция  $D_X(p, \alpha)$  п. в. существует и измерима, а при фиксированном  $p$  функция  $D_X(p, \alpha)$  определяется на некотором замкнутом множестве значений  $\alpha$  и на этом множестве непрерывна. Чтобы установить дальнейшие свойства формы  $D_X(p)$  (и, в частности, доказать линейность), мы сглаживаем коцепь  $X$  (V, 13), образуя коцепь  $X_\rho$ , находим соответствующую дизъюнктивную форму  $D_{X_\rho}$  (V. 10) и берем  $\rho \rightarrow 0$ . (В доказательстве Уолфа сглаживание не применялось.) Форма  $D_X$ , как в (V, 10.3), соответствует коцепи  $X$  таким образом, что

$$\int_{\sigma} D_X = X \cdot \sigma \text{ для всех } r\text{-мерных симплексов } \sigma.$$

Поэтому она удовлетворяет двум неравенствам:

$$\left| \int_{\sigma^r} D_X \right| \leq |X| |\sigma^r|, \quad \left| \int_{\partial \sigma^{r+1}} D_X \right| \leq |dX| |\sigma^{r+1}|.$$

Вот обратная теорема. Пусть форма  $\omega$  измерима. Предположим, что написанные выше неравенства удовлетворяются для большинства симплексов  $\sigma^r$  и  $\sigma^{r+1}$  (в частности,  $\omega$  должна быть в них измерима, что, вообще говоря, может и не быть верным, если их размерность  $< n$ ). (Первое неравенство просто утверждает, что форма  $\omega$  по существу ограничена.) Такая форма называется „бемольной“. Тогда существует бемольная коцепь  $X$ , удовлетворяющая для большинства симплексов условию  $\int_{\sigma} \omega = X \cdot \sigma$ , и форма  $\omega$  эквивалентна  $D_X$ , т. е.  $\omega = D_X$  п. в. Бемольные коцепи в точности соответствуют классам эквивалентных бемольных форм.

Если, отправляясь от некоторой бемольной формы  $\omega$ , мы найдем соответствующую коцепь  $X$  и построим форму  $D_X$ , то эта форма  $D_X$ , вообще говоря, будет лучше формы  $\omega$ ; см., например, (5.2), теорему 17B и теорему (X, 9B). Тот факт, что форма  $\omega^* = \lim_{\rho \rightarrow 0} D_{X_\rho}$  может не быть столь же хорошей, как и  $D_X$ , показывает пример в § 13.

Хотя  $\int_{\sigma} D_X = X \cdot \sigma$  для всех  $r$ -мерных симплексов  $\sigma$ , это, однако, не означает, что  $D_X(p) \cdot \alpha$  существует в  $\sigma$  для  $r$ -направлений  $\alpha$ , отличных от  $r$ -направления симплекса  $\sigma$ . Определим, например, нульмерную коцепь  $Y$  и одномерную коцепь  $X$  на плоскости, положив

$$Y \cdot (x, y) = x + |y|, \quad X = dY.$$

Пусть  $e_1$  и  $e_2$  — единичные векторы и  $\sigma_t$  — одномерный симплекс, идущий от некоторой точки  $p$  к точке  $p + te_1$ ; тогда

$$X \cdot \sigma_t = Y \cdot \partial \sigma_t = Y \cdot (p + te_1) - Y \cdot p = t;$$

поэтому  $X \cdot \sigma_t / |\sigma_t| = 1$  и  $D_X(p) \cdot e_1 = 1$ . Следовательно,

$$X \cdot \sigma_t = \int_{\sigma_t} D_X$$

для всех таких симплексов  $\sigma_t$ . Тем не менее значение  $D_X(p) \cdot e_2$  не существует ни для одной точки  $p$  оси  $x$ .

В § 8 и 9 мы находим предположения относительно значений  $\omega(p) \cdot \alpha$  для  $r$ -направлений  $\alpha$  и относительно компонент формы  $\omega$ , которые достаточно сделать, чтобы быть уверенным, что форма  $\omega$  будет бемольной. Хотя в определении значений  $D_X(p, \alpha)$  используются только последовательности симплексов, имеющих  $p$  своей вершиной, теорема об аппроксимации из § 10 показывает, что можно было бы пользоваться последовательностями более общего вида. (Часть этой теоремы была найдена Уолфом.)

Хотя на первый взгляд кажется, что внешний дифференциал  $d\omega$  формы  $\omega$ , которая не является непрерывной, не может быть в общем случае определен, мы можем принять в качестве  $d\omega$  форму  $D_{dX}$ , где  $X$  — коцепь, соответствующая форме  $\omega$ . При таком определении он обладает необходимыми свойствами. Имеют, например, место формула  $dd\omega = 0$  и факт, утверждаемый в теореме 12A; см. также теорему (X, 9C). Аналитическая формула для  $d\omega$  справедлива, если только  $\omega$  удовлетворяет условию Липшица; см. теорему 12B.

Допустим, что  $\xi$  и  $\eta$  — бемольные формы. Тогда мы можем показать (частично с помощью коцепей), что произведение  $\xi \vee \eta$  есть бемольная форма. Если заданы бемольные коцепи  $X$  и  $Y$ , то можем теперь определить их произведение как коцепь, соответствующую форме  $D_X \vee D_Y$ . Затем легко выводятся обычные свойства произведений, в частности формулы для  $d(X \cup Y)$  и  $d(\xi \vee \eta)$  и неравенства для норм произведений (и в бемольном и в дизном случае). Это — пример, где теории бемольных коцепей и бемольных форм приносят пользу одна другой. (Теория произведений

коцепей может быть получена независимо от теории форм; см. кон:ц § 18.)

В § 15 дается аналитическое представление  $n$ -мерных бемольных цепей в  $E^n$ ; эти цепи соответствуют измеримым суммируемым функциям. Измеримые суммируемые  $r$ -вектор-функции соответствуют только некоторым из  $r$ -мерных цепей. Мы пользуемся этим соответствием в § 16 для определения произведения  $X \cap A$  коцепи и цепи; это произведение обладает нужными свойствами, и для норм выполняются неравенства, которые можно было ожидать. В § 17 доказывается теорема о слабых пределах произведений; она применяется в доказательстве формулы (X, 11.1) для  $f^*(X \cup Y)$ . В § 18 охарактеризованы  $\cup$ -произведения.

Напомним, что, как мы показали в (VII, 12), кольцо алгебраических когомологий комплекса  $K$  (с действительными коэффициентами) изоморфно кольцу, определенному с помощью бемольных коцепей. Пользуясь теоремой Уолфа и § 12, мы видим, что это кольцо столь же хорошо определяется и бемольными формами в  $K$ . Очевидно, можно определить бемольные формы на компактном гладком многообразии  $M$  [ср. (VII, 10); в некомпактном случае нужно пользоваться „локально бемольными“ формами]; с их помощью мы получаем теорему де Рама о кольце когомологий многообразия  $M$ , в которой вместо гладких форм рассматриваются бемольные формы.

**1.  $n$ -мерные коцепи в  $E^n$ .** Мы покажем здесь, что  $n$ -мерные бемольные коцепи в открытом подмножестве  $R$  пространства  $E^n$  соответствуют действительным ограниченным измеримым в  $R$  функциям, или, вернее, классам эквивалентности таких функций. Как обычно, мы считаем пространство  $E^n$  метрическим и ориентированным. Напомним, что две функции, каждая из которых определена п. в. в  $R$ , называются эквивалентными, если они совпадают всюду, за исключением некоторого множества меры нуль.

**Теорема 1А.** *Между  $r$ -мерными бемольными коцепями  $X$  в открытом множестве  $R \subset E^n$  и классами эквивалентности ограниченных измеримых в  $R$  функций  $\varphi$  существует взаимно однозначное соответствие, оно определяется следующим образом.*

(а) *По данной функции  $\varphi$  коцепь  $X$  определяется следующим образом. Для любого  $n$ -мерного симплекса  $\sigma \subset R$ , ориентированного так же, как и  $E^n$ , мы полагаем*

$$(1) \quad X \cdot \sigma = \int_{\sigma} \varphi(p) dp.$$

(б) *По данной коцепи  $X$  функция  $\varphi$  определяется следующим образом. Для любой точки  $p \in R$  мы выбираем последо-*

вательность  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$   $n$ -мерных симплексов, ориентированных так же, как и  $E^n$ , каждый из которых имеет  $p$  своей вершиной, диаметры которых  $\rightarrow 0$  и которые обладают тем свойством, что при некотором  $\eta > 0$  для всех  $i$  имеет место неравенство  $|\sigma_i| / [\text{diam}(\sigma_i)]^n \geq \eta$ . Мы полагаем

$$(2) \quad \varphi(p) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{X \cdot \sigma_i}{|\sigma_i|},$$

если только этот предел существует и не зависит от выбора последовательности.

В (b) требование о том, чтобы точка  $p$  являлась вершиной каждого симплекса  $\sigma_i$ , можно было бы просто заменить требованием, чтобы  $p \in \sigma_i$ . Можно пользоваться множествами  $\sigma_i$  более общей природы (например, объединением симплекса, не содержащего  $p$ , и точки  $p$ ) с соответствующими требованиями; из лебеговской теории хорошо известно, что любая получающаяся в результате функция  $\varphi'$  определена п. в. и п. в. равна  $\varphi$ .

Чтобы доказать теорему, допустим сначала, что задана функция  $\varphi$ . Определим  $X \cdot \sigma$  по формуле (1), и для любой  $n$ -мерной полиэдральной цепи  $A = \sum a_i \sigma_i$  положим  $X \cdot A = \sum a_i X \cdot \sigma_i$ . Очевидно, произведение  $X \cdot A$  определяется однозначно и является линейным относительно  $A$ . Пользуясь обозначением  $|\varphi|_0 = \text{ess sup } |\varphi(p)|$  (П. III, 5.1), мы имеем  $|X \cdot \sigma| \leq |\varphi|_0 |\sigma|$ ; поэтому в силу (V, 4.9)  $|X| \leq |\varphi|_0$ . Так как в  $E^n$  не существует  $(n+1)$ -мерных полиэдральных цепей  $\neq 0$ , то  $dX = 0$ ; поэтому в силу теоремы (V, 4A)  $X$  есть  $n$ -мерная бемольная коцепь. Очевидно, что если  $\varphi = \varphi'$  п. в., то этими функциями определяется одна и та же коцепь.

Пусть задана коцепь  $X$ ; любая полиэдральная область  $P$  (ориентированная так же, как и  $E^n$ ) может быть представлена как  $n$ -мерная цепь  $A$ . Теперь соотношение  $\Phi(P) = X \cdot A$  определяет некоторую аддитивную функцию множества  $\Phi$ . Так как  $|\Phi(P)| \leq |X| |P|$ , то обычная теория (П. III, 5) показывает, что функция  $\varphi(p)$ , определяемая формулой (2), существует п. в. и измерима; далее,  $|\varphi|_0 \leq |X|$ , и выполняется равенство (1). Теорема доказана.

**2. Некоторые свойства полноты.** Мы рассмотрим некоторые свойства симплексов; часть этих свойств можно найти в (IV, 14). Для данных точки  $p$  и симплекса  $\sigma$  положим

$$(1) \quad \delta_\sigma = \text{diam}(\sigma), \quad \delta_{p\sigma} = \text{diam}(p \cup \sigma).$$

Полнота  $\Theta(\sigma^r)$  и  $p$ -полнота  $\Theta_p(\sigma^r)$  симплекса  $\sigma^r$  равны

$$(2) \quad \Theta(\sigma^r) = \frac{|\sigma^r|}{\delta_\sigma^r}, \quad \Theta_p(\sigma^r) = \frac{|\sigma^r|}{\delta_{p\sigma}^r};$$

мы предполагаем, что  $r > 0$ . [Мы могли бы положить  $\Theta(\sigma^0) = 1$ .] Отметим, что

$$(3) \quad \Theta_p(\sigma) \leq \Theta(\sigma), \quad \Theta_p(\sigma) = \Theta(\sigma), \quad p \in \sigma.$$

Вспомним из (IV, 14), что если  $v_1, \dots, v_r$  — определяющее множество векторов для  $\sigma^r$ , то

$$(4) \quad |\sigma^r| = \frac{|v_1 \vee \dots \vee v_r|}{r!} \leq \frac{\delta_\sigma^r}{r!}, \quad \Theta(\sigma^r) \leq \frac{1}{r!},$$

$$(5) \quad k! \Theta(\sigma^k) \geq r! \Theta(\sigma^r), \quad \text{если } \sigma^k \text{ — грань симплекса } \sigma^r.$$

Из (4) получаем

$$(6) \quad \delta_{p\sigma} = \left[ \frac{|\sigma|}{\Theta_p(\sigma)} \right]^{1/r} \leq \frac{\delta_\sigma}{[r! \Theta_p(\sigma)]^{1/r}}.$$

Если  $\sigma_0, \dots, \sigma_r$  — все  $(r-1)$ -мерные грани симплекса  $\sigma$ , то

$$|\sigma_i| \leq \frac{\delta_\sigma^{r-1}}{(r-1)!} = \frac{|\sigma|^{r-1}}{(r-1)! \Theta(\sigma) \delta_\sigma};$$

поэтому

$$(7) \quad |\partial\sigma| \leq \frac{(r+1)|\sigma|}{(r-1)! \Theta(\sigma) \delta_\sigma}.$$

Мы говорим, что последовательность симплексов  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  является *полной  $p$ -последовательностью*, если  $p$  — вершина каждого симплекса  $\sigma_i$ ,  $\Theta(\sigma_i) \geq \eta > 0$  для некоторого  $\eta$  и всех  $i$  и  $\delta_{\sigma_i} \rightarrow 0$ . Эта последовательность является  *$p$ -полной последовательностью*, если  $\Theta_p(\sigma_i) \geq \eta > 0$  и  $\delta_{p\sigma_i} \rightarrow 0$  (или, что равносильно,  $\delta_{\sigma_i} \rightarrow 0$ ).

**3. Свойства проекций.** Пусть  $P$  и  $P'$  — некоторые  $r$ -мерные плоскости в  $E^n$ , и пусть  $\pi$  — ортогональная проекция пространства  $E^n$  (поэтому и плоскости  $P'$ ) в  $P$ . Пусть  $h$  — расстояние (I, 15) между  $r$ -направлениями плоскостей  $P$  и  $P'$ ; будем считать, что  $h < 1$ . Тогда для любого  $r$ -мерного симплекса  $\sigma$  в  $P'$  формулы (I, 15.6) и (I, 15.3) дают

$$(1) \quad |\pi\sigma| = |\cos \theta| |\sigma| = \left(1 - \frac{h^2}{2}\right) |\sigma| \leq |\sigma|,$$

$$(2) \quad |\sigma| - |\pi\sigma| = \frac{h^2 |\sigma|}{2}.$$

Пусть  $P$  и  $P'$  имеют общую точку  $p$ . Для любой точки  $q \in P'$ , полагая в (I, 15.7)  $v = q - p$ , получаем

$$(3) \quad |q - \pi q| \leq h |q - p| \quad (p \in P \cap P', q \in P').$$

Если дан симплекс  $\sigma = p_0 \dots p_s \in P'$ , то мы положим  $q_i = \pi(p_i)$  и

$$(4) \quad H(\sigma) = \sum_{i=0}^s (-1)^i \tau_i, \quad \tau_i = p_0 \dots p_i q_{i+1} \dots q_s.$$

Тогда

$$(5) \quad H(\sigma) \leq \frac{\zeta |\sigma|}{s! \Theta(\sigma)}, \quad \text{если} \quad |q_i - p_i| \leq \zeta.$$

В самом деле,  $|q_k - q_j| \leq |p_k - p_j| \leq \delta_\sigma$ , и поэтому

$$(s+1)! |\tau_i| \leq |p_i - p_0| \dots |q_i - p_i| \dots |q_s - q_{s-1}| \leq \zeta \delta_\sigma^s;$$

суммируя по  $i$  и пользуясь определением величины  $\Theta(p)$ , получаем (5).

Мы докажем одно неравенство [в котором знаменатель можно было бы отбросить; см. лемму (X, 5a)]: для любого  $r$ -мерного симплекса  $\sigma$

$$(6) \quad |\pi\sigma - \sigma| \leq \frac{h \delta_{p\sigma} (|\sigma| + |\partial\sigma|)}{r! \Theta(\sigma)}.$$

В силу (П. II, 12.4)  $\partial H(\sigma) = \pi\sigma - \sigma - H(\partial\sigma)$ . Пусть, скажем,  $\partial\sigma = \sum \sigma_i$ . Применяя неравенства (5) и (3), находим

$$\begin{aligned} |\pi\sigma - \sigma| &= |\partial H(\sigma) + H(\partial\sigma)| \leq |H(\sigma)| + |H(\partial\sigma)| \leq \\ &\leq \frac{h \delta_{p\sigma} |\sigma|}{r! \Theta(\sigma)} + \sum_i \frac{h \delta_{p\sigma} |\sigma_i|}{(r-1)! \Theta(\sigma_i)}; \end{aligned}$$

пользуясь неравенством (2.5), получаем (6).

В силу (2.6), (2.7) и (2.3)

$$(7) \quad \delta_{p\sigma} |\partial\sigma| \leq N_{r, \Theta(\sigma)} |\sigma|, \quad N_{r, \eta} = \frac{r+1}{(r-1)! (r!)^{1/r} \eta^{1+1/r}}.$$

Поэтому неравенство (6) дает

$$(8) \quad |\pi\sigma - \sigma| \leq \frac{h (\delta_{p\sigma} + N_{r, \Theta(\sigma)}) |\sigma|}{r! \Theta(\sigma)}.$$

В силу (2)

$$\left| \frac{\pi\sigma}{|\pi\sigma|} - \frac{\pi\sigma}{|\sigma|} \right| = \frac{|\sigma| - |\pi\sigma|}{|\sigma|} \leq \frac{h^2}{2};$$

сопоставляя это с предыдущим неравенством, получаем

$$\left| \frac{\pi\sigma}{|\pi\sigma|} - \frac{\sigma}{|\sigma|} \right| \leq \frac{h^2}{2} + \frac{h (\delta_{p\sigma} + N_{r, \Theta(\sigma)})}{r! \Theta(\sigma)}.$$

Поэтому, если мы положим

$$(9) \quad N'_{r,\eta} = \frac{1}{2} + \frac{1 + N_{r,\eta}}{r! \eta},$$

то будем иметь

$$(10) \quad \left| \frac{\pi\sigma}{|\pi\sigma|} - \frac{\sigma}{|\sigma|} \right|^b \leq N'_{r,\eta} h, \quad \text{если } h \leq 1, \delta_{p\sigma} \leq 1, \Theta_p(\sigma) \geq \eta.$$

**4. Элементарные свойства функции  $D_X(p, \alpha)$ .** Введем сначала некоторые обозначения. Для любого  $r$ -мерного ориентированного симплекса  $\sigma$  пусть  $P(\sigma)$  и  $\alpha(\sigma) = \{\sigma\}/|\sigma|$  обозначают соответственно  $r$ -мерную ориентированную плоскость, содержащую  $\sigma$ , и  $r$ -направление симплекса  $\sigma$ . Пусть, далее,  $\alpha(P)$  обозначает  $r$ -направление  $r$ -мерной ориентированной плоскости  $P$ . Наконец, пусть  $P(p, \alpha)$  — ориентированная  $r$ -мерная плоскость, проходящая через  $p$  и имеющая  $r$ -направление  $\alpha$ .

Симплекс  $\sigma$  назовем  $p$ - $\alpha$ -симплексом, если он имеет  $p$  своей вершиной и  $\alpha$  — своим  $r$ -направлением. Далее,  $p$ - $\alpha$ -симплексы  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  образуют  $p$ - $\alpha$ -последовательность, если  $\delta_{\sigma_i} \rightarrow 0$ .

Пусть  $X$  — некоторая  $r$ -мерная бемольная коцепь в открытом множестве  $R \subset E^n$ . Для любой точки  $p \in R$  и любого  $r$ -направления  $\alpha$  положим

$$(1) \quad D_X(p, \alpha) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{X \cdot \sigma_i}{|\sigma_i|},$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  — любая полная  $p$ - $\alpha$ -последовательность симплексов, предполагая, что предел существует и не зависит от выбора такой последовательности.

Допустим, что предел  $D_X(p, \alpha)$  существует. Тогда ясно, что для любых  $\varepsilon > 0$  и  $\eta > 0$  найдется такое  $\zeta > 0$ , что

$$(2) \quad \left| D_X(p, \alpha) - \frac{X \cdot \sigma}{|\sigma|} \right| < \varepsilon, \quad \text{если } \sigma \subset U_\zeta(p), \Theta(p) \geq \eta,$$

причем  $\sigma$  имеет  $p$  своей вершиной и  $\alpha(\sigma) = \alpha$ .

Мы могли бы изменить определение, разрешив, например, рассматривать  $p$ -полные последовательности симплексов в плоскости  $P(p, \alpha)$ ; это, однако, не оказывает существенного влияния на результат, как показывает доказываемая ниже теорема 10А.

При  $r = n$  функция  $\varphi(p) = D_X(p, \alpha_0)$  ( $\alpha_0$  есть  $n$ -направление пространства  $E^n$ ) определяется согласно теореме 1А. При  $r = 0$   $D_X(p)$  есть дизная функция; см. (V, 10). Начиная с этого момента, мы предполагаем, что  $0 < r < n$ .

Определение (1) показывает, что

$$(3) \quad D_X(p, -\alpha) = -D_X(p, \alpha).$$

Пусть  $P$  — любая  $r$ -мерная ориентированная плоскость. Тогда в силу теоремы 1А  $D_X(p, \alpha(P))$  существует п. в. в  $P \cap R$  и

$$(4) \quad X \cdot \sigma = \int_{\sigma} D_X(p, \alpha(P)) dp, \quad \sigma \subset P \cap R, \quad \sigma \text{ ориентирован так же, как и } P.$$

Лемма 4а. Для фиксированного  $r$ -направления  $\alpha$  функция  $D_X(p, \alpha)$  существует п. в. в  $R$  и измерима в  $R$ ; в действительности это имеет место в  $P^s \cap R$  для любой  $s$ -мерной плоскости  $P^s$ , содержащей  $\alpha$ .

Пусть  $\varphi(p, \eta, \zeta, \zeta')$  — верхняя грань множества таких чисел  $a$ , что для некоторого симплекса  $\sigma$  с вершиной  $p$  и с  $\alpha(\sigma) = \alpha$  мы имеем

$$\Theta(\sigma) \geq \eta, \quad \zeta' \leq \delta_{\sigma} \leq \zeta, \quad \frac{X \cdot \sigma}{|\sigma|} = a.$$

При фиксированных  $\eta, \zeta, \zeta'$  функция  $\varphi$  непрерывна. В самом деле, если задано  $\varepsilon > 0$ , то мы выберем  $\sigma$  так, чтобы было

$$\frac{X \cdot \sigma}{|\sigma|} > \varphi(p, \eta, \zeta, \zeta') - \varepsilon.$$

Пользуясь (V, 3.6) и (2.7), получаем

$$\left| \frac{X \cdot T_{\sigma} v}{|\sigma|} - \frac{X \cdot \sigma}{|\sigma|} \right| \leq |X|^b |v| \left( 1 + \frac{|\partial \sigma|}{|\sigma|} \right) \leq |X|^b |v| \left[ 1 + \frac{r+1}{(r-1)! \eta \zeta'} \right],$$

и правая часть  $< \varepsilon$  при достаточно малом  $|v|$ . Таким образом,  $\varphi(p + v, \dots) > \varphi(p, \dots) - \varepsilon$  при достаточно малом  $v$ . Это же справедливо, если поменять местами  $p$  и  $p + v$ .

Положим

$$\varphi(p, \eta) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \lim_{\zeta' \rightarrow 0} \varphi(p, \eta, \zeta, \zeta'), \quad \varphi(p) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \varphi(p, \eta);$$

эти функции измеримы. Определим подобные же функции  $\psi$ , пользуясь нижними границами. Теперь мы покажем, что

$$\psi(p) = D_X(p, \alpha) = \varphi(p), \text{ если } D_X(p, \alpha) \text{ существует,}$$

и  $\psi(p) < \varphi(p)$  в противном случае. Если предел  $D_X(p, \alpha)$  существует, то его определение показывает, что он равен  $\varphi(p, \eta)$  и  $\psi(p, \eta)$ ; поскольку это верно для всех  $\eta$ ,  $D_X(p, \alpha) = \varphi(p) = \psi(p)$ . Если  $D_X(p, \alpha)$  не существует, то найдутся полные  $p$ - $\alpha$ -последовательности  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  и  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , для которых

$$a = \lim \frac{X \cdot \sigma_i}{|\sigma_i|} < \lim \frac{X \cdot \tau_i}{|\tau_i|} = b.$$

Пусть, скажем,  $\Theta(\sigma_i), \Theta(\tau_i) \geq \eta > 0$ . Тогда

$$\psi(p) \leq \psi(p, \eta) \leq a < b \leq \varphi(p, \eta) \leq \varphi(p).$$

Заметим, что  $\varphi$  и  $\psi$  определены во всем  $R$ , хотя  $\varphi(p, \eta, \zeta, \zeta')$  и  $\psi(\dots)$  могут и не быть определены во всем  $R$ .

Пусть  $Q$  — подмножество множества  $R$ , на котором  $\varphi = \psi$ . Выберем некоторую  $(n-r)$ -мерную плоскость  $P^{n-r}$ , ортогональную к  $\alpha$ . Из § 1 видно, что для каждой точки  $q \in P^{n-r}$

$$|P(q, \alpha) \cap R \setminus Q|_r = 0,$$

где через  $|H|_s$  обозначается  $s$ -мерная мера Лебега множества  $H$  в  $s$ -мерной плоскости. Так как  $\varphi$  и  $\psi$  измеримы, то теорема Фубини показывает, что  $|R \setminus Q| = 0$ . Поэтому функция  $D_X(p, \alpha)$  п. в. в  $R$  равна измеримой функции  $\varphi(p)$ , и лемма доказана по отношению к  $R$ . Если дана плоскость  $P^s$ , то нам нужно только повторить доказательство, заменив  $E^n$  на  $P^s$ .

**Лемма 4b.** Пусть  $H(p)$  для точки  $p \in R$  есть множество  $r$ -направлений  $\alpha$ , для которых существует  $D_X(p, \alpha)$ . Тогда множество  $H(p)$  замкнуто и функция  $D_X(p, \alpha)$  непрерывна в  $H(p)$ .

Пусть прежде всего  $\alpha, \beta$  — некоторые  $r$ -направления, для которых  $h = |\beta - \alpha| < 1$ . Пусть  $\pi$  — проекция на плоскость  $P(p, \alpha)$ . Для любого  $p$ - $\beta$ -симплекса  $\sigma$  формула (3.1) дает

$$(5) \quad \Theta(\pi\sigma) = \frac{|\pi\sigma|}{\delta_{\pi\sigma}^r} \geq \frac{(1 - h^2/2)|\sigma|}{\delta_\sigma^r} \geq \frac{1}{2} \Theta(\sigma).$$

Пусть, далее,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  — полная  $p$ - $\beta$ -последовательность симплексов и, скажем,  $\Theta(\sigma_i) \geq 2\eta$ . Тогда  $\pi\sigma_1, \pi\sigma_2, \dots$  есть полная  $p$ - $\alpha$ -последовательность и  $\Theta(\pi\sigma_i) \geq \eta$ . Если  $\alpha, \beta \in H(p)$ , то неравенство (3.10) показывает, что

$$|D_X(p, \beta) - D_X(p, \alpha)| \leq |X|^b N'_{r,\eta} h.$$

Так как мы можем пользоваться фиксированным  $\eta$ , то отсюда видно, что функция  $D_X(p, \alpha)$  непрерывна в  $H(p)$ .

Допустим, наконец, что  $\alpha \notin H(p)$ . Тогда существуют  $p$ - $\alpha$ -последовательности  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  и  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , для которых  $\Theta(\sigma_i), \Theta(\tau_i) \geq \eta > 0$  и

$$\frac{X \cdot \sigma_i}{|\sigma_i|} \leq a < b \leq \frac{X \cdot \tau_i}{|\tau_i|}.$$

Положим  $\varepsilon = (b - a)/3$ ,  $h = \varepsilon/N'_{r,\eta} |X|^b$ . Теперь возьмем любое  $r$ -направление  $\beta$ ,  $|\beta - \alpha| < h$ . Тогда, если  $\pi$  — проекция на плоскость  $P(p, \beta)$ , то неравенство (3.10) дает

$$\frac{X \cdot \pi \sigma_i}{|\pi \sigma_i|} \leq a + \varepsilon, \quad \frac{X \cdot \pi \tau_i}{|\pi \tau_i|} \geq b - \varepsilon,$$

и это показывает, что  $\beta \in H(p)$ . Следовательно, множество  $H(p)$  замкнуто.

### 5. $r$ -форма, определяемая $r$ -мерной бемольной коцепью.

Мы докажем теперь, что каждой бемольной коцепи соответствует некоторая дифференциальная форма.

Пусть  $P^s$  — какая-либо  $s$ -мерная плоскость в  $E^n$ . Пусть для некоторых  $r$ -векторов  $\alpha$  определено произведение  $\xi \cdot \alpha$ . Мы говорим, что  $\xi$  есть  $r$ -ковектор относительно  $P^s$ , если произведение  $\xi \cdot \alpha$  определено для всех  $\alpha$ , лежащих в  $P^s$ , и линейно по отношению к этим  $\alpha$ . Пусть  $S$  — измеримое подмножество плоскости  $P^s$ . Мы говорим, что  $\omega$  есть *измеримая  $r$ -форма в  $S$  относительно  $P^s$* , если (а) для некоторого множества  $Q$ , удовлетворяющего условию  $|S \setminus Q|_s = 0$ ,  $\omega(p)$  есть  $r$ -ковектор относительно  $P^s$  для каждой точки  $p \in Q$  и (б) для каждого  $\alpha$  в  $P^s$  функция  $\omega(p) \cdot \alpha$  измерима в  $S$  (как в подмножестве плоскости  $P^s$ ); иначе говоря, каждая компонента  $\omega_\lambda(p)$  (в какой-нибудь системе координат для  $P^s$ ) должна быть измеримой. В частности,  $\omega$  является *измеримой  $r$ -формой в  $S$* , если это выполняется при  $P^s = E^n$ .

Если  $\omega$  — ограниченная измеримая  $r$ -форма относительно  $P^r$  в  $r$ -мерном ориентированном симплексе  $\sigma \subset P^r$ , то мы можем определить интеграл Лебега

$$(1) \quad \int_{\sigma} \omega = \int_{\sigma} \omega(p) \cdot \alpha(\sigma) dp.$$

Если  $\omega(p, \alpha)$  — функция  $r$ -направления  $\alpha$ , обладающая теми же свойствами, то мы подобным же образом определяем

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\sigma} \omega(p, \alpha(\sigma)) dp.$$

**Теорема 5А.** Пусть  $X$  — бемольная  $r$ -мерная коцепь в открытом множестве  $R \subset E^n$ . Тогда существует такое множество  $Q \subset R$ ,  $|R \setminus Q| = 0$ , что для каждой точки  $p \in Q$  функция  $D_X(p, \alpha)$  определена для всех  $r$ -направлений  $\alpha$  и ее можно продолжить на все  $r$ -векторы  $\alpha$ , получив  $r$ -ковектор  $D_X(p)$ ;  $D_X$  есть ограниченная и измеримая  $r$ -форма в  $R$ . Для любого

$r$ -мерного симплекса  $\sigma$  в  $R$  форма  $D_X$  является измеримой  $r$ -формой в  $\sigma$  относительно  $P(\sigma)$  и

$$(2) \quad X \cdot \sigma = \int_{\sigma} D_X.$$

Все сказанное справедливо и для  $dX$ . Кроме того,

$$(3) \quad |D_X|_0 = |X|, \quad |D_{dX}|_0 = |dX|.$$

Начнем с того, что, как и в (V, 13), сгладим  $X$ , взяв средние:

$$(4) \quad X_p \cdot A = \int_V \kappa_p(v) (X \cdot T_v A) dv, \quad A - \text{полиэдральные цепи.}$$

Тогда коцепь  $X_p$  определена в  $\text{int}_p(R)$  [см. (П. III, 3)] и является  $r$ -мерной дизъюнктивной коцепью (V, теорема 13A). Напомним, что

$$(5) \quad dX_p = (dX)_p, \quad |X_p| \leq |X|, \quad |dX_p| \leq |dX|.$$

Теперь мы покажем, что  $D_{X_p}$  является  $p$ -средним от  $D_X$ :

$$(6) \quad D_{X_p}(p, \alpha) = \int_V \kappa_p(v) D_X(p + v, \alpha) dv, \quad p \in \text{int}_p(R).$$

Пусть  $\varphi(p)$  означает интеграл, стоящий в правой части (6), при фиксированном  $\alpha$ . Возьмем любую  $r$ -мерную плоскость  $P$  с  $r$ -направлением  $\alpha(P) = \alpha$  и любой  $r$ -мерный симплекс  $\sigma \subset P$ . Применяя формулы (4), (4.4) и теорему Фубини, получаем

$$X_p \cdot \sigma = \int_V \kappa_p(v) \int_{\sigma} D_X(p + v, \alpha(\sigma)) dp dv = \int_{\sigma} \varphi(p) dp.$$

То, что теорема Фубини применима, можно показать следующим образом. Запишем  $V$  в виде прямой суммы  $V_1 \oplus V_2$ , где пространство  $V_1$  параллельно  $\sigma$ . Тогда

$$\int_V \int_{\sigma} = \int_{V_2} \int_{V_1} \int_{\sigma} = \int_{V_2} \int_{\sigma} \int_{V_1} = \int_{\sigma} \int_{V_2} \int_{V_1} = \int_{\sigma} \int_V;$$

функция  $D_X(p, \alpha(\sigma))$ , очевидно, в каждом случае обладает требуемым свойством измеримости. Так как функция  $\varphi(p)$  непрерывна, то равенство (6) следует отсюда для точек  $p \in P \cap \text{int}_p(R)$ , а поэтому и для  $p \in \text{int}_p(R)$ .

В силу (6) из леммы (П. III, 3b) получаем

$$(7) \quad \lim_{p \rightarrow 0} D_{X_p}(p, \alpha) = D_X(p, \alpha) \quad \text{п. в. в } R \text{ для каждого } \alpha.$$

Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  — некоторая последовательность  $r$ -направлений, плотная в множестве всех  $r$ -направлений. Для каждого  $i$  пусть

$Q_i$  — множество точек  $p$ , для которых существует предел  $D_X(p, \alpha_i)$  и выполняется равенство (7) при  $\alpha = \alpha_i$ ; тогда  $|R \setminus Q_i| = 0$ . Положим  $Q = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots$ . Возьмем теперь любую точку  $p \in Q$ . Тогда  $D_X(p, \alpha_i)$  существует при всех  $i$ , и по лемме 4b функция  $D_X(p, \alpha)$  существует для всех  $r$ -направлений  $\alpha$  и непрерывна по  $\alpha$ . По лемме 4a функция  $D_X(p, \alpha)$  измерима в  $R$  при каждом  $\alpha$ .

Пусть первые из  $\alpha_i$  являются  $r$ -направлениями  $e_\lambda$  ( $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ ). Возьмем любую точку  $p \in Q$  и любой  $r$ -вектор  $\alpha = \sum \alpha^\lambda e_\lambda$ . Так как (V, теорема 10A) функция  $D_{X_p}(p) \cdot \alpha$  линейна относительно  $\alpha$  [р мы берем столь малым, чтобы было  $p \in \text{int}_p(R)$ ] и равенство (7) имеет место для точки  $p$  при каждом  $\alpha_i$ , то

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [D_{X_p}(p) \cdot \alpha] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{(\lambda)} \alpha^\lambda D_{X_p}(p, e_\lambda) = \sum_{(\lambda)} \alpha^\lambda D_X(p, e_\lambda)$$

и результат линеен относительно  $\alpha$ . Поэтому мы можем по определению положить

$$(8) \quad D_X(p) \cdot \alpha = \lim_{\rho \rightarrow 0} [D_{X_p}(p) \cdot \alpha] \quad (p \in Q),$$

и  $D_X(p)$  есть некоторый  $r$ -ковектор,  $p \in Q$ . Теперь для  $p \in Q$

$$D_X(p, \alpha_i) = \lim_{\rho \rightarrow 0} D_{X_p}(p, \alpha_i) = \lim_{\rho \rightarrow 0} [D_{X_p}(p) \cdot \alpha_i] = D_X(p) \cdot \alpha_i$$

при каждом  $i$ . Так как и  $D_X(p, \alpha)$  и  $D_X(p) \cdot \alpha$  непрерывны по  $\alpha$  (см. лемму 4b), то этим доказано, что

$$(9) \quad D_X(p) \cdot \alpha = D_X(p, \alpha) \quad (r\text{-направления } \alpha, p \in Q).$$

Таким образом,  $r$ -форма  $D_X(p)$  является продолжением функции  $D_X(p, \alpha)$  в  $Q$ .

Так как  $dX$  есть бемольная коцепь в  $R$ , то все вышесказанное справедливо и для нее. Соотношение (2) ясно из определения формы  $D_X$ . Доказательство соотношений (3) аналогично соответствующему доказательству в (V, 10). Теорема доказана.

**6. Бемольные  $r$ -формы.** Мы обратимся теперь к задаче определения бемольной коцепи по дифференциальной форме, удовлетворяющей некоторым условиям; мы возьмем эти условия из заключения теоремы 5A.

Если дана форма  $\omega$  и множество  $Q$ , то мы говорим, что  $s$ -мерная плоскость  $P^s$  ( $s \geq r$ ) является  $Q$ -хорошей (для  $\omega$ ), если  $|P^s \cap R \setminus Q|_s = 0$  и форма  $\omega$  [т. е. каждое значение  $\omega(p) \cdot \alpha$ ] измерима в  $P^s \cap R$ . (Мы рассматриваем все  $\alpha$ , а не просто  $\alpha$ , лежащие в  $P^s$ , имея в виду доказательство леммы 6b.) Мы говорим, что  $s$ -мерный симплекс  $\sigma^s$  в  $R$  ( $s \geq r$ ) является  $Q$ -хорошим, если

$|\sigma^s \setminus Q|_s = 0$  и форма  $\omega$  измерима в  $\sigma^s$ . Мы говорим, что симплекс  $\sigma^s$  является *Q-отличным*, если он сам и каждая из его граней размерности  $\geq r$  являются Q-хорошими.

Мы говорим, что  $\omega$  есть *бемольная r-форма* в открытом множестве  $R \subset E^n$ , если существует такое измеримое подмножество  $Q$  множества  $R$ , что  $|R \setminus Q| = 0$  и

(а)  $\omega$  есть измеримая  $r$ -форма в  $R$ ,

(б)  $|\omega|_0 \leq N$  при некотором  $N$  [см. (П. III, 5.1)],

(с) существует такое  $N'$ , что для любого Q-отличного симплекса  $\sigma^{r+1}$  в  $R$

$$(1) \quad \left| \int_{\sigma^{r+1}} \omega \right| \leq N' |\sigma^{r+1}|.$$

Если форма  $\omega$  является бемольной по отношению к  $Q$ , то она будет бемольной и по отношению к любому открытому множеству  $Q' \subset Q$ , для которого  $|R \setminus Q'| = 0$ .

Нам понадобятся некоторые леммы в духе теоремы Фубини, показывающие, что большинство плоскостей и симплексов являются Q-хорошими; форма  $\omega$  предполагается бемольной в  $R$  по отношению к  $Q$ .

**Лемма 6а.** Пусть  $P^s(p)$  — плоскость, ортогональная к фиксированной плоскости  $P^{n-s}$  и содержащая точку  $p \in P^{n-s}$  ( $s \geq r$ ). Тогда для почти всех  $p \in P^{n-s}$  плоскость  $P^s(p)$  является Q-хорошей.

Теорема Фубини показывает, что для каждого  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ,  $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ , существует такое множество  $H_\lambda \subset P^{n-s}$ ,  $|P^{n-s} \setminus H_\lambda|_{n-s} = 0$ , что для  $p \in H_\lambda$  имеем  $|P^s(p) \cap R \setminus Q|_s = 0$  и компонента  $\omega_\lambda(p)$  измерима в  $P^s(p) \cap R$ . Положим  $H = \bigcap_\lambda H_\lambda$ ; тогда плоскость  $P^s(p)$  при  $p \in H$  является Q-хорошей.

**Лемма 6б.** Пусть  $\sigma^s = p_0 p_1 \dots p_s$  ( $s \geq r$ ) — некоторый симплекс в  $R$ , и пусть  $K$  — множество точек  $p$ , для которых  $p\sigma' = p p_1 \dots p_s$  является (невывождающимся) симплексом в  $R$ . Пусть  $P^m$  — такая плоскость, проходящая через точку  $p_0$ , что  $\sigma^s \cup P^m$  порождает пространство  $E^n$ . Тогда для почти всех точек  $p \in P^m \cap K$  симплекс  $p\sigma'$  является Q-хорошим.

Пусть  $P^s$  и  $P^{s-1}$  — плоскости симплексов  $\sigma^s$  и  $\sigma' = p_1 \dots p_s$  соответственно. Пусть  $P_0^{n-s}$  — плоскость в  $P^m$ , имеющая только одну общую точку  $p_0$  с плоскостью  $P^s$ ; тогда плоскости  $P^s$  и  $P_0^{n-s}$  порождают пространство  $E^n$ . Пусть  $H$  — множество таких

точек  $p \in K$ , для которых симплекс  $p\sigma'$  является  $Q$ -хорошим; множество  $H$  измеримо. Для любой точки  $q \in P^m \cap P^s$  пусть  $P^{n-s}(q)$  есть плоскость, проходящая через  $q$  и параллельная плоскости  $P_0^{n-s}$ . Для точек  $q \in P^m \cap P^s \setminus P^{s-1}$  и  $p \in P^{n-s}(q)$  пусть  $P^s(p)$  — плоскость, порождаемая  $P^{s-1}$  и  $p$ . Тогда (П. III, 5)  $|P^s(p) \cap R \setminus Q|_s = 0$  для каждого  $\lambda$  и компонента  $\omega_\lambda(p)$  измерима в  $P^s(p) \cap R$  для почти всех точек  $p \in P^{n-s}(q)$ ; поэтому плоскость  $P^s(p)$  является  $Q$ -хорошей для почти всех точек  $p \in P^{n-s}(q)$  и  $|P^{n-s}(q) \cap K \setminus H|_{n-s} = 0$ . Следовательно, по теореме Фубини  $|P^m \cap K \setminus H|_m = 0$ .

### 7. Бемольные $r$ -формы и бемольные $r$ -мерные коцепи.

Пусть  $\omega$  — бемольная  $r$ -форма в открытом множестве  $R \subset E^n$ , и пусть  $X$  — бемольная  $r$ -мерная коцепь в  $R$ . Мы говорим, что  $\omega$  и  $X$  ассоциированы, если существует такое множество  $Q \subset R$ ,  $|R \setminus Q| = 0$ , что  $\omega$  является бемольной формой по отношению к  $Q$ , и

$$(1) \quad \int_{\sigma} \omega = X \cdot \sigma \quad \text{для любого } Q\text{-хорошего } r\text{-мерного симплекса } \sigma.$$

Теперь мы докажем теорему, обратную теореме 5А.

**Теорема 7А.** Любая бемольная  $r$ -форма в открытом множестве  $R \subset E^n$  ассоциирована с единственной  $r$ -мерной бемольной коцепью в  $R$ . Если  $N$  и  $N'$  — числа, входящие в условия (b) и (c) из § 6, то  $|X| \leq N$  и  $|dX| \leq N'$ .

Если дана форма  $\omega$ , то мы определяем  $X \cdot \sigma$  для всех  $Q$ -хороших  $r$ -мерных симплексов  $\sigma$  по формуле (1).

**Лемма 7а.** Пусть  $\sigma$  и  $\sigma'$  — какие-либо  $Q$ -хорошие  $r$ -мерные симплексы, содержащиеся в выпуклом открытом подмножестве  $S$  множества  $R$ . Пусть, скажем,  $\sigma = p_0 \dots p_r$ ,  $\sigma' = p'_0 \dots p'_r$ ,  $\delta_\sigma = \text{diam}(\sigma)$  и

$$(2) \quad \delta_\sigma + 2\zeta \leq \delta, \quad |p'_i - p_i| \leq \zeta.$$

Тогда

$$(3) \quad \left| \int_{\sigma'} \omega - \int_{\sigma} \omega \right| \leq \zeta \left[ \frac{N' \delta^r}{r!} + \frac{(r+1) N \delta^{r-1}}{(r-1)!} \right].$$

Для заданного  $\zeta > 0$  мы найдем такие симплексы  $\sigma'' = p''_0 \dots p''_r$

и

$$\tau_i = p_0 \dots p_i p''_i \dots p''_r, \quad \tau'_i = p'_0 \dots p'_i p''_i \dots p''_r.$$

содержащиеся в  $S$ , что

$$|p_i'' - p_i| \leq \zeta, \quad |p_i'' - p_i'| \leq \zeta'$$

и симплексы  $\tau_i$  и  $\tau_i'$  являются  $Q$ -отличными. Вершины  $p_r'', p_{r-1}'', \dots, p_0''$  мы будем выбирать одну за другой. Если уже найдены  $p_r'', \dots, p_{i+1}'',$  то мы должны определить вершину  $p_i''$  так, чтобы симплексы  $\tau_i$  и  $\tau_i'$  были  $Q$ -отличными. Так как симплексы

$$p_0 \dots p_i p_{i+1}'' \dots p_r'', \quad p_0' \dots p_i' p_{i+1}'' \dots p_r''$$

хорошие, то нам нужно только сделать хорошими симплексы  $\tau_i$  и  $\tau_i'$  и их  $r$ -мерные грани, содержащие вершину  $p_i''$ . То, что это можно сделать, сразу следует из леммы 6b, в которой нужно взять  $P^m = E^n$ .

По формуле (П. II, 12.4) мы имеем

$$\partial \sum_i (-1)^i \tau_i = \sigma'' - \sigma + \sum_j \tau_j^*,$$

где  $\tau_j^*$  — некоторые грани симплекса  $\tau_j$ . Поэтому

$$\int_{\sigma''} \omega - \int_{\sigma} \omega = \sum_i (-1)^i \int_{\partial \tau_i} \omega - \sum_j \int_{\tau_j^*} \omega.$$

Пользуясь формулой (2.4) и условиями (b) и (c) из § 6, получаем

$$\left| \int_{\partial \tau_i} \omega \right| \leq N' |\tau_i| \leq \frac{N' \delta^r \zeta}{(r+1)!},$$

$$\left| \int_{\tau_j^*} \omega \right| \leq N |\tau_j^*| \leq \frac{N \delta^{r-1} \zeta}{r!}.$$

Две написанные выше суммы содержат  $r+1$  и  $(r+1)r$  членов соответственно, и отсюда следует неравенство (3), в котором симплекс  $\sigma'$  заменен на  $\sigma''$ . Неравенство (3) выполняется также для симплексов  $\sigma'$  и  $\sigma''$ , если  $\zeta$  заменить в нем на  $\zeta'$ . Так как число  $\zeta'$  произвольно, то неравенство (3) доказано.

Возвратимся к теореме. Пусть  $\sigma = p_0 \dots p_r$  — любой  $r$ -мерный симплекс в  $R$ , не являющийся  $Q$ -хорошим. По лемме 6b существует такая последовательность точек  $p_{01}, p_{02}, \dots \rightarrow p_0$ , что каждый симплекс  $\sigma_k = p_{0k} p_1 \dots p_r$  является  $Q$ -хорошим. Положим

$$(4) \quad X \cdot \sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} X \cdot \sigma_k.$$

(Мы могли бы в действительности взять симплексы  $\sigma_k = p_{0k} \dots p_{rk}$ ,  $p_{ik} \rightarrow p_{i'}$ .) Лемма 7а показывает, что этот предел существует и не зависит от выбора последовательности.

Если мы докажем, что выполняются неравенства  $|X \cdot \sigma| \leq N |\sigma|$ ,  $|X \cdot \partial \sigma^{r+1}| \leq N' |\sigma^{r+1}|$ , то из теоремы (V, 4A), или, вернее, из (VIII, 1(b)), будет следовать, что  $X$  есть  $r$ -мерная бемольная коцепь в  $R$ . Первое неравенство вытекает из (1), (4) и § 6(b). Чтобы доказать второе неравенство, предположим, что  $\sigma^{r+1} = p_0 \dots p_{r+1}$ . Если задано  $\zeta > 0$ , то, согласно лемме 6b, существует  $Q$ -отличный симплекс  $\sigma' = p'_0 \dots p'_{r+1}$ , для которого  $|p'_i - p_i| < \zeta$ . В силу (1) и (6.1)  $|X \cdot \partial \sigma'| \leq N' |\sigma'|$ . Пользуясь определением (4), получаем требуемое неравенство.

Единственность коцепи  $X$  очевидна, и тем самым теорема доказана.

**Теорема 7В.** Если две формы  $\omega$  и  $\omega'$  ассоциированы с одной и той же коцепью  $X$ , то  $\omega(p) = \omega'(p)$  п. в. в  $R$ .

Достаточно показать, что  $\omega_\lambda(p) = \omega'_\lambda(p)$  п. в. для каждого  $\lambda$ . Существует такое множество  $Q$ ,  $|R \setminus Q| = 0$ , что соотношение (1) выполняется и для  $\omega$  и для  $\omega'$ . Пусть  $P^{n-r}$  — плоскость, ортогональная к  $e_\lambda$ . Лемма 6а показывает, что плоскость  $P(q, e_\lambda)$  является  $Q$ -хорошей по отношению к каждой из форм  $\omega$ ,  $\omega'$  для почти всех точек  $q \in P^{n-r}$ . Из (1) следует, что для любой такой точки  $q$   $\int_\sigma \omega = \int_\sigma \omega'$  для всех симплексов  $\sigma$  в  $P(q, e_\lambda) \cap R$ . Отсюда вытекает, что  $\omega_\lambda(p) = \omega'_\lambda(p)$  п. в. в  $P(q, e_\lambda) \cap R$ . По теореме Фубини это выполняется п. в. в  $R$ .

Будем говорить, что  $r$ -формы  $\omega$  и  $\omega'$  в  $R$  эквивалентны, если  $\omega = \omega'$  п. в. в  $R$ . Теоремы 5А, 7А и 7В дают:

**Теорема 7С.** При соответствии, устанавливаемом формулой (1),  $r$ -мерные бемольные коцепи в открытом множестве  $R$  взаимно однозначно соответствуют классам эквивалентности бемольных  $r$ -форм в  $R$ . Нормы совпадают; см. ниже (5.3) и (12.6).

Отсюда, между прочим, следует, что пространство классов эквивалентности бемольных форм является полным и, следовательно, банаховым пространством.

**Лемма 7б.** Любая форма  $\omega'$ , эквивалентная бемольной форме  $\omega$ , является бемольной.

Допустим, что  $\omega$  — бемольная форма по отношению к  $Q$  и  $\omega' = \omega$  в  $Q_1$ ,  $|R \setminus Q_1| = 0$ . Положим  $Q' = Q \cap Q_1$ ; мы покажем, что форма  $\omega'$  бемольна по отношению к  $Q'$ . Мы имеем  $|R \setminus Q'| = 0$ , и условия (а) и (б) из § 6 выполняются. Нам нужно доказать (с). Пусть  $N'$  — число, которое задается формой  $\omega$ . Возьмем любой симплекс  $\sigma = \sigma^{r+1}$ , являющийся  $Q'$ -отличным для  $\omega'$ . Пусть  $\sigma_0, \dots, \sigma_{r+1}$  — все  $r$ -мерные грани симплекса  $\sigma$ . Так как  $Q' \subset Q$ , то  $|\sigma \setminus Q|_{r+1} = 0$ . Кроме того,  $|\sigma \setminus Q_1|_{r+1} = 0$ ; поэтому  $\omega = \omega'$  п. в. в  $\sigma$ , и форма  $\omega$  измерима в  $\sigma$ . Следовательно, симплекс  $\sigma$  является  $Q$ -хорошим для  $\omega$ . Подобным же образом устанавливается, что  $Q$ -хорошей для  $\omega$  будет и каждая грань  $\sigma_i$ ; поэтому симплекс  $\sigma$  является  $Q$ -отличным для  $\omega$  и выполняется неравенство (6.1). Далее,  $|\partial\sigma \setminus Q_1|_r = 0$ , поэтому  $\omega' = \omega$  п. в. в  $\partial\sigma$ , и неравенство (6.1) выполняется для  $\omega'$ ; тем самым условие (с) для формы  $\omega'$  доказано. Этим завершается доказательство.

Следующей леммой 7с мы воспользуемся в § 14. Пусть  $\varphi$  — некоторая измеримая в  $R$  функция со значениями в векторном пространстве (т. е. в некоторой системе координат измерима каждая ее компонента). Мы говорим, что симплекс  $\sigma^s$  является  $(Q, \varphi)$ -хорошим для  $\omega$ , если  $|\sigma^s \setminus Q|_s = 0$  и если форма  $\omega$  и функция  $\varphi$  измеримы в  $\sigma^s$ ; аналогично определяется  $(Q, \varphi)$ -отличный симплекс. Мы говорим, что форма  $\omega$  слабо бемольна в  $R$ , если для некоторых  $Q$  и  $\varphi$  выполняются условия бемольности формы  $\omega$  с тем лишь исключением, что требуется, чтобы условие (с) выполнялось только для  $(Q, \varphi)$ -отличных симплексов.

**Лемма 7с.** *Любая слабо бемольная форма является бемольной.*

Доказательство лемм 6а и 6б и теоремы 7А протекает, как и раньше, причем всюду нужно использовать функцию  $\varphi$ ; этим доказывается существование такой бемольной коцепи  $X$ , что

$$(5) \quad \int_{\sigma} \omega = X \cdot \sigma \quad \text{для всех } (Q, \varphi)\text{-хороших симплексов } \sigma.$$

Доказательство теоремы 7В теперь показывает, что  $\omega = D_X$  п. в. По предыдущей лемме  $\omega$  является бемольной формой.

Распространим теперь соотношение (VI, 8.4) на бемольные формы:

**Теорема 7D.** *Для любой бемольной коцепи  $X$  и дизъюнктной функции  $\varphi$  в  $R$*

$$(6) \quad D_{\varphi X}(p) = \varphi(p) D_X(p) \quad \text{всюду, где форма } D_X(p) \text{ определена.}$$

Возьмем произвольную точку  $p$ , в которой определена форма  $D_X(p)$ ; положим  $a = \varphi(p)$ . Возьмем, далее, любое  $r$ -направление  $\alpha$ ; пусть  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  — некоторая полная  $p$ - $\alpha$ -последовательность. Тогда существует такая последовательность  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \rightarrow 0$ , что

$$|\varphi(q) - a| \leq \varepsilon_i, \quad q \in \sigma_i.$$

Теперь

$$\left| \frac{\varphi X \cdot \sigma_i}{|\sigma_i|} - a \frac{X \cdot \sigma_i}{|\sigma_i|} \right| = \frac{|X \cdot (\varphi \sigma_i - a \sigma_i)|}{|\sigma_i|} \leq |X| \varepsilon_i,$$

и правая часть  $\rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ , что и доказывает (6).

**8. Бемольные функции  $r$ -направления.** В доказательстве теоремы 7А нигде прямо не использовался тот факт, что  $\omega(p)$  при  $p \in Q$  есть  $r$ -ковектор. Мы покажем здесь, что достаточно некоторых более слабых предположений, сделанных относительно  $\omega$ , чтобы обеспечить существование соответствующей коцепи  $X$ ; этим в свою очередь будет показано, что  $\omega$  может быть продолжена в бемольную  $r$ -форму п. в. в  $R$ .

Мы говорим, что  $\omega$  есть *ограниченная измеримая функция  $r$ -направления* в открытом множестве  $R \subset E^n$ , если существует измеримое множество  $Q \subset R$ ,  $|R \setminus Q| = 0$ , обладающее следующими свойствами:

(a') Для каждой точки  $p \in Q$  функция  $\omega(p, \alpha)$  определена для всех  $r$ -направлений  $\alpha$  и непрерывна по  $\alpha$ .

(b')  $\omega(p, -\alpha) = -\omega(p, \alpha)$ .

(c') Для каждого  $r$ -направления  $\alpha$  функция  $\omega(p, \alpha)$  измерима в  $R$ .

(d')  $|\omega(p, \alpha)| \leq N$  при некотором  $N$ .

Мы укажем теперь условие, из которого можно вывести условие (с), § 6. Определим  $Q$ -хорошие и  $Q$ -отличные симплексы так же, как в § 6. Если даны точка  $p \in R$  и  $(r+1)$ -направление  $\beta$ , то положим

$$d\omega(p, \beta) = \sup \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{|\sigma_i|} \left| \int_{\sigma_i} \omega \right| \right\},$$

где верхняя грань берется по всем полным последовательностям  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$   $Q$ -отличных  $(r+1)$ -мерных симплексов в плоскости  $P(p, \beta)$ , содержащих  $p$  и сходящихся к  $p$ .

Мы говорим, что  $\omega$  есть *бемольная функция  $r$ -направления* в  $R$ , если она является ограниченной измеримой функцией  $r$ -направления и, кроме того,

(e')  $d\omega(p, \beta) \leq N'$  для всех  $(p, \beta)$  при некотором  $N'$ .

Определение ассоциированности функции  $\omega$  и коцепи  $X$  остается таким же, как в § 7; не изменяется и определение эквивалентности функций  $\omega$  и  $\omega'$ .

**Теорема 8А.** Любая бемольная функция  $r$ -направления  $\omega$  в  $R$  ассоциирована по формуле (7.1) с некоторой  $r$ -мерной бемольной коцепью  $X$  в  $R$ ; этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности бемольных функций  $r$ -направления и  $r$ -мерными бемольными коцепями. Если дана бемольная функция  $r$ -направления  $\omega$ , то существует множество  $Q' \subset R$ ,  $|R \setminus Q'| = 0$ , обладающее тем свойством, что для точек  $p \in Q'$  существует такой  $r$ -ковектор  $\bar{\omega}(p)$ , что  $\bar{\omega}(p) \cdot \alpha = \omega(p, \alpha)$  для всех  $r$ -направлений  $\alpha$ ;  $\bar{\omega}$  есть бемольная  $r$ -форма в  $R$ , определяющая ту же коцепь  $X$ , что и  $\omega$ .

Прежде всего мы заметим, что лемма 6b остается справедливой. В самом деле, пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  — последовательность  $r$ -направлений, плотная в множестве всех  $r$ -направлений. Следуя доказательству леммы 6b, обозначим через  $H_k(q)$  множество точек  $p \in P^{n-s}(q)$ , для которых  $|P^s(p) \cap R \setminus Q|_s = 0$  и функция  $\omega(p, \alpha_k)$  измерима в  $P^s(q) \cap R$ ; тогда  $|P^{n-s}(q) - H_k(q)|_{n-s} = 0$ . Положим  $H(q) = \bigcap_k H_k(q)$ . В этом случае для точек  $p \in H(q)$  каждая функ-

ция  $\omega(p', \alpha_k)$  измерима в  $P^s(p) \cap R$ . Возьмем любое  $r$ -направление  $\alpha$ ; пусть, скажем  $\alpha_{\mu_1}, \alpha_{\mu_2}, \dots \rightarrow \alpha$ . Так как в силу (а')  $\omega(p', \alpha_{\mu_j}) \rightarrow \omega(p', \alpha)$  при  $p' \in Q$ , то функция  $\omega(p', \alpha)$  п. в. в  $P^s(p) \cap R$  является пределом некоторой последовательности измеримых функций и поэтому измерима. Доказательство теперь заканчивается, как и ранее.

Затем мы докажем условие (с) из § 6 (которое и здесь имеет смысл). Пусть  $\sigma = \sigma^{r+1}$  — некоторый  $Q$ -отличный симплекс. Будем рассматривать функцию  $\omega(p, \alpha)$  лишь в плоскости  $P^{r+1}$  симплекса  $\sigma$ , причем  $\alpha$  будем брать в  $P^{r+1}$ ; симплекс  $\sigma$  также является  $Q$ -отличным в этом ограниченном смысле. Пусть, скажем,  $\sigma = p_0 \dots p_{r+1}$ . Возьмем стандартное подразделение  $\mathfrak{S}\sigma$  симплекса  $\sigma$  и рассмотрим любой  $r$ -мерный симплекс  $\tau$  подразделения  $\mathfrak{S}\sigma$ , не входящий в  $\partial\sigma$ . По лемме (П. II, 4с) плоскость  $P^r$  симплекса  $\tau$  содержит середину  $p_{0,r+1}$  отрезка  $p_0 p_{r+1}$ , но не содержит никакой другой точки этого отрезка. Пусть, скажем,  $\tau = p_{0,r+1} \tau'$  и пусть  $P^{r-1}$  — плоскость симплекса  $\tau'$ . Тогда плоскость  $P^{r-1}$  и прямая  $P^1$ , содержащая отрезок  $p_0 p_{r+1}$ , порождают плоскость  $P^{r+1}$ . Положим  $\tau(p) = p\tau'$ . Применяя лемму 6b к пространству  $P^{r+1}$ , мы находим, что симплекс  $\tau(p)$  является  $Q$ -хорошим для почти всех точек  $p$  в  $P^1$ . Это же верно для каждого другого  $r$ -мерного симплекса подразделения  $\mathfrak{S}\sigma$ , не входящего в  $\partial\sigma$ . Так как симплексы, входящие в  $\partial\sigma$ , являются  $Q$ -хорошими, то мы можем на отрезке  $p_0 p_{r+1}$  найти такую точку  $p'$ , произвольно близкую к  $p_{0,r+1}$ , что если подразделение  $\mathfrak{S}_p\sigma$  образовано из  $\mathfrak{S}\sigma$  путем замены вершины  $p_{0,r+1}$  точкой  $p'$ , то все

$r$ -мерные симплексы подразделения  $\mathfrak{S}_1\sigma$  являются  $Q$ -хорошими и, следовательно, все  $(r+1)$ -мерные симплексы являются  $Q$ -отличными (мы все время вместо пространства  $E^n$  рассматриваем плоскость  $P^{r+1}$ ). Продолжая этот процесс, мы найдем похожую на последовательность стандартных подразделений последовательность  $\mathfrak{S}_1\sigma, \mathfrak{S}_2\sigma, \dots$  подразделений, все  $r$ -мерные симплексы которых являются  $Q$ -хорошими, а все  $(r+1)$ -мерные симплексы имеют для некоторого  $\eta > 0$  полноту  $\geq \eta$ .

Допустим, что  $\left| \int_{\partial\sigma} \omega \right| = a|\sigma|$ ,  $a > N'$ . Пусть  $\tau_{11}, \dots, \tau_{1m}$  — все  $(r+1)$ -мерные симплексы подразделения  $\mathfrak{S}_1\sigma$ . Если бы неравенства  $\left| \int_{\partial\tau_{1i}} \omega \right| < a|\tau_{1i}|$  были справедливы при каждом  $i$ , то, складывая эти неравенства, мы пришли бы к противоречию с написанным выше равенством. Поэтому  $\left| \int_{\partial\tau_{1i}} \omega \right| \geq a|\tau_{1i}|$  при некотором  $i$ .

Если  $\tau_{21}, \dots, \tau_{2m}$  — все  $(r+1)$ -мерные симплексы подразделения  $\mathfrak{S}_2\sigma$ , лежащие в  $\tau_{1i}$ , то по тем же соображениям  $\left| \int_{\partial\tau_{2j}} \omega \right| \geq a|\tau_{2j}|$  при некотором  $j$ . Продолжая таким же образом, мы получим полную последовательность  $\tau_{1i}, \tau_{2j}, \dots$   $Q$ -отличных симплексов, имеющих общую точку  $\bar{p}$ , и это показывает, что  $d\omega(\bar{p}, \alpha(\sigma)) \geq a > N'$ . Мы пришли к противоречию; следовательно, условие (с) § 6 выполняется.

Определение коцепи  $X$  по функции  $\omega$  теперь происходит в точности таким же образом, как в доказательстве теоремы 7А. И на этот раз коцепь  $X$  единственна.

Допустим, что две функции  $\omega$  и  $\omega'$  ассоциированы с одной и той же коцепью  $X$ . Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , как и выше, — всюду плотная последовательность  $r$ -направлений. Доказательство теоремы 7В показывает, что при каждом  $i$  п. в.  $\omega(p, \alpha_i) = \omega'(p, \alpha_i)$ . В силу свойства (а')  $\omega(p, \alpha) = \omega'(p, \alpha)$  для всех  $\alpha$  п. в. в  $R$ .

Если дана бемольная функция  $r$ -направления  $\omega$ , то определим  $X$ , а затем бемольную  $r$ -форму  $\bar{\omega} = D_X$  (теорема 5А). Тогда, полагая  $\omega'(p, \alpha) = \omega(p) \cdot \alpha$  для  $r$ -направлений  $\alpha$ , мы получаем некоторую бемольную функцию  $r$ -направления  $\omega'$ , ассоциированную с  $X$ . Поэтому существует такое множество  $Q$ ,  $|R \setminus Q| = 0$ , что все функции  $\omega$ ,  $\bar{\omega}$  и  $\omega'$  являются бемольными по отношению к  $Q$  и что  $\omega(p, \alpha) = \bar{\omega}(p) \cdot \alpha$  для всех  $\alpha$  и всех  $p \in Q$ . Следовательно,  $\omega(p, \alpha) = \bar{\omega}(p) \cdot \alpha$  для всех  $\alpha$  и всех  $p \in Q$ , и теорема доказана.

**9. Бемольные формы, определяемые компонентами.** Мы укажем здесь условия, которые следует наложить на компоненты  $\omega_\lambda$  формы  $\omega$  в прямоугольной системе координат, чтобы быть уверенным, что  $\omega$  будет бемольной формой. Условие  $d\omega \leq N'$  из § 8 появится в форме, в которой вместо симплексов используются координатные параллелепипеды.

*Координатный параллелепипед типа  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{r+1})$  определяется системой неравенств*

$$a_{\mu_i} \leq x^{\mu_i} \leq b_{\mu_i} \quad (i = 1, \dots, r+1), \quad x^k = a_k \quad (\text{для остальных } k).$$

Мы будем говорить, что  $s$ -мерный параллелепипед  $A$  ( $s \geq r$ ) является  $Q$ -хорошим, если  $|A \setminus Q|_s = 0$  и каждая компонента  $\omega_\lambda$  рассматриваемой  $r$ -формы  $\omega$  измерима в  $A$ ; он является  $Q$ -отличным, если он сам и каждая его грань размерности  $\geq r$  являются  $Q$ -хорошими.

Для любого  $\mu$  положим

$$(1) \quad \tilde{d}_\mu \omega(p) = \sup \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{|A_i|} \left| \int_{\partial A_i} \omega \right| \right\},$$

где верхняя грань берется по всем полным последовательностям  $A_1, A_2, \dots$   $Q$ -отличных параллелепипедов типа  $\mu$ , содержащих  $p$  и сходящихся к  $p$ . Интеграл по каждой грани параллелепипеда  $A_i$  берется от соответствующей компоненты  $\omega_\lambda$ .

**Теорема 9А.** Пусть  $\omega_\lambda$  ( $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ ) — ограниченные измеримые функции, определенные п. в. в открытом множестве  $R \subset E^n$ . Пусть функции  $\tilde{d}_\mu \omega$  ограничены в  $R$ . Тогда  $\omega_\lambda$  являются компонентами некоторой бемольной  $r$ -формы в  $R$ , и поэтому они единственным образом определяют  $r$ -мерную бемольную коцепь в  $R$ . Бемольные  $r$ -мерные коцепи в  $R$  соответствуют классам эквивалентности множеств функций  $\omega_\lambda$  в  $R$ .

Пусть, скажем,  $|\omega_\lambda| \leq N_0$ ,  $\tilde{d}_\mu \omega \leq N'_0$ . Мы покажем сначала, что

$$(2) \quad \left| \int_{\partial A} \omega \right| \leq N'_0 |A| \text{ для } Q\text{-отличных координатных параллелепипедов } A.$$

Допустим, что это не так; пусть, скажем,  $\left| \int_{\partial A} \omega \right| = a |A|$ ,  $a > N'_0$ .

$A$  — параллелепипед типа  $\mu$ . Мы можем найти такой  $r$ -мерный координатный параллелепипед  $B_i$ , разбивающий  $A$  приблизительно пополам, что  $B_i$  является  $Q$ -хорошим и  $B_i$  ортогонален к  $e_{\mu_i}$  ( $i = 1, \dots, r+1$ ). Таким образом,  $A$  разбивается на  $m = 2^{r+1}$  параллелепипедов  $A_{11}, \dots, A_{1m}$ , каждый из которых  $Q$ -отличен и имеет

приблизительно такую же форму, что и  $A$ . Как и в доказательстве теоремы 8A,  $\left| \int_{\partial A_{1i}} \omega \right| \geq a |A_{1i}|$  при некотором  $i$ . Разобьем  $A_{1i}$  на  $Q$ -отличные параллелепипеды  $A_{21}, \dots, A_{2m}$  и т. д. Как и в доказательстве теоремы 8A, мы приходим к противоречию с равенством (1).

Покажем, что  $\omega = \sum \omega_\lambda e^\lambda$  является для любого  $\rho_0 > 0$  бемольной  $r$ -формой в  $R' = \text{int}_{\rho_0}(R)$  с фиксированными числами  $N, N'$ , ограничивающими  $|\omega|_0, |d\omega|_0$ ; тогда это же будет верно и в самом множестве  $R$ .

Для каждого  $\rho, 0 < \rho \leq \rho_0$ , мы можем определить  $\rho$ -среднее  $\omega_\rho^\lambda$  функции  $\omega_\lambda$  (П. III, 3). Положим  $\omega^\rho = \sum \omega_\rho^\lambda e^\lambda$ ; тогда  $\omega^\rho$  есть гладкая  $r$ -форма в  $R'$ . Существует множество  $Q \subset R'$ , для которого  $|R' \setminus Q| = 0$  и

$$(3) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \omega^\rho(p) = \omega(p), \quad p \in Q.$$

Пусть коцепь  $X_\rho$  соответствует форме  $\omega^\rho$  (V, теорема 10A); тогда коцепь  $dX_\rho$  будет соответствовать форме  $\xi^\rho = d\omega^\rho$  (V, теорема 10B). Мы найдем число, ограничивающее  $|dX_\rho|$ .

Возьмем прежде всего любой  $(r+1)$ -мерный координатный параллелепипед  $A$ . Слегка сокращая обозначения, имеем

$$\begin{aligned} dX_\rho \cdot A &= \int_{\partial A} \omega^\rho(p) dp = \int_{\partial A} \int_V x_\rho(v) \omega(p+v) dv dp = \\ &= \int_V x_\rho(v) \int_{\partial A} \omega(p+v) dp dv; \end{aligned}$$

ср. доказательство формулы (5.6). Применяя неравенство (2), получаем

$$|dX_\rho \cdot A| \leq N'_0 |A| \int_V x_\rho(v) dv = N'_0 |A|$$

(так как почти все цепи  $T_v \partial A$  являются  $Q$ -отличными). Если заданы  $p \in R'$  и  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{r+1})$ , то, рассматривая полную последовательность параллелепипедов  $A_1, A_2, \dots$  типа  $\mu$ , мы видим, что

$$|\xi_\mu^\rho(p)| = \frac{|\lim_{k \rightarrow \infty} dX_\rho \cdot A_k|}{|A_k|} \leq N'_0.$$

Поэтому в силу (I, 13.3), (I, 12.18) (для ковекторов) и (V, 10.4)

$$(4) \quad |\xi^\rho(p)|_0 \leq \left(\frac{n}{r}\right)^{1/2} N'_0 = N', \quad |dX_\rho| \leq N'.$$

Теперь мы докажем условие (с) из § 6 для  $Q$ . Так как  $|\omega_\lambda^p| \leq |\omega_\lambda| \leq N_0$ , то для любого  $Q$ -отличного симплекса  $\sigma$  на основании (3) мы получаем

$$\left| \int_{\partial\sigma} \omega \right| = \left| \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial\sigma} \omega^\rho \right| = \left| \lim_{\rho \rightarrow 0} dX_\rho \cdot \sigma \right| \leq N' |\sigma|.$$

Следовательно,  $\omega$  является бемольной  $r$ -формой в  $R'$ , а значит, и в  $R$ . Остальные утверждения теоремы очевидны.

Пример. На плоскости положим

$$\omega(x, y) = \begin{cases} e^1 + e^2 & \text{при } x + y < 0, \\ 0 & \text{при } x + y > 0. \end{cases}$$

Тогда форма  $\omega = \omega_1 e^1 + \omega_2 e^2$  является бемольной, но форма  $\omega_1 e^1$  не является бемольной, в чем мы убеждаемся, рассматривая малые квадраты, диагонали которых лежат на прямой

$$x + y = 0.$$

#### 10. Аппроксимация ковектора $D_X(p)$ с помощью $X \cdot \sigma / |\sigma|$ .

В определении (4.1) функции  $D_X(p, \alpha)$  мы пользовались последовательностями  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  симплексов, каждый из которых имеет точку  $p$  своей вершиной. Предел мог бы и не существовать, если бы мы пользовались  $p$ -полными последовательностями более общего вида. Однако если для данной точки  $p$  существует ковектор  $D_X(p)$ , то, как показывает нижеследующая теорема,  $D_X(p, \alpha)$  существует для всех  $\alpha$  и в том случае, если пользоваться произвольными  $p$ -полными последовательностями. При  $r = n$  эта теорема является обычной (П. III, 5); при  $r = 0$  она тривиальна. В качестве приложения этой теоремы мы получим в следующем параграфе теорему о дифференцируемости.

**Теорема 10А.** Пусть  $X$  — некоторая  $r$ -мерная бемольная коцепь в открытом множестве  $R \subset E_r^n$ . Пусть точка  $p \in R$  такова, что для всех  $r$ -направлений  $\alpha$  функция  $D_X(p, \alpha)$  существует и может быть продолжена на все  $r$ -векторы  $\alpha$ , чем задается некоторый  $r$ -ковектор  $D_X(p)$ . Тогда для любых  $\varepsilon > 0$  и  $\eta > 0$  существует число  $\zeta > 0$ , обладающее следующим свойством. Для каждого  $r$ -мерного симплекса  $\sigma$

$$(1) \quad |X \cdot \sigma - D_X(p) \cdot \{\sigma\}| < \varepsilon |\sigma|, \text{ если } \sigma \subset U_\zeta(p), \Theta_p(\sigma) \geq \eta.$$

Деля на  $|\sigma|$ , получаем

$$(2) \quad \left| \frac{X \cdot \sigma}{|\sigma|} - D_X(p) \cdot \alpha(\sigma) \right| < \varepsilon.$$

**Замечание.** Допустим, что выполняются все предположения теоремы с тем лишь ограничением, что  $\alpha$  лежит в некоторой плоскости  $P^s$ , содержащей точку  $p$ . Тогда справедливо и заключение теоремы с тем ограничением, что симплекс  $\sigma$  должен лежать в  $P^s$ . Действительно, достаточно применить теорему к коцепи  $X$ , рассматриваемой только в открытом подмножестве  $P^s \cap R$  пространства  $P^s$ .

Прежде всего мы определим *аффинную аппроксимацию*  $W$  коцепи  $X$  в точке  $p$  с помощью соотношения

$$(3) \quad W \cdot A = D_X(p) \cdot \{A\} \text{ для любой } r\text{-мерной} \\ \text{бемольной цепи } A \text{ в } E^n.$$

Пользуясь (III, 2.3), находим

$$(4) \quad |W| \leq |X|, \quad dW = 0, \quad \mathfrak{L}(W) = 0.$$

Согласно (4),  $W$  является дизной коцепью. [Она является кограницей; см. (VII, лемма 10b).]

Мы начинаем с доказательства следующего частного случая теоремы:

**Лемма 10а.** *Заключение теоремы справедливо, если симплекс  $\sigma$  имеет точку  $p$  своей вершиной.*

Пусть число  $N'_{r,\eta}$  определяется, как в (3.9). Выберем такие  $r$ -направления  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , что любое  $r$ -направление находится на расстоянии, не превосходящем  $\varepsilon_1 = \varepsilon / (4N'_{r,\eta} |X|^b)$  от одного из них. Для  $\alpha_i$ ,  $\varepsilon/2$  и  $\eta/2$  выберем число  $\zeta_i > 0$  так, чтобы удовлетворялось неравенство (4.2). Пусть  $\zeta$  — наименьшее из чисел  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ .

Возьмем теперь любой симплекс  $\sigma$ , имеющий точку  $p$  своей вершиной, для которого удовлетворяется последнее неравенство в (1). Выберем  $i$  так, чтобы было

$$|\alpha(\sigma) - \alpha_i| \leq \varepsilon_1,$$

и пусть  $\pi$  обозначает проекцию на плоскость  $P(p, \alpha_i)$ . Предполагая, что  $\varepsilon_1 \leq 1$ ,  $\zeta \leq 1/2$ , на основании (3.10) получаем

$$\left| \frac{X \cdot \tau}{|\tau|} - \frac{X \cdot \sigma}{|\sigma|} \right| \leq N'_{r,\eta} \varepsilon_1 |X|^b = \frac{\varepsilon}{4},$$

где  $\tau = \pi\sigma$ ; в силу (4) то же самое неравенство выполняется и для  $W$ . На основании (4.5)  $\Theta(\tau) \geq \eta/2$ . Следовательно, в силу выбора числа  $\zeta_i$  и определения коцепи  $W$

$$\left| \frac{W \cdot \tau}{|\tau|} - \frac{X \cdot \tau}{|\tau|} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этих неравенств получаем (2).

Теперь докажем нашу теорему. Положим

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4(r+1)|X|}, \quad \varepsilon' = \frac{r! \eta \varepsilon}{2(r+1)}, \quad \eta' = \varepsilon_1 \eta, \\ \zeta_0 = \frac{(r+1)\varepsilon}{2|dX|}.$$

Выберем, согласно лемме,  $\zeta \leq \zeta_0$ , заменив  $\varepsilon$  и  $\eta$  на  $\varepsilon'$  и  $\eta'$  соответственно. Возьмем теперь любой симплекс  $\sigma \subset U_\zeta(p)$ , у которого  $\Theta_p(\sigma) \geq \eta$ . Пусть  $\sigma_0, \dots, \sigma_r$  — все  $(r-1)$ -мерные грани симплекса  $\sigma$ ; определим симплексы  $\tau = p\sigma$ ,  $\tau_i = p\sigma_i$  (некоторые из них могут быть вырожденными). Мы покажем, что

$$(5) \quad |X \cdot \tau_i - W \cdot \tau_i| < \frac{\varepsilon |\sigma|}{2(r+1)}, \quad i = 0, \dots, r.$$

Возьмем любое  $i$ ; допустим сначала, что  $\Theta(\tau_i) \geq \eta'$ . Тогда лемма дает

$$|X \cdot \tau_i - W \cdot \tau_i| < \varepsilon' |\tau_i|.$$

Кроме того, в силу (2.4)

$$|\tau_i| \leq \frac{\delta_{\tau_i}^r}{r!} \leq \frac{\delta_{p\sigma}^r}{r!} = \frac{|\sigma|}{r! \Theta_p(\sigma)} \leq \frac{|\sigma|}{r! \eta};$$

из этих неравенств следует (5). Допустим теперь, что  $\Theta(\tau_i) < \eta'$ .

Тогда

$$|\tau_i| < \eta' \delta_{\tau_i}^r \leq \eta' \delta_{p\sigma}^r = \frac{\eta' |\sigma|}{\Theta_p(\sigma)} \leq \frac{\eta' |\sigma|}{\eta} = \varepsilon_1 |\sigma|$$

и поэтому

$$|X \cdot \tau_i| < \varepsilon_1 |\sigma| |X|, \quad |W \cdot \tau_i| < \varepsilon_1 |\sigma| |X|,$$

и снова мы получаем (5).

Далее мы имеем

$$|dX \cdot \tau| \leq |dX| |\tau| \leq \frac{|dX| |\sigma| \zeta}{r+1} \leq \frac{\varepsilon |\sigma|}{2}.$$

Так как (П. II, 10.3)  $\partial\tau = \sigma - \sum (-1)^i \tau_i$  и  $dW = 0$ , то

$$X \cdot \sigma - W \cdot \sigma = dX \cdot \tau + \sum (-1)^i (X \cdot \tau_i - W \cdot \tau_i).$$

Сопоставляя это с написанными выше неравенствами, мы получаем (1), чем и завершается доказательство.

**11. Дифференцируемость липшицевских функций.** В качестве приложения теоремы 10А мы докажем теорему Радемахера<sup>1)</sup>:

**Теорема 11А.** Пусть  $f(p)$  — действительная функция в открытом множестве  $R \subset E^n$ , удовлетворяющая условию Липшица. Тогда существует такое измеримое множество  $Q \subset R$ ,  $|R \setminus Q| = 0$ , что

(а) Для каждой точки  $p \in Q$  производная  $\nabla f(p, v)$  существует (II, 1.1) и линейна относительно  $v$ .

(б) Дифференциал  $\nabla f(p)$  измерим в  $R$ ; иными словами, в  $R$  измерима каждая производная  $\nabla f(p, v)$ .

(с) Для каждой точки  $p_0 \in Q$  и любых чисел  $\varepsilon > 0$  и  $\eta > 0$  существует число  $\zeta > 0$ , обладающее следующим свойством:

$$(1) \quad |f(q) - f(p) - \nabla f(p_0, q - p)| \leq \varepsilon |q - p|, \\ \text{если } p, q \in U_\zeta(p_0), \quad |q - p| \geq \eta |p - p_0|.$$

Если мы докажем теорему для любого открытого ограниченного подмножества  $R'$  множества  $R$ , то тем самым она будет доказана и для  $R$ . Положим  $Y \cdot p = f(p)$  в  $R'$ ; этим в  $R'$  определяется некоторая нульмерная бемольная кощепь  $Y$  (V, теорема 4В). Положим  $X = dY$ . Пусть  $Q$  — множество точек, в которых существует  $D_X(p)$ ; по теореме 5А  $|R \setminus Q| = 0$ . Мы покажем, что

$$(2) \quad \nabla f(p, v) = D_X(p) \cdot v, \quad p \in Q.$$

Положим  $p_t = p + tv$ ,  $\sigma_t = pp_t$  (если  $v \neq 0$ ). Тогда, если  $t$  настолько мало, что отрезок  $pp_t$  лежит в  $R'$ , то

$$f(p_t) - f(p) = Y \cdot \partial(pp_t) = X \cdot \sigma_t,$$

$$\nabla f(p, v) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(p_t) - f(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{X \cdot \sigma_t}{|\sigma_t|} |v| = D_X(p) \cdot v.$$

Итак, свойство (а) выполняется; (б) следует из теоремы 5А.

Чтобы доказать (с), для данной точки  $p_0 \in Q$  и заданных чисел  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta > 0$  положим  $\eta' = \eta/(1 + \eta)$  и выберем число  $\zeta > 0$  по теореме 10А, взяв в ней  $\eta'$  вместо  $\eta$ . Возьмем теперь любые точки  $p, q \in R'$ , удовлетворяющие указанным в (1) условиям. Мы можем считать, что  $\eta \leq 1$ ; тогда

$$|q - p_0| \leq |q - p| + |p - p_0| \leq \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) |q - p| = \frac{|q - p|}{\eta'},$$

и поэтому  $\text{diam}(p_0 pq) \leq |q - p|/\eta'$ . Положим  $\sigma = pq$ . Тогда  $\sigma \subset U_\zeta(p_0)$  и из только что установленного неравенства следует,

<sup>1)</sup> Rademacher H., Über partielle und totale Differenzierbarkeit I, *Math. Ann.*, 79 (1919), 340—352. См. Сакс, стр. 450—451.

что  $\Theta_{p_0}(\sigma) \geq \eta'$ . Таким образом, мы можем воспользоваться неравенством (10.1), из которого мы получаем (1), что и завершает доказательство.

**Теорема 11В.** Пусть  $f$  — отображение открытого множества  $R \subset E^n$  в  $E^m$ , удовлетворяющее условию Липшица. Тогда для некоторого множества  $Q$ ,  $|R \setminus Q| = 0$ , верно следующее. Производная  $\nabla f(p, v)$  существует и линейна в  $Q$ ; дифференциал  $\nabla f$  измерим в  $R$ ; выполняется свойство (с) из теоремы 11А.

Эта теорема сразу будет доказана, если выразить функцию  $f(p)$ , как в (II, 5.20), через ее компоненты  $f^i$  в некоторой аффинной системе координат и применить предыдущую теорему к каждой компоненте  $f^i$ .

**12. О внешнем дифференциале  $r$ -форм.** Пусть  $\omega$  — бемольная  $r$ -форма в открытом множестве  $R \subset E^n$ . Пусть  $X = \Psi\omega$  — соответствующая  $r$ -мерная бемольная коцепь в  $R$ . Будем писать  $\Phi X$  вместо  $D_X$ . По теореме 7С мы имеем

$$(1) \quad \Psi\Phi X = X, \quad \Phi\Psi\omega = \omega \quad \text{п. в.}$$

Дифференциал  $d\omega$  мы можем определить по формуле

$$(2) \quad d\omega = \Phi d\Psi\omega.$$

Это бемольная  $(r+1)$ -форма, определенная п. в. в  $R$ , и при этом если  $\omega = \omega'$  п. в., то  $d\omega = d\omega'$ . На основании (1) и (2)

$$(3) \quad \begin{cases} \Psi d\omega = d\Psi\omega, & \Phi dX = d\Phi X, \\ d d\omega = \Phi d\Psi\Phi d\Psi\omega = \Phi d d\Psi\omega = 0. \end{cases}$$

В силу теоремы 5А и равенства (2) мы имеем теорему Стокса для бемольных форм  $D_X$ :

$$(4) \quad \int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega \quad \text{для всех симплексов } \sigma, \text{ если } \omega = D_X.$$

С помощью методов гл. III и X мы могли бы заменить  $\sigma$  областями более общего вида.

Для бемольных форм  $\omega$  по определению полагаем

$$(5) \quad |\omega|^b = \sup \{ |\omega|_0, \quad |d\omega|_0 \}$$

[см. (П. III, 5.1)]. Тогда в силу (5.3)

$$(6) \quad |X|^b = |\omega|^b, \quad \text{если } X \text{ и } \omega \text{ ассоциированы.}$$

**Теорема 12А.** Пусть  $\omega$  — бемольная  $r$ -форма ( $r > 0$ ) в выпуклом открытом множестве  $R \subset E^n$ , и пусть  $d\omega = 0$  п. в. в  $R$ . Тогда существует такая бемольная  $(r-1)$ -форма  $\xi$  в  $R$ , что  $d\xi = \omega$  п. в. в  $R$ .

Положим  $X = \Psi\omega$ ; тогда  $dX = 0$ . По лемме (VII, 10b) существует  $(r-1)$ -мерная бемольная коцепь  $Y$  в  $R$ , для которой  $dY = X$ . Положим  $\xi = \Phi Y$ . Тогда в силу (3) и (1)

$$d\xi = \Phi dY = \Phi X = \Phi \Psi \omega = \omega \quad \text{п. в.}$$

Напомним аналитическую формулу (II, 8.1) для внешнего дифференциала  $d\omega$ , который мы на время обозначим через  $d'\omega$ ,

$$(7) \quad d'\omega(p) \cdot (v_1 \vee \dots \vee v_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \nabla_{v_i} \omega(p) \cdot (v_1 \vee \dots \hat{v}_i \dots \vee v_{r+1}).$$

Мы покажем, что для дизъюнктивных форм (V, 10)  $d'\omega$  имеет смысл и равен  $d\omega$  п. в.

**Теорема 12В.** Пусть  $\omega$  — дизъюнктивная  $r$ -форма в открытом множестве  $R \subset E^n$ . Тогда  $d'\omega$  есть бемольная  $(r+1)$ -форма, и п. в. в  $R$  она равна  $d\omega$ .

Пусть  $\Psi\omega = X$ ; тогда  $d\omega$  есть  $(r+1)$ -форма, соответствующая коцепи  $dX$ . По теореме 11В существует множество  $Q \subset R$ ,  $|R \setminus Q| = 0$ , которое обладает следующим свойством: для отображения  $\omega$  множества  $R$  в пространство  $V^{[r]}$  производная  $\nabla_v \omega(p)$  при  $p \in Q$  существует и линейна относительно  $v$ ; она измерима и удовлетворяет в  $Q$  условию (с) теоремы 11А.

Теперь произведение  $\nabla_v \omega(p) \cdot (u_1 \vee \dots \vee u_r)$  при  $p \in Q$  линейно относительно всех векторов; поэтому  $d'\omega(p)$  есть  $(r+1)$ -ковектор ( $p \in Q$ ). Он измерим в  $R$ . Пусть символ  $d_\mu \omega$  обозначает компоненту  $(d\omega)_\mu$ . Если мы покажем, что для каждого  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{r+1})$  п. в. в  $R$  имеет место равенство  $d'_\mu \omega = d_\mu \omega$ , то теорема будет доказана.

Сначала мы докажем следующее. Пусть  $P^{r+1}$  — любая плоскость с  $(r+1)$ -направлением  $(r+1)$ -вектора  $e_\mu$ , для которой  $|P^{r+1} \cap R \setminus Q|_{r+1} = 0$  и  $d'\omega$  измерим в  $P^{r+1} \cap R$ . Тогда для любой точки  $p_0 \in P^{r+1} \cap Q$  и любых чисел  $\varepsilon > 0$  и  $\eta > 0$  существует число  $\zeta > 0$ , обладающее следующим свойством. Пусть  $A$  — произвольный координатный параллелепипед в  $P^{r+1}$ . Тогда

$$(8) \quad \left| \int_{\partial A} \omega - d'\omega(p_0) \cdot \{A\} \right| \leq \varepsilon |A|, \quad \text{если } p_0 \in A \subset U_\zeta(p_0), \quad \Theta(A) \geq \eta.$$

Положим  $\varepsilon_1 = \varepsilon/(r+1)$  и выберем  $\zeta$  для  $\omega$ ,  $p_0$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\eta$  по теореме 11В. Пусть  $v_1 = c_1 e_{\mu_1}$ , ...,  $v_{r+1} = c_{r+1} e_{\mu_{r+1}}$  — векторы-ребра параллелепипеда  $A$ . Пусть  $A_i^-$ ,  $A_i^+$  — грани параллелепипеда  $A$ . Тогда

$$\{A\} = v_1 \vee \dots \vee v_{r+1}, \quad \{A_i^-\} = \{A_i^+\} = v_1 \vee \dots \hat{v}_i \dots \vee v_{r+1}.$$

Возьмем любую точку  $p \in A_i^-$ ; тогда  $q = p + v_i \in A_i^+$ . Положим  $\delta = \text{diam}(A)$ . Тогда

$$|v_i| |A_i^-| = |A| = \Theta(A) \delta^{r+1} \geq \eta \delta^{r+1}.$$

Кроме того,  $|v_j| \leq \delta$ , поэтому  $|A_i^-| \leq \delta^r$  и

$$|q - p| = |v_i| \geq \eta \delta \geq \eta |p - p_0|.$$

Следовательно, применяя (11.1) к форме  $\omega$ , получаем

$$|\omega(q) - \omega(p) - \nabla_{v_i} \omega(p_0)| \leq \varepsilon_1 |v_i|,$$

и, таким образом,

$$|\omega(q) \cdot \{A_i^+\} - \omega(p) \cdot \{A_i^-\} - \nabla_{v_i} \omega(p_0) \cdot (v_1 \vee \dots \hat{v}_i \dots \vee v_{r+1})| \leq \varepsilon_1 |A|.$$

Заставляя точку  $p$  пробегать по  $A_i^-$  и интегрируя, находим

$$\left| \int_{A_i^+} \omega - \int_{A_i^-} \omega - \nabla_{v_i} \omega(p_0) \cdot (v_1 \vee \dots \hat{v}_i \dots \vee v_{r+1}) \right| \leq \varepsilon_1 |A|.$$

Так как  $\partial A = \sum (-1)^{i-1} (A_i^+ - A_i^-)$ , то, суммируя по  $i$ , получаем (8).

Возьмем некоторую плоскость  $P' = P^{n-r-1}$ , ортогональную к  $e_\mu$ . Для почти всех точек  $q \in P'$  плоскость  $P(q, e_\mu)$  обладает указанными выше свойствами плоскости  $P^{r+1}$ . Возьмем любую точку  $p_0 \in Q \cap P(q, e_\mu)$ , и пусть  $A_1, A_2, \dots$  — полная последовательность таких же параллелепипедов, как и выше. Тогда неравенства (10.1) и (8) (первое из них применяется к регулярному подразделению каждого параллелепипеда  $A_i$ ) дают

$$\begin{aligned} d_\mu \omega(p_0) &= d\omega(p_0) \cdot e_\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{dX \cdot A_i}{|A_i|} = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{|A_i|} \int_{\partial A_i} \omega = d' \omega(p_0) \cdot e_\mu = d'_\mu \omega(p_0). \end{aligned}$$

Поэтому  $d_\mu \omega = d'_\mu \omega$  п. в. в  $P(q, e_\mu)$  и, следовательно, п. в. в  $R$ . Это завершает доказательство.

**13. О средних  $r$ -форм.** Для данной  $r$ -формы  $\omega$  обозначим через  $\omega^\rho$  ее  $\rho$ -среднее в  $\text{int}_\rho(R)$  (§ 9). Пусть  $X = \Psi\omega$ . Так как п. в.  $D_X = \omega$ , то из (5.6) мы получаем  $\omega^\rho = (D_X)^\rho = D_{X_\rho}$ . Следовательно, в силу (12.1) имеем также  $X_\rho = \Psi\Phi X_\rho = \Psi\omega^\rho$ . Итак,

$$(1) \quad (\Phi X)_\rho = \Phi X_\rho, \quad (\Psi\omega)_\rho = \Psi\omega^\rho.$$

Эти соотношения в сочетании с (12.2) и (5.5) дают

$$(2) \quad (d\omega)^\rho = d\omega^\rho.$$

Если даны  $\omega$  и  $X = \Psi\omega$ , то мы положим  $\bar{\omega} = D_X$ . Вообще говоря,  $\bar{\omega}$  имеет лучшие свойства, чем  $\omega$ ; см. теоремы 5A, 17B и теорему (X, 9B). Мы можем непосредственно найти  $\bar{\omega}$  по  $\omega$  с помощью двойного предельного перехода. Именно, для заданных точки  $p$  и  $r$ -направления  $\alpha$  выберем векторы  $v_1, v_2, \dots \rightarrow 0$  так, чтобы при каждом  $j$  было  $|P(p + v_j, \alpha) \cap R \setminus Q|_r = 0$  и функция  $\omega(q, \alpha')$  была при всех  $\alpha'$  измерима в  $P(p + v_j, \alpha) \cap R$ , где  $Q$  — множество, по отношению к которому выполняются условия из § 6. Тогда [см. (7.1)]

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{T_{v_j} \sigma} \omega = \lim_{j \rightarrow \infty} X \cdot T_{v_j} \sigma = X \cdot \sigma, \quad \sigma \subset P(p, \alpha).$$

Выберем некоторую  $p$ -полную последовательность  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  в  $P(p, \alpha)$ , где  $\alpha(\sigma_i) = \alpha$ ; тогда

$$(3) \quad \bar{\omega}(p) \cdot \alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{X \cdot \sigma_i}{|\sigma_i|} = \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{|\sigma_i|} \int_{T_{v_j} \sigma_i} \omega.$$

Один из простых способов улучшения формы  $\omega$  состоит в следующем. Сначала берем  $\rho$ -среднее  $\omega^\rho$ ; затем считаем  $\rho \rightarrow 0$ :

$$(4) \quad \omega^*(p, \alpha) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_V \chi_\rho(v) \omega(p + v, \alpha) dv.$$

Эта форма  $\omega^*$  не так удовлетворительна, как  $\bar{\omega}$ ; см. пример ниже. Поскольку же  $\omega^*$  существует, она имеет удовлетворительные значения:

**Теорема 13A.** Для данной бемольной  $r$ -формы  $\omega$  в  $R$  форма  $\omega^*$  существует п. в. в  $R$  и является бемольной  $r$ -формой;  $\omega^* = \omega$  п. в. в  $R$ . Для любого  $r$ -мерного симплекса  $\sigma$ , для которого п. в. в  $\sigma$  значение  $\omega^*(p, \alpha(\sigma))$  существует  $\int \omega^* = X \cdot \sigma$  ( $X = \Psi\omega$ ).

Определим среднее  $X_p$ , как в § 5. Тогда  $D_{X_p} = \omega^p$ ; поэтому для любого  $\alpha$

$$(5) \quad \omega^*(p, \alpha) = \lim_{p \rightarrow 0} D_{X_p}(p, \alpha), \text{ если } \omega^*(p, \alpha) \text{ существует.}$$

В силу (5.7) это имеет место для всех  $\alpha$  п. в. в  $R$  и  $\omega^* = D_X$  п. в.; следовательно,  $\omega^*$  есть бемольная  $r$ -форма, эквивалентная форме  $\omega$ .

Возьмем теперь любой симплекс  $\sigma$ , удовлетворяющий описанному выше условию. Тогда, пользуясь (V, 13.12), получаем

$$\int_{\sigma} \omega^* = \int_{\sigma} \lim_{p \rightarrow 0} D_{X_p} = \lim_{p \rightarrow 0} \int_{\sigma} D_{X_p} = \lim_{p \rightarrow 0} X_p \cdot \sigma = X \cdot \sigma.$$

Пример. Мы определим в плоскости  $x, y$  бемольную 1-форму  $\omega$ , для которой  $\omega^*(p, e_1)$  не существует почти ни в одной точке оси  $x$ . Ключом конструкции является пример [V, 13(a)].

Определим полосы

$$R_0: \frac{3}{16} \leq y \leq \frac{4}{16}, \quad R'_0: \frac{2}{16} \leq y \leq \frac{5}{16}.$$

Разобьем  $R_0$  на прямоугольники длины 4, которые мы будем называть попеременно „четными“ и „нечетными“. Пусть функция  $\varphi(p)$  равна нулю на левой стороне каждого четного прямоугольника, возрастает с угловым коэффициентом 1 до значения 4 на правой стороне четного прямоугольника и вновь убывает до нуля в следующем нечетном прямоугольнике. Пусть  $\varphi$  равна нулю на сторонах полосы  $R'_0$  и линейна на вертикальных отрезках в множестве  $R'_0 \setminus R_0$ , так что она непрерывна в  $R'_0$ .

Если сжать плоскость к началу координат в 16 раз, то полосы  $R_0$  и  $R'_0$  перейдут в полосы  $R_1$  и  $R'_1$ ; полоса  $R_1$  будет разбита на прямоугольники длины 1/4. Определим функцию  $\varphi$  в  $R'_1$  так же, как в  $R'_0$ ;  $\varphi$  имеет угловые коэффициенты 1 и  $-1$  в прямоугольниках из  $R_1$  и максимальное значение 1/4. Затем мы продолжаем этот процесс, строя полосы  $R_2$  и  $R'_2$  и т. д. Положим  $\varphi(p) = 0$  вне полос  $R'_i$ .

Возьмем отрезки длины 2 на оси абсцисс  $E^1$ , центр каждого из которых лежит под центром четного прямоугольника полосы  $R_0$ . Пусть  $A_0$  — объединение всех таких отрезков. Пусть, далее,  $B_0$  — объединение таких же отрезков, расположенных под нечетными прямоугольниками из  $R_0$ . Подобным же образом определим  $A_i$  и  $B_i$  для полосы  $R_i$ . Положим

$$A'_i = A_i \cup A_{i+1} \cup \dots, \quad A = A'_0 \cap A'_1 \cap \dots$$

и точно таким же образом определим  $B'_i, B$ . Очевидно,  $|E^1 \setminus A'_i| = 0$ ; поэтому

$$|E^1 \setminus A| = 0, \quad |E^1 \setminus B| = 0, \quad |E^1 \setminus A \cap B| = 0.$$

Функция  $\varphi(p)$  определяет некоторую нульмерную коцепь  $Y$ ; положим  $X = dY$ ,  $\omega = D_X$ . Пусть  $\omega^p = D_{X_p} = \rho$ -среднему формы  $\omega$ ; как и выше, определим  $\omega^*$ . Наметим доказательство того факта, что значение  $\omega^*(p, e_1)$  не существует почти ни в одной точке оси  $x$ , предполагая, что  $x_p(v)$  равно своему максимальному значению в большей части окрестности  $U_p(0)$ .

Возьмем любую точку  $p \in A_0$  и рассмотрим среднее  $\omega^1$ . Так как  $U_1(p)$  содержит часть  $H$  одного из четных прямоугольников полосы  $R_0$ , но не содержит ни одной точки никакого нечетного прямоугольника из  $R_0$  и так как  $\omega(p, e_1) = 1$  в  $H$ , то формула (5.6) показывает, что интеграл по  $R'_0$  вносит в  $\omega^1(p, e_1)$  некоторую величину  $a' > 0$ . При  $i > 0$  в  $U_1(p)$  входит приблизительно столько же четных, сколько и нечетных прямоугольников из  $R_i$ ; поэтому взнос от полосы  $R'_i$  в  $\omega^1(p, e_1)$  мал. Таким образом, мы видим, что  $\omega^1(p, e_1) \geq a > 0$  при  $p \in A_0$ . Так как  $U_{1/16^i}(p) \cap R'_j = \emptyset$  при  $j < i$  ( $p \in E^1$ ), то аналогично мы находим, что  $\omega^{1/16^i}(p, e_1) \geq a$ ,  $p \in A_i$ . Поэтому для каждого  $j$  и для каждой точки  $p \in A'_j$  существует такое  $i \geq j$ , что  $\omega^{1/16^i}(p, e_1) \geq a$ . Следовательно, для  $p \in A$  существует такая последовательность  $i_1, i_2, \dots$ , что  $\omega^{1/16^{i_k}}(p, e_1) \geq a$  для каждого  $i_s = k$ . Для  $p \in B$  мы подобным же образом найдем  $\omega^{1/16^i}(p, e_1) \leq -a$ . Следовательно, в  $A \cap B$  значение  $\omega^*(p, e_1)$  не существует.

**14. Произведения коцепей.** Сначала мы определим произведения форм; с их помощью мы получим произведения коцепей.

Пусть  $\xi(p)$  и  $\eta(p)$  — бемольные формы в открытом множестве  $R \subset E^n$  степени  $r$  и  $s$  соответственно. Их *произведение* есть  $(r+s)$ -форма  $\xi \vee \eta$ :

$$(1) \quad (\xi \vee \eta)(p) = \xi(p) \vee \eta(p), \quad \text{определена п. в. в } R.$$

В силу (I, 14.2) и (I, 14.3)

$$(2) \quad |\xi \vee \eta|_0 \leq \binom{r+s}{r} |\xi|_0 |\eta|_0.$$

$$(3) \quad |\xi \vee \eta|_0 \leq |\xi|_0 |\eta|_0, \quad \text{если } \xi \text{ или } \eta \text{ п. в. простые,}$$

причем последнее справедливо, если  $r$  или  $s$  равны 0, 1,  $n-1$  или  $n$ ; см. (I, 9).

Чтобы доказать, что  $\xi \vee \eta$  — бемольная  $(r+s)$ -форма, мы покажем, что она является слабо бемольной (§ 7). Пусть  $\varphi$  — множество функций  $(\xi, \eta, d\xi, d\eta)$ . Мы воспользуемся средним  $\xi^\rho, \eta^\rho$  форм  $\xi$  и  $\eta$ . По теореме 13A  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \omega^\rho = \omega$  п. в. для любой бемольной формы  $\omega$ . Поэтому в силу (13.2) при  $\rho \rightarrow 0$

$$(4) \quad \xi^\rho \rightarrow \xi, \quad \eta^\rho \rightarrow \eta, \quad d\xi^\rho \rightarrow d\xi, \quad d\eta^\rho \rightarrow d\eta$$

п. в. в  $R$ . Пусть это выполняется в  $Q$ ,  $|R \setminus Q| = 0$ . Мы должны доказать условие (с) из § 6, пользуясь  $(Q, \varphi)$ -отличными симплексами. Возьмем любой симплекс  $\sigma = \sigma^{r+s+1}$ , для которого  $|\sigma \setminus Q|_{r+s+1} = 0$ ,  $|\partial\sigma \setminus Q|_{r+s} = 0$  и все указанные выше функции измеримы в  $\sigma$  и в  $\partial\sigma$ . Так как эти функции ограничены, а формы  $\xi^\rho$  и  $\eta^\rho$  являются гладкими, то мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial\sigma} \xi \vee \eta &= \int_{\partial\sigma} \lim (\xi^\rho \vee \eta^\rho) = \lim \int_{\partial\sigma} \xi^\rho \vee \eta^\rho = \\ &= \lim \int_{\sigma} d(\xi^\rho \vee \eta^\rho) = \lim \int_{\sigma} (d\xi^\rho \vee \eta^\rho \pm \xi^\rho \vee d\eta^\rho) = \\ &= \int_{\sigma} (\lim d\xi^\rho \vee \lim \eta^\rho \pm \lim \xi^\rho \vee \lim d\eta^\rho) = \int_{\sigma} (d\xi \vee \eta \pm \xi \vee d\eta). \end{aligned}$$

Поэтому в силу (2), как и требовалось,

$$(5) \quad \left| \int_{\partial\sigma} \xi \vee \eta \right| \leq N' |\sigma|, \quad N' = c_{rs} (|d\xi|_0 |\eta|_0 + |\xi|_0 |d\eta|_0),$$

где числа  $c_{rs}$  определяются формулой (15). Следовательно, форма  $\xi \vee \eta$  является слабо бемольной и в силу леммы 7с бемольной.

Пусть форма  $\omega = \xi \vee \eta$  соответствует коцепи  $W$ . Тогда определение (12.2) дифференциала  $d\omega$  дает

$$\int_{\sigma} d(\xi \vee \eta) = dW \cdot \sigma = W \cdot \partial\sigma = \int_{\partial\sigma} \xi \vee \eta,$$

где  $\sigma$  — симплекс, удовлетворяющий указанным выше условиям. Пользуясь доказанным выше равенством, находим

$$(6) \quad d(\xi \vee \eta) = d\xi \vee \eta + (-1)^r \xi \vee d\eta \quad \text{п. в. } (\deg \xi = r)$$

(ср. доказательство теоремы 7B).

Для данных бемольных коцепей  $X$  и  $Y$  в  $R$  мы определим теперь их  $\cup$ -произведение  $X \cup Y$  как коцепь, соответствующую произведению двух форм  $D_X, D_Y$ :

$$(7) \quad X \cup Y = \Psi(D_X \vee D_Y).$$

Из (12.3) и (6) получаем

$$(8) \quad d(X^r \cup Y^s) = dX^r \cup Y^s + (-1)^r X^r \cup dY^s.$$

Единичная нульмерная коцепь  $I^0$  соответствует функции, тождественно равной единице. Очевидно,

$$(9) \quad I^0 \cup X = X \cup I^0 = X.$$

В силу (5.3), (2) и (3)

$$(10) \quad |X^r \cup Y^s| \leq \binom{r+s}{r} |X^r| |Y^s|,$$

$$(11) \quad |X^r \cup Y^s| \leq |X^r| |Y^s|, \text{ если } r \text{ или } s \text{ равны } 0, 1, n-1 \text{ или } n.$$

В силу соответствующих свойств произведения форм (I, 6) произведение (7) билинейно, ассоциативно и удовлетворяет условию

$$(12) \quad X^r \cup Y^s = (-1)^{rs} Y^s \cup X^r.$$

Теперь мы установим некоторые неравенства для бемольной нормы произведения, взяв для простоты  $R = E$ . В общем случае следует в нужных местах *приписывать индекс R*; см (VIII, 1.10) и (VIII, 1.21). Так как  $\binom{r+s}{r} \leq \binom{r+s+1}{r}$ , то из (V, 4.8) и (10) получаем

$$\begin{aligned} |X^r \cup Y^s|^b &= \sup \{ |X \cup Y|, |d(X \cup Y)| \} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \binom{r+s}{r} |X| |Y|, \binom{r+s+1}{r+1} |dX| |Y| + \right. \\ &\quad \left. + \binom{r+s+1}{r} |X| |dY| \right\} \leq \\ &\leq \binom{r+s+1}{r+1} |dX| |Y| + \binom{r+s+1}{r} |X| \sup \{ |Y|, |dY| \}, \end{aligned}$$

$$(13) \quad |X^r \cup Y^s|^b \leq \binom{r+s+1}{r+1} |dX| |Y| + \binom{r+s+1}{r} |X| |Y|^b.$$

Отсюда

$$(14) \quad |X^r \cup Y^s|^b \leq c_{rs} (|X|^b |Y| + |X| |Y|^b) \leq 2c_{rs} |X|^b |Y|^b,$$

$$(15) \quad c_{rs} = \sup \left\{ \binom{r+s+1}{r}, \binom{r+s+1}{s} \right\}.$$

При  $r = 0$ , пользуясь неравенством (11), получаем

$$(16) \quad |X^0 \cup Y^s|^b \leq |dX| |Y| + |X| |Y|^b \leq |X|^b |Y| + |X| |Y|^b,$$

$$(17) \quad |X^0 \cup Y^s|^b \leq |X| |dY| + |X|^b |Y| \leq 2 |X|^b |Y|^b.$$

Пример (а). Мы не можем в (17) отбросить множитель 2. В самом деле, взяв  $n = 1$ ,  $r = s = 0$ ,  $R$  — единичному интервалу  $0 < x < 1$ , положим

$$D_X(x) = x, \quad Z = X \cup X.$$

Тогда, вводя обозначения  $\bar{D}_{dZ}(x) = D_{dZ}(x) \cdot e_1$ , мы имеем

$$D_Z(x) = x^2, \quad \bar{D}_{dZ}(x) = 2x, \quad |dZ| = 2,$$

и поэтому в  $R$

$$|X|^b = 1, \quad |Z|^b = 2 = 2|X|^b|X|^b.$$

Допустим теперь, что  $X$  и  $Y$  — дизъюнктные коцепи. Тогда они являются и бемольными, и данное выше определение и установленные свойства сохраняют силу. Если  $D_X = \xi$ ,  $D_Y = \eta$ , то неравенство (2) дает

$$|(\xi \vee \eta)(q) - (\xi \vee \eta)(p)|_0 \leq \binom{r+s}{r} [|\xi(q)|_0 |\eta(q) - \eta(p)|_0 + \\ + |\xi(q) - \xi(p)|_0 |\eta(p)|_0];$$

следовательно,

$$(18) \quad \mathfrak{L}(X^r \cup Y^s) \leq \binom{r+s}{r} [|X| \mathfrak{L}(Y) + \mathfrak{L}(X) |Y|].$$

Положим  $a = \binom{r+s}{r}$ ,  $b = r + s + 1$ . Тогда в силу (V, 7.8)

$$|X^r \cup Y^s|^{\#} = \sup \{ |X \cup Y|, \quad b \mathfrak{L}(X \cup Y) \} \leq \\ \leq \sup \{ a |X| |Y|, \quad ba [|X| \mathfrak{L}(Y) + \mathfrak{L}(X) |Y|] \} \leq \\ \leq ba \mathfrak{L}(X) |Y| + \frac{b}{s+1} a |X| \sup \{ |Y|, \quad (s+1) \mathfrak{L}(Y) \},$$

и так как  $\frac{r+s+1}{s+1} \binom{r+s}{r} = \binom{r+s+1}{s+1}$  и т. д., то

$$(19) \quad |X^r \cup Y^s|^{\#} \leq (r+1) \binom{r+s+1}{r+1} \mathfrak{L}(X) |Y| + \\ + \binom{r+s+1}{r} |X| |Y|^{\#}.$$

Отсюда получаем

$$(20) \quad |X^r \cup Y^s|^{\#} \leq c_{rs} (|X|^{\#} |Y| + |X| |Y|^{\#}) \leq 2c_{rs} |X|^{\#} |Y|^{\#}.$$

При  $r = 0$  неравенства (18) и (19) дают

$$(21) \quad \mathfrak{L}(X^0 \cup Y^s) \leq |X| \mathfrak{L}(Y) + \mathfrak{L}(X) |Y|,$$

$$(22) \quad |X^0 \cup Y^s|^{\#} \leq (s+1) \mathfrak{L}(X) |Y| + |X| |Y|^{\#} \leq \\ \leq [|X| + (s+1) \mathfrak{L}(X)] |Y|^{\#} \leq (s+2) |X|^{\#} |Y|^{\#}.$$

Пример (b). Мы не можем в (22) уменьшить множитель  $s+1$ . Чтобы это показать, возьмем  $E^{s+1}$ ; пусть  $D_X(x^1, \dots) = x^1$  и пусть  $D_Y(p)$  имеет единственную отличную от нуля компоненту, равную единице. Тогда в некоторой окрестности  $R$  начала координат

$$\mathfrak{L}(X) = 1, \quad |Y| = 1, \quad |X \cup Y|^{\#} = (s+1)\mathfrak{L}(X \cup Y) = s+1,$$

и в то же время, когда окрестность  $R$  достаточно мала, произведение  $|X||Y|^{\#}$  сколь угодно мало.

Напомним (теорема 7D), что для любой дизной функции  $\varphi$  и любой бемольной коцепи  $X$

$$(23) \quad D_{\varphi X}(p) = \varphi(p) D_X(p) \quad \text{п. в.}$$

Мы покажем теперь, что произведение  $X \cup Y$ , в случае когда  $Y$  — нульмерная коцепь, находится в согласии с произведением из (VII, 1). Иными словами, если  $\varphi$  — любая дизная функция и  $\bar{\varphi}$  — соответствующая нульмерная коцепь ( $\bar{\varphi} \cdot p = \varphi(p)$ ), то для любой  $r$ -мерной коцепи  $X$ , дизной или бемольной,

$$(24) \quad \bar{\varphi} \cup X = X \cup \bar{\varphi} = \varphi X.$$

Положим  $W = \bar{\varphi} \cup X$ . В силу (7) и (23)

$$D_W = \varphi \vee D_X = \varphi D_X = D_{\varphi X} \quad \text{п. в.,}$$

и равенство (24) доказано.

Пусть даны дизная функция  $\varphi$  и бемольная коцепь  $X$ . Тогда, вспоминая, что  $|d\bar{\varphi}| = \mathfrak{L}_{\bar{\varphi}}$  [см. (V, 4.11)], из (24) и (16) получаем неравенство

$$(25) \quad |\varphi X|^b \leq |\varphi| |X|^b + \mathfrak{L}_{\bar{\varphi}} |X| \leq (|\varphi| + \mathfrak{L}_{\bar{\varphi}}) |X|^b,$$

являющееся усилением второго из неравенств (VII, 2.2). Первое из упомянутых неравенств следует из (22).

**15. Лебеговские цепи.** Мы обобщим результаты, полученные в (VI, 7). Пусть  $\alpha(p)$  — произвольная измеримая суммируемая  $r$ -вектор-функция в пространстве  $E^n$  (евклидовом и ориентированном); тогда ее компоненты  $\alpha^{\lambda}(p)$  суммируемы. Мы говорим, что  $\alpha$  соответствует бемольной цепи  $A = \tilde{\alpha}$ , если

$$(1) \quad \int_{E^n} D_X \cdot \alpha = X \cdot A \quad \text{для всех } r\text{-мерных бемольных коцепей } X$$

[мы могли бы, как в (VI, 7.1), пользоваться только дизными коцепями  $X$ ]. Мы будем называть  $\tilde{\alpha}$  *лебеговской цепью*.

Теорема 15А. *Отображение  $\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}$  является взаимно однозначным отображением множества классов эквивалентности функций  $\alpha$  в пространство  $C_r^b$ ; имеет место формула  $|\tilde{\alpha}| = \int_{E^n} \langle \alpha \rangle_0$ .*

Без существенных изменений проходит доказательство теоремы (VI, 7А); см. теорему (XI, 14А).

Отметим, что

$$(2) \quad |\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}| = |\tilde{\alpha}| + |\tilde{\beta}|, \text{ если } \text{car}(\alpha) \cap \text{car}(\beta) = 0.$$

В самом деле,

$$|\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}| = \int_{E^n} \langle \alpha + \beta \rangle_0 = \int_{\text{car}(\alpha)} \langle \alpha \rangle_0 + \int_{\text{car}(\beta)} \langle \beta \rangle_0 = |\tilde{\alpha}| + |\tilde{\beta}|.$$

Напомним (П. III, 6), что  $L^1$  есть пространство классов эквивалентности измеримых суммируемых функций с нормой  $\int_{E^n} \langle \varphi \rangle$ .

Теорема 15В. *Пусть  $E^n$  — евклидово ориентированное пространство. Условие*

$$(3) \quad \Phi \leftrightarrow \tilde{\alpha}, \quad \alpha(p) = \varphi(p) e_1 \dots e_n, \quad \varphi \in \Phi$$

*устанавливает взаимно однозначное соответствие между  $n$ -мерными бемольными цепями и элементами  $\Phi$  пространства  $L^1$ .*

Прежде всего множество  $\tilde{\alpha}$  плотно в  $C_n^b$  (VI, теорема 7А). Далее, так как  $|\tilde{\alpha}| = \int \langle \alpha_1 \dots \alpha_n \rangle$ , то масса, которая (поскольку  $r = n$ ) равна бемольной норме, совпадает с нормой в  $L^1$ . Так как  $L^1$  — полное пространство (П. III, 6), то  $\tilde{\alpha}$  дают все  $n$ -мерные цепи  $A$ .

При  $r = n$  формулу (1) мы можем записать в виде

$$(4) \quad X \cdot \tilde{\alpha} = \int_{E^n} \bar{D}_X \bar{\alpha}, \quad D_X(p) = \bar{D}_X(p) e^1 \dots e^n, \quad \alpha(p) = \bar{\alpha}(p) e_1 \dots e_n.$$

Теорема 15С. *Для любой  $n$ -мерной бемольной цепи  $A = \tilde{\alpha}$  в  $E^n$  существует такая  $n$ -мерная бемольная коцепь  $X$ , что*

$$(5) \quad |X| = 1, \quad X \cdot A = |A|.$$

Нам нужно только положить  $\bar{D}_X(p) = 1$  в тех точках, где  $\bar{\alpha}(p) > 0$ ,  $\bar{D}_X(p) = -1$  в точках, где  $\bar{\alpha}(p) < 0$ , и  $\bar{D}_X(p) = 0$  во всех остальных точках.

Отметим, что формула (VII, 2.8) справедлива для любой измеримой суммируемой  $r$ -вектор-функции  $\alpha$ ; применимо доказательство этой формулы, данное в (VII, 2).

**16. Произведения коцепей и цепей.** Возьмем для простоты  $R = E$ . Сначала с помощью формулы

$$(1) \quad X \cap \tilde{\alpha} = \tilde{\beta}, \quad \beta(p) = D_X(p) \wedge \alpha(p),$$

пользуясь внутренним произведением из (I, 7), мы определим  $\cap$ -произведение  $X \cap A$  бемольной  $s$ -мерной коцепи  $X$  и лебеговской  $(r+s)$ -мерной цепи  $A = \tilde{\alpha}$ . Так как  $r$ -вектор-функция  $\alpha$  суммируема, а форма  $D_X$  измерима и ограничена, то  $r$ -вектор-функция  $\beta$  суммируема, и поэтому  $\tilde{\beta}$  есть лебеговская  $r$ -мерная цепь; см. теорему 15A.

Покажем, что

$$(2) \quad Y^r \cdot (X^s \cap A^{r+s}) = (Y^r \cup X^s) \cdot A^{r+s},$$

сначала в случае, когда  $A = \tilde{\alpha}$  является лебеговской цепью. Мы пользуемся формулами (1), (15.1), (I, 7.1) и (14.7) и получаем

$$Y \cdot (X \cap \tilde{\alpha}) = \int D_Y \cdot (D_X \wedge \alpha) = \int (D_Y \vee D_X) \cdot \alpha = (Y \cup X) \cdot \tilde{\alpha}.$$

Теперь докажем, пока все еще для  $A = \tilde{\alpha}$ , что

$$(3) \quad |X^s \cap A^{r+s}|^b \leq \left[ \binom{r+s+1}{r+1} |X| + \binom{r+s+1}{r} |dX| \right] |A|^b,$$

$$(4) \quad |X^s \cap A^{r+s}|^b \leq 2c_{rs} |X|^b |A|^b,$$

$$(5) \quad |X^0 \cap A^r|^b \leq (|X| + |dX|) |A|^b \leq 2|X|^b |A|^b,$$

где числа  $c_{rs}$  определяются, как в (14.15). Чтобы доказать (3), возьмем любую  $r$ -мерную бемольную коцепь  $Y$ . В силу (2) и (14.13)

$$\begin{aligned} |Y \cdot (X \cap A)| &= |(Y \cup X) \cdot A| \leq |X \cup Y|^b |A|^b \leq \\ &\leq \left[ \binom{s+r+1}{s+1} |dX| + \binom{s+r+1}{s} |X| \right] |Y|^b |A|^b. \end{aligned}$$

Неравенство (3) теперь следует из (V, 4.3). Из неравенства (3) получаем (4). Последние два неравенства следуют из (14.16).

Теперь определим произведение  $X \cap A$  для любых бемольных  $X$  и  $A$ . Пусть  $A_1, A_2, \dots$  — последовательность непрерывных цепей,  $A_i \xrightarrow{b} A$  (VI, теорема 7A); положим

$$(6) \quad X \cap A = \lim_{i \rightarrow \infty} (X \cap A_i).$$

То, что этот предел существует и не зависит от выбора последовательности, сразу следует из (4). Теперь доказанные выше свойства непосредственно распространяются на случай бемольных цепей  $A$ .

Докажем, далее, неравенства

$$(7) \quad |X^s \cap A^{r+s}| \leq \binom{r+s}{r} |X| |A|,$$

$$(8) \quad |X^s \cap A^{r+s}| \leq |X| |A|, \text{ если } s=0, 1, n-1 \text{ или } n.$$

Чтобы доказать (7), возьмем любую  $r$ -мерную бемольную коцепь  $Y$ . Пользуясь (14.10), имеем

$$\begin{aligned} |Y \cdot (X \cap A)| &= |(Y \cup X) \cdot A| \leq |Y \cup X| |A| \leq \\ &\leq \binom{r+s}{r} |Y| |X| |A|, \end{aligned}$$

и неравенство (7) вытекает из теоремы (V, 16A). Чтобы доказать (8), следует воспользоваться неравенством (14.11).

Мы полагаем

$$(9) \quad X^s \cap A^t = 0, \text{ если } s > t.$$

Установим некоторые дальнейшие свойства произведений бемольных коцепей и цепей:

$$(10) \quad X \cap (Y \cap A) = (X \cup Y) \cap A,$$

$$(11) \quad \partial(X^s \cap A^{r+s}) = (-1)^r dX \cap A + X \cap \partial A,$$

$$(12) \quad I^0 \cap A = A, \quad I^0 \cdot (X^r \cap A^r) = X \cdot A,$$

где  $I^0$  — единичная нульмерная коцепь.

Чтобы доказать (10), возьмем любую бемольную коцепь  $Z$  лежащей размерности. Пользуясь ассоциативным законом для  $\cup$ -умножения, имеем

$$\begin{aligned} Z \cdot [X \cap (Y \cap A)] &= (Z \cup X) \cdot (Y \cap A) = [(Z \cup X) \cup Y] \cdot A = \\ &= [Z \cup (X \cup Y)] \cdot A = Z \cdot [(X \cup Y) \cap A] \end{aligned}$$

Если  $r=0$ , то обе части равенства (11) обращаются в нуль. Чтобы доказать (11) при  $r > 0$ , возьмем любую бемольную коцепь  $Y^{r-1}$  и воспользуемся формулой (14.8):

$$\begin{aligned} Y \cdot [\partial(X \cap A)] &= dY \cdot (X \cap A) = (dY \cup X) \cdot A = \\ &= [d(Y \cup X) - (-1)^{r-1} (Y \cup dX)] \cdot A = \\ &= (Y \cup X) \cdot \partial A + (-1)^r (Y \cup dX) \cdot A = \\ &= Y \cdot [X \cap \partial A + (-1)^r dX \cap A] \end{aligned}$$

Наконец, формулы (12) следуют из (14.9):

$$(13) \quad Y^s \cdot (I^0 \cap A^s) = (Y^s \cup I^0) \cdot A^s = Y^s \cdot A^s,$$

$$(14) \quad I^0 \cdot (X^r \cap A^r) = (I^0 \cup X^r) \cdot A^r = X^r \cdot A^r.$$

Допустим теперь, что  $X$  и  $A$  дизъюнктные. Сначала предположим, что  $A = \tilde{\alpha}$ ; тогда мы можем определить произведение  $X \cap A$ , как и прежде. Мы снова имеем равенство (2) и неравенства (7) и (8), а также

$$(15) \quad |X^s \cap A^{r+s}|^{\#} \leq \left[ \binom{r+s+1}{r+1} |X| + \binom{r+s+1}{r} (s+1) \mathfrak{L}(X) \right] |A|^{\#},$$

$$(16) \quad |X^s \cap A^{r+s}|^{\#} \leq 2c_{rs} |X|^{\#} |A|^{\#},$$

$$(17) \quad |X^0 \cap A^r|^{\#} \leq [|X| + (r+1) \mathfrak{L}(X)] |A|^{\#} \leq (r+2) |X|^{\#} |A|^{\#}.$$

Чтобы доказать (15), воспользуемся неравенством (14.19): для любой дизъюнктной коцепи  $Y^r$

$$\begin{aligned} Y \cdot (X \cap A) &= |(Y \cup X) \cdot A| \leq |Y \cup X|^{\#} |A|^{\#} \leq \\ &\leq \left[ (s+1) \binom{s+r+1}{s+1} \mathfrak{L}(X) + \binom{s+r+1}{s} |X| \right] |Y|^{\#} |A|^{\#}, \end{aligned}$$

откуда мы и получаем требуемый результат. Неравенство (16) следует из (15), а неравенство (17) доказывается с помощью неравенства (14.22).

Как и в § 14 для  $\cup$ -произведения, определение и установленные выше свойства произведения  $X \cap A$  теперь переносятся на случай любых дизъюнктных цепей  $A$ . Остаются справедливыми равенства (10) и (12), но, вообще говоря, равенство (11) теряет смысл, так как граница  $\partial A$  может быть не определена.

Для любой дизъюнктной функции  $\varphi$  и дизъюнктной или бемольной цепи  $A$ , пользуясь обозначениями, употреблявшимися в равенстве (14.24), из упомянутого равенства получаем

$$X \cdot \varphi A = \varphi X \cdot A = (X \cup \bar{\varphi}) \cdot A = X \cdot (\bar{\varphi} \cap A)$$

для любой  $r$ -мерной коцепи  $X$ , дизъюнктной или бемольной; поэтому

$$(18) \quad \varphi A = \bar{\varphi} \cap A.$$

Теперь неравенство (5) дает

$$(19) \quad |\varphi A|^b \leq (|\varphi| + \mathfrak{L}_{\varphi}) |A|^b,$$

это усиливает неравенство (VII, 1.5). Из (17) вновь получаем (VII, 1.4).

## 17. Произведения и слабые пределы. Докажем теорему:

Теорема 17А. Если пределы в правой части нижеследующего равенства существуют, то

$$(1) \quad \lim_{i, j \rightarrow \infty} \text{wkl}^b (X_i \cup Y_j) = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{wkl}^b X_i \cup \lim_{j \rightarrow \infty} \text{wkl}^b Y_j.$$

Пусть  $X, Y$  — пределы, стоящие в правой части равенства. Пусть, скажем,  $|X_i|^b, |Y_j|^b \leq N$ . Согласно (14.14), нам нужно только доказать, что для любого симплекса  $\sigma$  надлежащей размерности

$$(2) \quad \lim_{i, j \rightarrow \infty} [(X_i \cup Y_j) \cdot \sigma] = (X \cup Y) \cdot \sigma.$$

Мы докажем нашу теорему сначала в случае, когда  $X = 0$ .

Допустим сначала, что  $X$  — нульмерная коцепь. Лемма (V, 13b) показывает, что, если даны симплекс  $\sigma$  и число  $\varepsilon > 0$ , то мы можем выбрать номер  $i_0$  так, чтобы при  $i \geq i_0$  в некоторой окрестности  $U$  симплекса  $\sigma$  выполнялось неравенство  $|D_{X_i}(p)| \leq \varepsilon' = \varepsilon/(N|\sigma|)$ . Рассматривая коцепи только в  $U$ , мы, пользуясь в  $U$  неравенством (14.11), имеем

$$|(X_i \cup Y_j) \cdot \sigma| \leq |X_i| |Y_j| |\sigma| \leq \varepsilon' N |\sigma| = \varepsilon$$

при  $i \geq i_0$  и при любом  $j$ .

Допустим теперь, что  $X = X^r$ ,  $Y = Y^s$ ; мы воспользуемся индукцией по  $r$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  выберем  $\delta > 0$  так, чтобы было

$$\binom{r+s}{r} \delta N^2, \quad \binom{r+s}{r-1} \delta N^2 \leq \frac{\varepsilon}{3|\sigma|}.$$

Покроем  $\sigma$  открытыми шарами  $R_1, \dots, R_m$  радиуса  $\leq \delta$ . Пусть  $p_k$  — центр шара  $R_k$ . Как и в (VII, 10.2), определим  $(r-1)$ -мерную коцепь  $Z_{ik}$  в  $R_k$ , полагая

$$(3) \quad Z_{ik} \cdot \tau = X_i \cdot J(p_k, \tau);$$

тогда, пользуясь формулой (П. II, 10.3), мы получаем

$$(4) \quad |Z_{ik}| \leq \delta N, \quad |dZ_{ik}| \leq (1+\delta)N, \quad |X'_{ik}| \leq \delta N, \quad |dX'_{ik}| \leq N,$$

где  $X'_{ik} = X_i - dZ_{ik}$ . Мы можем разбить симплекс  $\sigma$  на такие клетки  $\sigma_k$ , что

$$\sigma = \sum \sigma_k, \quad \sigma_k \subset R_k$$

Так как  $\text{wkl}^b X_i = 0$ , то выписанные выше неравенства показывают, что  $\text{wkl}^b Z_{ik} = 0$  при каждом  $k$ . Следовательно, мы можем по предположению индукции найти такие  $i_0$  и  $j_0$ , что при каждом  $k$

$$|(Z_{ik} \cup Y_j) \cdot \partial \sigma_k| < \frac{\varepsilon}{3m}, \quad \text{если } i \geq i_0, j \geq j_0.$$

Теперь при  $i \geq i_0, j \geq j_0$  на основании (14.8) и (14.10) получаем

$$\begin{aligned} |(X_i \cup Y_j) \cdot \sigma| &= \left| \sum_k [X'_{ik} \cup Y_j \pm Z_{ik} \cup dY_j + d(Z_{ik} \cup Y_j)] \cdot \sigma_k \right| \leq \\ &\leq \sum_k [|X'_{ik} \cup Y_j| + |Z_{ik} \cup dY_j|] |\sigma_k| + \sum_k |(Z_{ik} \cup Y_j) \cdot \partial \sigma_k| \leq \\ &\leq \sum_k \left[ \binom{r+s}{r} |X'_{ik}| |Y_j| + \binom{r+s}{r-1} |Z_{ik}| |dY_j| \right] |\sigma_k| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Отбросим теперь предположение о том, что  $X=0$ . Пусть задано  $\varepsilon > 0$ ; из уже рассмотренного случая и из предположения о том, что  $\text{wkl}^b Y_j = Y$ , следует, что существуют такие числа  $i_0$  и  $j_0$ , что при  $i \geq i_0, j \geq j_0$

$$|(X_i - X) \cup Y_j| \cdot \sigma| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|Y_j \cdot (X \cap \sigma) - Y \cdot (X \cap \sigma)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим  $Y'_j = Y_j - Y$ . Тогда

$$|(X \cup Y'_j) \cdot \sigma| = |(Y'_j \cup X) \cdot \sigma| = |Y'_j \cdot (X \cap \sigma)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$(X_i \cup Y_j) \cdot \sigma - (X \cup Y) \cdot \sigma \leq |(X_i - X) \cup Y_j| \cdot \sigma| + |Y_j \cdot (X \cap \sigma) - Y \cdot (X \cap \sigma)| < \varepsilon.$$

В качестве приложения теоремы 17А докажем теорему:

**Теорема 17В.** Пусть  $X = X^r$  и  $Y = Y^s$  — бемольные ко-цепи в  $R$ . Тогда для любого подпространства  $P = P^t$  пространства  $E$ ,  $t \geq r + s$ , мы имеем

$$(5) \quad D_Z = D_X \vee D_Y \text{ п. в. в } P, \text{ если } Z = X \cup Y,$$

где мы пользуемся только поливекторами, лежащими в  $P$ . Для любого симплекса  $\sigma \in R$ , имеющего надлежащую размерность,

$$(6) \quad (X \cup Y) \cdot \sigma = \int_{\sigma} D_Z = \int_{\sigma} D_X \vee D_Y.$$

Заметим, что (5) прямо из (14.7) не следует; мы знаем только, что  $D_Z = D_X \vee D_Y$  п. в. в  $R$ .

Если мы докажем равенство (6) для любого симплекса  $\sigma$  в  $P$ , то из него, так же как в доказательстве теоремы 7B, будет вытекать равенство (5).

Выберем последовательность векторов  $v_1, v_2, \dots \rightarrow 0$ , для которой  $D_Z = D_X \vee D_Y$  п. в. в каждой плоскости  $T_{v_i} P'$ , где  $P' = P(\sigma)$ . Пусть  $X_i^*$  — коцепь в части плоскости  $P'$ , определяемая условием

$$X_i^* \cdot \tau = X \cdot T_{v_i} \tau, \quad \tau \subset P' \cap T_{-v_i} R.$$

Пусть  $X_{P'}$  есть коцепь  $X$ , рассматриваемая только на множестве  $P' \cap R$ . Подобным же образом определим коцепи  $Y_i^*$ ,  $Y_{P'}$ . Из (V, 3.6) ясно, что в любом множестве  $P' \cap \text{int}_p(R)$

$$\text{wkl}^b X_i^* = X_{P'}, \quad \text{wkl}^b Y_i^* = Y_{P'}.$$

В силу определения (14.7) произведения  $W = X_{P'} \cup Y_{P'}$  мы имеем  $D_W = D_{X_{P'}} \vee D_{Y_{P'}}$  п. в. в  $P' \cap R$  и поэтому п. в. в  $\sigma$ . Следовательно,

$$(X_{P'} \cup Y_{P'}) \cdot \sigma = \int_{\sigma} D_{X_{P'}} \vee D_{Y_{P'}} = \int_{\sigma} D_X \vee D_Y.$$

В силу (1) это равно также

$$\lim_{T_{v_i} \sigma} [(X_i^* \cup Y_i^*) \cdot \sigma] = \lim_{T_{v_i} \sigma} \int D_X \vee D_Y = \lim_{T_{v_i} \sigma} \int D_Z = \lim_{T_{v_i} \sigma} Z \cdot T_{v_i} \sigma = Z \cdot \sigma,$$

как и требовалось.

Заметим, что равенство (5) эквивалентно соотношению

$$(7) \quad (X \cup Y)_P = X_P \cup Y_P,$$

которое следует также из (X, 11.1), если в качестве  $f$  взять тождественное отображение подпространства  $P$  в  $E$ .

### 18. Характеризация произведений. Докажем теорему:

**Теорема 18A.**  $\cup$ -произведение бемольных коцепей в произвольном открытом множестве  $R$  характеризуется следующими свойствами:

(а) Для любых бемольных коцепей  $X^r$ ,  $Y^s$  произведение  $X^r \cup Y^s$  есть  $(r+s)$ -мерная бемольная коцепь в  $R$ ; эта операция билинейна.

(б) Существуют такие числа  $a_{rs}$ , что

$$|X^r \cup Y^s| \leq a_{rs} |X^r| |Y^s|.$$

(с)  $X^0 \cup Y^s = D_{X^0} Y^s$  при  $r=0$ , как в (14.24).

(d)  $d(X^r \cup Y^s) = dX^r \cup Y^s + (-1)^r X^r \cup dY^s$ .

Из § 14 мы знаем, что эти произведения существуют; мы должны доказать единственность. В силу (с) единственность имеет место при  $r=0$ ; воспользуемся индукцией по  $r$ .

Предположим сначала, что  $X = dZ$  есть кограница. Тогда, применяя формулу (d) к  $Z \cup Y$ , получаем

$$X \cup Y = d(Z \cup Y) - (-1)^{r-1} Z \cup dY;$$

правая часть в силу предположения индукции определяется единственным образом.

Теперь возьмем любую бемольную коцепь  $X$ . Возьмем произвольный симплекс  $\sigma = \sigma^{r+s}$ . Для каждого достаточно большого натурального числа  $i$  мы можем выбрать в  $R$  шары  $R_{i1}, \dots, R_{im_i}$  радиуса  $1/2^i$ , покрывающие симплекс  $\sigma$ ; запишем  $\sigma = \sum_k \sigma_{ik}$ ,  $\sigma_{ik} \subset R_{ik}$ .

Определим  $Z_{ik}$ ,  $X'_{ik}$ , как в § 17. Тогда, так как  $|X'_{ik}| \leq |dX|/2^i$  [см. (17.4)], мы имеем

$$\left| \sum_k (dZ_{ik} \cup Y) \cdot \sigma_{ik} - (X \cup Y) \cdot \sigma \right| = \left| \sum_k [(dZ_{ik} - X) \cup Y] \cdot \sigma_{ik} \right| \leq \\ \leq \sum_k a_{rs} |X'_{ik}| |Y| |\sigma_{ik}| \leq a_{rs} |dX| |Y| \frac{|\sigma|}{2^i},$$

и правая часть  $\rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ . Следовательно,

$$(1) \quad (X \cup Y) \cdot \sigma = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_k (dZ_{ik} \cup Y) \cdot \sigma_{ik},$$

и из единственности правой части равенства следует единственность левой части.

Отметим, что так как  $|Z_{ik}| \leq |X|/2^i$ , то мы можем также написать

$$(2) \quad (X \cup Y) \cdot \sigma = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_k d(Z_{ik} \cup Y) \cdot \sigma_{ik}.$$

**Замечание.** Мы можем дать прямое доказательство существования произведений, основанное на индукции, с помощью формулы (2). Сначала следует доказать существование предела, затем свойства (b) и (d), а затем найти число, ограничивающее  $|d(X \cup Y)|$ , тем самым доказав, что  $X \cup Y$  есть бемольная коцепь; тогда можно будет доказать также обычные свойства произведений. Этот метод доказательства является довольно трудоемким и не приводит к настолько же малым значениям для  $a_{rs}$ , как в (14.10).

## Х. Липшицевские отображения

В приложениях область интегрирования очень часто представляет собой ориентированную дугу, кусок поверхности или вообще ориентированный кусок  $r$ -мерного многообразия в  $E^m$ . Предметом этой главы в первую очередь является представление таких областей в качестве цепей. Если  $A$  — полиэдральная цепь, а  $f$  — липшицевское отображение (II, 4) полиэдра  $P = \text{spt}(A)$  в  $E^m$ , то  $fA$  есть „липшицевская цепь“ (которая является бемольной, а поэтому и дизонной). Область указанного выше вида (если она компактна) представляет собой типичный случай.

Пусть, в более общем случае,  $f$  — липшицевское отображение открытого множества  $R \subset E^n$  в открытое множество  $S \subset E^m$ . Тогда всякая полиэдральная цепь  $A$  в  $R$  дает некоторую липшицевскую цепь  $fA$  в  $S$ ; тем самым для каждой бемольной цепи  $A$  множества  $R$  определяется бемольная цепь  $fA$  множества  $S$  при условии, что  $f$  переводит носитель цепи  $A$  в множество, замыкание которого содержится в  $S$ . Для каждой бемольной коцепи  $X$  в  $S$ , полагая  $f^*X \cdot A = X \cdot fA$  для описанных выше цепей  $A$  множества  $R$ , мы определяем бемольную коцепь  $f^*X$  в  $R$ . Кроме того, бемольные формы в  $S$  переходят в бемольные формы в  $R$ . Рассматривается поведение произведений при этих отображениях и некоторые другие вопросы различного характера.

В первой части главы мы изучаем упомянутые выше липшицевские цепи. Возьмем мелкое подразделение  $\sum \sigma_k$  полиэдра  $P$ , и пусть  $f'$  — отображение, совпадающее с  $f$  в вершинах симплексов подразделения и аффинное в каждом симплексе  $\sigma_k$ . Мы должны потребовать, чтобы симплексы  $\sigma_k$  имели приемлемую форму; см. пример Шварца, упомянутый в (IV, 14). Тогда образы  $f'\sigma_k$  будут, вообще говоря, близки к  $f\sigma_k$  и по положению и по направлению, и полиэдральная цепь  $f'A$  будет аппроксимировать нужную нам цепь  $fA$ . Мы по определению полагаем  $fA = \lim^b f_i A$  для последовательности таких аппроксимирующих отображений  $f_i$ . Чтобы показать, что норма  $|f_i A - f_j A|^b$  при больших  $i, j$  мала, продеформируем  $f_i$  в  $f_j$  вдоль прямолинейных отрезков; тем самым будет определено отображение  $F$  декартова произведения  $I \times P$  в  $E^m$  ( $I$  — единичный отрезок). Образ  $F(I \times P)$ , вообще говоря, не будет полиэдром; но с помощью симплексно-аффинного ото-

бражения  $F'$ , аппроксимирующего  $F$ , мы получаем полиэдральные цепи  $F'(I \times \dot{A})$ ,  $F'(I \times \partial A)$  малой массы, которыми можно воспользоваться для получения нужного результата.

Затем мы рассматриваем липшицевские отображения  $f$  открытых множеств (см. выше). Если  $f$  отображает пространство  $E^n$  в  $E^m$ , то нам не нужны рассуждения гл. VIII; но в общем случае доказательства значительно сложнее. Для того чтобы привести пример ситуации, с которой мы здесь встречаемся, возьмем в качестве  $R$  множество всех точек плоскости, полярные координаты  $(r, \theta)$  которых удовлетворяют условиям  $0 < \theta < 2\pi$ ,  $r > 0$ ; положим  $f(r, \theta) = (r, \theta/2)$ . Это отображение не является липшицевским; в самом деле, точки  $(1, \theta)$ ,  $(1, 2\pi - \theta)$  при достаточно малом  $\theta$  близки, но отображаются они в точки, далекие одна от другой. Однако если мы введем в  $R$  новую метрику, взяв в качестве расстояния между двумя точками нижнюю грань длин кривых, лежащих в  $R$  и соединяющих эти две точки, то в этой метрике отображение  $f$  становится липшицевским; мы говорим, что отображение  $f$  является „ $R$ -липшицевским“. Если эти условия выполняются, то бемольные цепи  $A$  множества  $R$ , как было указано выше, переходят в бемольные цепи  $fA$  множества  $S$ . Помимо обычных свойств отображений, мы приводим теорему о непрерывности. Легко построить теорию коцепей  $f^*X$  для бемольных коцепей  $X$  в  $S$ .

Пусть  $\omega$  — бемольная  $r$ -форма в  $S$ . Тогда существует соответствующая  $r$ -мерная бемольная коцепь  $X$  в  $S$ , которая дает бемольную коцепь  $X^* = f^*X$  в  $R$ ; последней в свою очередь соответствует некоторая бемольная форма  $D_{X^*}$  в  $R$ , которую мы обозначаем через  $f^*\omega$ . Это отображение  $f^*$  обладает требуемыми свойствами, в частности  $df^*\omega = f^*d\omega$ . В обычной аналитической формулировке и  $\omega$  и  $f$  предполагаются дифференцируемыми. Хотя и нельзя ожидать, что аналитическая формула для  $f^*\omega$  будет иметь смысл для произвольной бемольной формы  $\omega$ , мы докажем (теорема 9B), что если мы заменим  $\omega$  эквивалентной бемольной формой  $D_X$ , то эта формула действительно будет определять  $f^*\omega$  п. в.

Если  $f$  — гладкое отображение и его первые частные производные удовлетворяют условию Липшица, то, как легко видеть, если форма  $\omega$  является дизной, то дизной будет и форма  $f^*\omega$ . Это неверно для отображений  $f$  более общего вида. Пусть, например,  $f$  отображает  $E^1$  в  $E^1$  и задается формулами  $f(x) = x^{3/2}$  ( $x > 0$ ),  $f(x) = 0$  ( $x \leq 0$ ). Пусть  $\omega$  — единичная 1-форма в  $E^1$ . Тогда, если  $e$  — единичный вектор в  $E^1$ , то

$$f^*\omega(x) \cdot e = \omega(f(x)) \cdot \nabla f(x, e) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{3}{2} x^{1/2}, \quad x > 0,$$

и  $f^*\omega(x) \cdot e = 0$  при  $x \leq 0$ . Таким образом, форма  $f^*\omega$  непрерывна, но не удовлетворяет условию Липшица.

В § 11 мы доказываем, что  $f^*(X \cup Y) = f^*X \cup f^*Y$  [частный случай  $\dim(X) = 0$  рассматривается в § 10]. В доказательстве мы пользуемся теоремой 9А, а также теоремой о слабых пределах из параграфа (IX, 17). Легко устанавливаются остальные свойства  $\cup$ - и  $\cap$ -произведений.

В § 12 выводится формула для нормы липшицевской цепи; в § 13 мы приводим усовершенствованный вариант теоремы о непрерывности из § 5.

**Замечание.** Без предположения о том, что  $f$  — липшицевское отображение, результаты, излагаемые в этой главе, получить нельзя. Например, существует кривая  $C$  на плоскости  $E^2$  и такая гладкая функция  $\varphi$  в  $E^2$ , что разность  $\varphi(q) - \varphi(p)$  ( $p, q \in C$ ) не может быть получена <sup>1)</sup> путем интегрирования производной функции  $\varphi$  вдоль  $C$ .

### 1. Аффинная аппроксимация липшицевских отображений.

Пусть  $K$  — симплицальный комплекс и  $f$  — отображение комплекса  $K$  в  $E^m$ . Соответствующим симплексно-аффинным отображением, аппроксимирующим отображение  $f$ , называется отображение  $f'$ , совпадающее с  $f$  в каждой вершине комплекса  $K$  и аффинное в каждом симплексе из  $K$  (П. I, 12). Если  $p_1, p_2, \dots$  — вершины комплекса  $K$  и  $\mu_1, \mu_2, \dots$  — барицентрические координаты (П. II, 2), то  $f'$  определяется формулой

$$(1) \quad f'(\sum \mu_i p_i) = \sum \mu_i f(p_i).$$

Напомним (П. I, 12.4), что

$$(2) \quad f'(q) - f'(p) = \nabla f'(p^*, q - p) \text{ в каждом симплексе из } K$$

и что дифференциал  $\nabla f'$  в каждом симплексе постоянен.

Мы хотим, в случае когда комплекс  $K$  сам является симплексом  $\sigma$ , установить связь между константами Липшица  $\mathfrak{L}_{f'}$  (II, 4) и  $\mathfrak{L}_f$ .

**Лемма 1а.** Если  $f'$  — аффинное отображение, аппроксимирующее отображение  $f$  в  $r$ -мерном симплексе  $\sigma$ , то

$$(3) \quad \mathfrak{L}_{f'} \leq \frac{\mathfrak{L}_f}{(r-1)! \theta(\sigma)}.$$

<sup>1)</sup> Whitney H., A function not constant on a connected set of critical points, *Duke Math. J.*, 1 (1935), 514—517.

**Замечание.** При более тщательном анализе (изучая отрезки в  $\sigma$  максимальной длины в каждом направлении) мы сумели бы заменить в (3)  $(r-1)!$  на  $r!$ .

Так как  $f'$  — аффинное отображение, то нам нужно только доказать, что

$$|\nabla f'(p^*, u)| \leq \frac{\mathfrak{L}_f |u|}{(r-1)! \Theta(\sigma)}, \quad p^* \in \text{int}(\sigma),$$

для любого вектора  $u$  в  $\sigma$ . Пусть, скажем,

$$\sigma = p_0 \dots p_r, \quad u_i = \frac{p_i - p_0}{|p_i - p_0|}, \quad u = \sum a_i u_i.$$

В силу (2) и (IV, 15.3)

$$|\nabla f'(p^*, u_i)| = \frac{|f(p_i) - f(p_0)|}{|p_i - p_0|} \leq \mathfrak{L}_f,$$

$$|a_i| \leq \frac{|u|}{r! \Theta(\sigma)} \quad (\text{для всех } i).$$

Поэтому

$$|\nabla f'(p^*, u)| = \left| \sum a_i \nabla f'(p^*, u_i) \right| \leq \frac{r \mathfrak{L}_f |u|}{r! \Theta(\sigma)}.$$

**Пример.** Пусть  $\sigma$  — треугольник в плоскости  $(x, y)$  с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(1, \varepsilon)$ ,  $(2, 0)$ , и пусть  $f$  отображает эти вершины в точки  $(0, 0)$ ,  $(1, \varepsilon)$ ,  $(1, 0)$ . Мы можем таким образом продолжить отображение  $f$  на  $\sigma$ , что  $\mathfrak{L}_f = 1$  (следует спроектировать точки, лежащие справа от прямой  $x=1$ , на эту прямую). Очевидно,  $\mathfrak{L}_{f'} \geq 1/(2\varepsilon)$ .

На основании (II, 6.1), (II, 4.1), (I, 12.16) и (II, 14.15) мы имеем неравенство для  $r$ -вектора-якобиана

$$(4) \quad |J_f(p)| \leq \mathfrak{L}_f^r.$$

Применяя это неравенство к  $f'$  и пользуясь неравенством (3), получаем

$$(5) \quad |J_{f'}(p)| \leq \mathfrak{L}_{f'}^r \leq \frac{\mathfrak{L}_f^r}{[(r-1)! \Theta(\sigma)]^r} \quad \text{в } r\text{-мерных симплексах.}$$

**2. Аппроксимация на ребрах симплекса.** Мы покажем, что если производная  $\nabla_v f$  почти постоянна в большей части симплекса, то вершины отображаются почти так, как следует ожидать по значениям  $\nabla_v f$ . В силу теоремы (IX, 11B), если  $f$  — липшицевское отображение, то дифференциал  $\nabla f$  существует п. в. и является измеримым.

Лемма 2а. Пусть  $f$  — липшицевское отображение  $r$ -мерного симплекса  $\sigma$  в  $E^n$ . Пусть  $Q$  — измеримое подмножество симплекса  $\sigma$ , в котором существует  $\nabla f$ , и пусть  $\rho$  — такое число, что

$$(1) \quad |\sigma \setminus Q| \leq \rho^r |\sigma|, \quad 0 < \rho < 1,$$

$$(2) \quad |\nabla f(q) - \nabla f(p)| \leq \rho \mathfrak{L}_f, \quad \text{если } p, q \in Q.$$

Тогда для любого ребра  $p_i p_j$  симплекса  $\sigma$

$$(3) \quad |f(p_j) - f(p_i) - \nabla f(p^*, p_j - p_i)| < 6\rho \mathfrak{L}_f \delta, \quad \text{если } p^* \in Q,$$

где  $\delta = \text{diam}(\sigma)$ .

Предположим сначала, что  $r \geq 2$ . Пусть

$$\sigma^1 = p_i p_j, \quad \sigma' \text{ — противоположная } (r-2)\text{-мерная грань.}$$

Для любого  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , пусть  $\tau_t$  — множество всех точек

$$p = (1-t)q + tq', \quad q \in \sigma^1, \quad q' \in \sigma'.$$

Часть множества  $\tau_t$ , соответствующая фиксированной точке  $q$ , является  $(r-2)$ -мерным симплексом, подобным симплексу  $\sigma'$  и имеющим объем  $t^{r-2}|\sigma'|$ , а часть множества  $\tau_t$ , соответствующая фиксированной точке  $q'$ , является одномерным симплексом длины  $(1-t)|\sigma^1|$ ; поэтому

$$|\tau_t| = a(1-t)t^{r-2},$$

где  $a$  не зависит от  $t$ . Таким образом, если  $\sigma_t$  — часть симплекса  $\sigma$ , заполняемая множествами  $\tau_s$  при  $0 \leq s \leq t$ , то

$$|\sigma_t| = b \int_0^t |\tau_s| ds = ab \left[ \frac{t^{r-1}}{r-1} - \frac{t^r}{r} \right].$$

При  $t=1$  мы имеем  $|\sigma| = |\sigma_1| = ab/[r(r-1)]$ ; следовательно,

$$(4) \quad |\sigma_t| = [rt^{r-1} - (r-1)t^r]|\sigma| = [1 + (r-1)(1-t)]t^{r-1}|\sigma|.$$

Отсюда

$$(5) \quad |\sigma_t| > t^{r-1}|\sigma|, \quad \text{если } t < 1.$$

Сопоставляя это с (1), получаем

$$(6) \quad |\sigma_\rho \cap H| \leq |H| < \rho |\sigma_\rho|,$$

где  $H = \sigma \setminus Q$ .

Положим

$$\sigma^{r-1} = p_i \sigma', \quad \tau^* = \sigma^{r-1} \cap \sigma_\rho.$$

Для каждой точки  $p \in \tau^*$  прямая, проведенная через  $p$  параллельно ребру  $\sigma^1$ , высекает из симплекса  $\sigma$  некоторый отрезок  $I_p$ ; эти отрезки заполняют множество  $\sigma_p$ . Пусть, скажем,

$$|I_p \cap H| = \theta(p) |I_p| \quad (\text{функция } \theta \text{ определена п. в. в } \tau^*).$$

Пусть, далее,  $\tau'$  — проекция множества  $\tau^*$  на плоскость, перпендикулярную к  $\sigma^1$ . Тогда, пользуясь мерой в  $\tau'$  вместо меры в  $\tau^*$ , имеем

$$\frac{\int_{\tau^*} \theta(p) |I_p| dp}{\int_{\tau^*} \rho |I_p| dp} = \frac{|H \cap \sigma_p|}{\rho |\sigma_p|} < 1;$$

поэтому  $\theta(p) < \rho$  в некотором подмножестве множества  $\tau^*$ , имеющем положительную меру, и мы можем выбрать такую точку  $p' \in \tau^*$ , что

$$(7) \quad |I_{p'} \cap H| < \rho |I_{p'}|$$

и дифференциал  $\nabla f$  определен п. в. в  $I_{p'}$ .

Пусть, скажем,

$$v = p_j - p_i, \quad I_{p'} = p' p'', \quad v' = p'' - p';$$

тогда при  $p^* \in Q$  формула (II, 1.3) дает

$$|f(p'') - f(p') - \nabla f(p^*, v')| \leq \int_0^1 |\nabla f(p'_t, v') - \nabla f(p^*, v')| dt,$$

где  $p'_t = p' + t v'$ . Разбивая интеграл на две части  $\int_1$  и  $\int_2$ , соответствующие тем  $t$ , для которых  $p'_t \in Q$  и соответственно  $p'_t \in H$ , из неравенства (2) мы получаем

$$\int_1 \leq \rho \mathfrak{L}_f |v'| \leq \rho \mathfrak{L}_f \delta,$$

в то время как в силу неравенства (7),

$$\int_2 \leq \frac{2 \mathfrak{L}_f |v'| |I_{p'} \cap H|}{|I_{p'}|} < 2 \mathfrak{L}_f \delta \rho.$$

Таким образом,

$$(8) \quad |f(p'') - f(p') - \nabla f(p^*, v')| < 3 \rho \mathfrak{L}_f \delta, \quad p^* \in Q.$$

Пусть, скажем,  $p' = (1 - t') p_i + t' q'$ ,  $q' \in \sigma'$ . Тогда

$$v' = (1 - t') v, \quad |v - v'| = t' |v| \leq \rho \delta.$$

Следовательно,

$$|\nabla f(p^*, v') - \nabla f(p^*, v)| \leq |\nabla f(p^*)| |v' - v| \leq \mathfrak{L}_f \rho \delta.$$

Кроме того,  $|p' - p_i| \leq \rho \delta$  и т. д., поэтому

$$|f(p_i) - f(p')| \leq \mathfrak{L}_f \rho \delta, \quad |f(p_j) - f(p'')| \leq \mathfrak{L}_f \rho \delta.$$

Из этих неравенств вытекает (3).

Если  $r = 1$  и, скажем,  $\sigma = p'p''$ , то мы можем применить неравенство (8).

**3. Аппроксимация якобиана.** Пользуясь леммой 2а, мы можем установить связь между якобианами (II, 6)  $J_f$  и  $J_{f'}$ :

*Лемма 3а. Предположим, что выполняются условия леммы 2а, и пусть  $f'$  — аффинное отображение, аппроксимирующее  $f$ . Тогда*

$$(1) \quad |J_{f'}(p^*) - J_f(p^*)|_0 \leq \frac{6\rho \mathfrak{L}_f^r}{(r-1)! \Theta(\sigma)}, \quad p^* \in Q.$$

Положим [см. (1.2)]

$$\sigma = p_0 \dots p_r, \quad v_i = p_i - p_0, \quad u_i = \nabla f(p^*, v_i),$$

$$w_i = f(p_i) - f(p_0) = \nabla f'(p^*, v_i).$$

В силу (2.3)

$$|w_i - u_i| < 6\rho \mathfrak{L}_f \delta, \quad |u_i| \leq \mathfrak{L}_f \delta, \quad |w_i| \leq \mathfrak{L}_f \delta;$$

поэтому в силу (I, 13.9) и доказательства неравенства (I, 12.17)

$$|w_1 \vee \dots \vee w_r - u_1 \vee \dots \vee u_r|_0 < 6r\rho \mathfrak{L}_f^r \delta^r.$$

На основании (III, 1.2)  $r$ -направлением симплекса  $\sigma$  является

$$\alpha_0 = \frac{v_1 \vee \dots \vee v_r}{r! |\sigma|}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |J_{f'}(p^*) - J_f(p^*)|_0 &= \frac{|\nabla f'(p^*, v_1 \vee \dots \vee v_r) - \nabla f(p^*, v_1 \vee \dots \vee v_r)|_0}{r! |\sigma|} = \\ &= \frac{|w_1 \vee \dots \vee w_r - u_1 \vee \dots \vee u_r|_0}{r! |\sigma|} < \frac{6r\rho \mathfrak{L}_f^r \delta^r}{(r-1)! |\sigma|}, \end{aligned}$$

откуда и следует (1).

**4. Объем и аффинная аппроксимация.** Определение  $r$ -мерного объема „кубируемого  $r$ -мерного многообразия“ можно дать, например, с помощью интегрирования модуля якобиана или же с помощью нахождения предела объемов аппроксимирующих полиэдров.

Мы покажем, что эти определения равносильны<sup>1)</sup>; см. ниже неравенство (7).

Прежде всего заметим, что для симплексов (или для выпуклых клеток)  $\sigma$

$$(1) \quad \{g\sigma\} = |\sigma| J_g(p), \quad |g\sigma| = |J_g(p)| |\sigma|,$$

если  $g$  — аффинное отображение,

где  $p$  — произвольная точка из  $\text{int}(\sigma)$ . В самом деле, определяя  $v_i$  и  $w_i$ , как в лемме 3а, имеем

$$\begin{aligned} r! \{g\sigma\} &= w_1 \vee \dots \vee w_r = \nabla g(p, v_1 \vee \dots \vee v_r) = \\ &= \nabla g(p, r! \{\sigma\}) = r! |\sigma| J_g(p). \end{aligned}$$

Поэтому также [первый интеграл принимает значения в  $V_{[r]}$ ; ср. (I, 19.2)]

$$(2) \quad \int_{\sigma} J_g(p) dp = \{g\sigma\}, \quad \int_{\sigma} |J_g(p)| dp = |g\sigma|,$$

если  $g$  — аффинное отображение.

**Лемма 4а.** Пусть  $f$  — липшицевское отображение ориентированного  $r$ -мерного полиэдра  $P \subset E^s$  в  $E^n$ . Тогда для любых чисел  $\eta > 0$  и  $\varepsilon > 0$  существует число  $\zeta > 0$ , обладающее следующим свойством. Пусть  $\sum \sigma_k$  — произвольное симплициальное разбиение полиэдра  $P$ , имеющее полноту  $\geq \eta$  и степень мелкости  $\leq \zeta$ , и пусть  $f'$  — соответствующее симплексно-аффинное отображение, аппроксимирующее  $f$ . Тогда

$$(3) \quad \int_P |J_{f'}(p) - J_f(p)|_0 dp < \varepsilon,$$

$$(4) \quad \sum_k \left| \{f' \sigma_k\} - \int_{\sigma_k} J_f(p) dp \right|_0 < \varepsilon,$$

$$(5) \quad \left| \{f' P\} - \int_P J_f(p) dp \right|_0 < \varepsilon,$$

$$(6) \quad \sum_k \left| |f' \sigma_k| - \int_{\sigma_k} |J_f(p)| dp \right| < \varepsilon,$$

$$(7) \quad \left| |f'(P)| - \int_P |J_f(p)| dp \right| < \varepsilon.$$

<sup>1)</sup> Это — обычная теорема в теории площадей. См., например (для  $r=2, n=3$ ), Rademacher H., Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen [II, *Math. Ann.*, 81 (1920), 52—63.

Мы докажем неравенство (3); остальные неравенства сразу из него следуют. Мы можем считать, что  $P$  — некоторая клетка. Выберем такое число  $\rho < 1$ , что

$$(8) \quad \frac{6\rho \mathfrak{L}_f^r |P|}{(r-1)! \eta} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{2\rho^r \mathfrak{L}_f^r |P|}{[(r-1)! \eta]^r} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим

$$(9) \quad \zeta' = \frac{[(r-1)! \eta]^r \rho^r \varepsilon}{6\mathfrak{L}_f^r}.$$

Так как дифференциал  $\nabla f$  измерим (IX, теорема 11B), то мы можем по теореме Лузина найти такое замкнутое подмножество  $Q \subset P$ , что

$$(10) \quad |P \setminus Q| < \zeta', \quad \nabla f \text{ непрерывен в } Q.$$

Выберем такое число  $\zeta > 0$ , что

$$(11) \quad |\nabla f(q) - \nabla f(p)| \leq \rho \mathfrak{L}_f, \quad \text{если } p, q \in Q, |q - p| \leq \zeta.$$

Допустим теперь, что  $P = \sum \sigma_k$ , как требуется в лемме. Перенумеруем симплексы  $\sigma_k$  таким образом, что если  $H = P \setminus Q$ , то

$$(12) \quad |\sigma_k \cap H| \leq \rho^r |\sigma_k| \quad \text{при } k = 1, \dots, m,$$

и это неравенство не выполняется при  $k > m$ . Положим

$$(13) \quad P' = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_m, \quad P'' = \sigma_{m+1} \cup \dots$$

При любом  $k \leq m$  симплекс  $\sigma_k$  удовлетворяет условиям леммы 2а. Поэтому мы можем воспользоваться неравенством (3.1), которое вместе с (8) дает

$$\int_{\sigma_k \cap Q} |J_{f'} - J_f|_0 \leq \frac{\varepsilon |\sigma_k|}{3 |P|}, \quad k \leq m.$$

В силу (1.5), (1.4) [мы можем считать, что  $(r-1)! \eta \leq 1$ , см. (IV, 14.3)], (12) и (8)

$$\int_{\sigma_k \cap H} |J_{f'} - J_f|_0 \leq \frac{2\rho^r |\sigma_k| \mathfrak{L}_f^r}{[(r-1)! \eta]^r} \leq \frac{\varepsilon |\sigma_k|}{3P} \quad \text{при } k \leq m.$$

Поэтому

$$\int_{P'} |J_{f'} - J_f|_0 \leq \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Из определения множества  $P''$  и из неравенства (10) следует, что

$$\rho^r |P''| = \sum_{k > m} \rho^r |\sigma_k| < \sum_{k > m} |\sigma_k \cap H| \leq |H| < \zeta'.$$

Поэтому в силу (9)

$$\int_{P^n} |J_{f'} - J_f|_0 < \frac{2 \left( \frac{\zeta'}{\rho^r} \right) \mathfrak{L}_f^r}{[(r-1)! \eta]^r} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, неравенство (3) выполняется.

**5. Лемма о непрерывности.** Мы обобщим неравенство (V, 3.6); см. также теоремы 6B, 13A и 7B. Если  $f$  и  $g$  имеют одну и ту же область определения  $Q$ , то мы полагаем

$$(1) \quad \delta_{f,g} = \sup \{ |g(p) - f(p)| : p \in Q \}.$$

Пусть  $f$  — аффинное отображение  $r$ -мерного ориентированного симплекса  $\sigma$  в  $E^n$ . Тогда образ  $f\sigma$  является ориентированным симплексом (быть может, вырождающимся) и поэтому  $r$ -мерной цепью в  $E^n$ . Если  $A = \sum a_i \sigma_i^r$  — некоторая полиэдральная цепь, а  $f$  — отображение, аффинное в каждом симплексе  $\sigma_i^r$ , то  $fA = \sum a_i f\sigma_i^r$  есть полиэдральная цепь в  $E^n$ . Мы обобщим это в § 6.

**Лемма 5а.** Пусть  $P$  — полиэдр, представленный в виде симплициального разбиения с симплексами  $\sigma_k^s$ , и пусть

$$(2) \quad f_0 \text{ и } f_1 \text{ — два отображения полиэдра } P \text{ в } E^n, \text{ аффинные в каждом симплексе } \sigma_k^s.$$

Предположим, что

$$(3) \quad \mathfrak{L}_{f_0} \text{ и } \mathfrak{L}_{f_1} \leq L \text{ в каждом симплексе } \sigma_k^s.$$

Тогда для любой цепи  $A = \sum a_i \sigma_i^r$

$$(4) \quad |f_1 A - f_0 A|^b \leq \delta_{f_0, f_1} (L^r |A| + L^{r-1} |\partial A|).$$

Если точки  $F(t, p)$  в (5) лежат в открытом множестве  $S$ , то в (4) мы можем взять норму  $|f_1 A - f_0 A|^b$  вместо нормы  $|f_1 A - f_0 A|^b$ .

Положим

$$(5) \quad F(t, p) = (1-t)f_0(p) + tf_1(p), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad p \in P.$$

Это — липшицевское отображение декартова произведения  $I \times P$  ( $I$  — единичный отрезок) в  $E^n$ . Пусть  $e_0$  — единичный вектор, идущий вдоль  $I$ . Пусть, далее, дан произвольный симплекс  $\sigma_k^s$ , и пусть  $e_1, \dots, e_s$  — ортонормальная система в  $\sigma_k^s$ . Тогда  $e_0, e_1, \dots, e_s$  будет

ортонормальной системой в  $I \times \sigma_k^s$ . Возьмем точку  $p \in \text{int}(\sigma_k^s)$ . Полагая  $\delta = \delta_{f_0, f_1}$ , мы при  $i > 0$  имеем  $|\nabla f_j(p, e_i)| \leq L$ , и поэтому

$$|\nabla F(t, p, e_i)| = |(1-t)\nabla f_0(p, e_i) + t\nabla f_1(p, e_i)| \leq L, \quad i > 0.$$

Кроме того,

$$|\nabla F(t, p, e_0)| = |f_1(p) - f_0(p)| \leq \delta.$$

Следовательно,

$$(6) \quad |J_F(t, p)| = |\nabla F(t, p, e_0 \dots e_s)| \leq \delta L^s \quad \text{в } I \times \sigma_k^s.$$

Для некоторого числа  $\eta > 0$  существует сколь угодно мелкое подразделение полиэдра  $I \times P$  полноты  $\geq \eta$ , дающее подразделение каждой клетки  $I \times \sigma_k^s$ ; см. лемму (П. II, 4b) и (П. II, 12). Пусть, скажем,  $\partial A = \sum b_j \sigma_j^{r-1}$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  положим  $\varepsilon' = \varepsilon / (\sum |a_i| + \sum |b_j|)$ . Рассматривая отображение  $F$  в каждой клетке  $I \times \sigma_k^s$  при всех  $k$  и при  $s = r$  и  $r-1$ , выберем  $\zeta > 0$  по лемме 4a достаточно малым для всех этих клеток, взяв в указанной лемме  $\varepsilon'$  вместо  $\varepsilon$ . Пусть  $F'$  — соответствующее симплексно-аффинное отображение полиэдра  $I \times P$ . Так как  $|I \times \sigma_k^s| = |\sigma_k^s|$ , то из (4.7) и (6) получаем

$$|F'(I \times \sigma_k^s)| \leq \int_{I \times \sigma_k^s} \delta L^s + \varepsilon' = \delta L^s |\sigma_k^s| + \varepsilon'.$$

Следовательно, в силу того, что  $I \times A = \sum a_i (I \times \sigma_i^r)$  и т. д.,

$$|F'(I \times A)| \leq \delta L^r \sum_i |a_i| |\sigma_i^r| + \varepsilon' \sum_i |a_i|,$$

$$|F'(I \times \partial A)| \leq \delta L^{r-1} \sum_j |b_j| |\sigma_j^{r-1}| + \varepsilon' \sum_j |b_j|.$$

Так как отображения  $f_0$  и  $f_1$  симплексно-аффинны, то  $F'(t, p) = F(t, p)$  при  $t=0, 1$ . Поэтому

$$F'(0 \times A) = f_0 A, \quad F'(1 \times A) = f_1 A,$$

и формула (П. II, 13.6) дает

$$(7) \quad f_1 A - f_0 A = F'(I \times \partial A) + \partial F'(I \times A).$$

Отсюда получается неравенство (4); утверждение относительно  $S$  очевидно.

**6. Липшицевские цепи.** Пусть  $A$  — некоторая  $r$ -мерная полиэдральная цепь и  $f$  — липшицевское отображение полиэдра  $P = \text{spt}(A)$  в  $E^n$ . Соответствующую *липшицевскую цепь*  $fA$  мы

определяем следующим образом. Пусть  $\mathfrak{E}_1 P, \mathfrak{E}_2 P, \dots$  — полная последовательность симплициальных подразделений полиэдра  $P$ ; это значит, что комплекс  $\mathfrak{E}_{k+1}$  является подразделением комплекса  $\mathfrak{E}_k$  и что для некоторого  $\eta > 0$  все симплексы имеют полноту  $\geq \eta$ . Пусть  $f_1, f_2, \dots$  — соответствующие симплексно-аффинные отображения полиэдра  $P$  в  $E^n$ . При каждом  $k$   $f_k A$  есть полиэдральная цепь в  $E^n$  (см. § 5). Положим

$$(1) \quad fA = \lim_{k \rightarrow \infty}^b f_k A.$$

Чтобы показать, что предел существует, возьмем любые номера  $k, l$ ; пусть, скажем,  $k < l$ . В каждом симплексе  $\sigma_{il}$  комплекса  $\mathfrak{E}_l P$  оба отображения  $f_k, f_l$  являются аффинными; по лемме 1а

$$\varrho_{f_k}, \varrho_{f_l} \leq L = \frac{\varrho_f}{(r-1)!\eta} \quad \text{в } \sigma_{il}.$$

Поэтому в силу леммы 5а

$$|f_l A - f_k A|^b \leq \delta_{f_k, f_l} (L^r |A| + L^{r-1} |\partial A|).$$

Очевидно,  $\delta_{f_k, f_l} \rightarrow 0$  при  $k, l \rightarrow \infty$ ; таким образом, предел существует.

Чтобы показать, что этот предел не зависит от выбора последовательности  $\mathfrak{E}_1 P, \mathfrak{E}_2 P, \dots$ , рассмотрим другую последовательность  $\mathfrak{E}'_1 P, \mathfrak{E}'_2 P, \dots$  и соответствующие отображения  $f'_1, f'_2, \dots$ . Пусть, скажем,  $\varrho_{f'_k} \leq L'$ ; положим  $L_0 = \sup \{L, L'\}$ . Возьмем любой номер  $k$ . Рассматривая общее симплициальное подразделение комплексов  $\mathfrak{E}_k P$  и  $\mathfrak{E}'_k P$  (П. II, лемма 3b), мы заключаем на основании леммы 5а, что

$$|f'_k A - f_k A|^b \leq \delta_{f_k, f'_k} (L_0^r |A| + L_0^{r-1} |\partial A|) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Допустим, что само отображение  $f$  является симплексно-аффинным по отношению к некоторому симплициальному подразделению полиэдра  $P$ . Если рассмотреть полную последовательность подразделений полученного комплекса и соответствующие отображения  $f_k$ , то очевидно, что  $f_k = f$ , и поэтому  $f_k A = fA$  при любом  $k$ . Следовательно, новое определение цепи  $fA$  совпадает с прежним, когда прежнее определение применимо.

**Лемма 6а.** Пусть  $f$  — липшицевское отображение ориентированного  $r$ -мерного симплекса  $\sigma$  в  $E^n$ . Пусть  $g$  — сохраняющее ориентацию аффинное отображение  $r$ -мерного симплекса  $\sigma'$  на  $\sigma$ ; положим  $f'(p) = f(g(p))$  в  $\sigma'$ . Тогда  $f'\sigma' = f\sigma$ .

Возьмем полную последовательность подразделений симплекса  $\sigma'$ , и пусть  $f'_1, f'_2, \dots$  — соответствующие отображения. Так как отображение  $g$  аффинно, то существует соответствующая полная последовательность подразделений симплекса  $\sigma$  и соответствующие отображения  $f_1, f_2, \dots$ . Так как, далее,  $f'_k(p) = f_k(g(p))$  в вершинах соответствующего подразделения и так как эти отображения симплексно-аффинны, то  $f'_k(p) = f_k(g(p))$  в  $\sigma'$ ; следовательно,  $f'_k \sigma' = f_k(g \sigma') = f_k \sigma$ . При  $k \rightarrow \infty$  получаем требуемый результат.

На основании этой леммы мы можем для данных  $fA$  и  $P = \text{spt}(A)$  взять некоторое разбиение полиэдра  $P$ , заменить (замкнутые)  $r$ -мерные клетки попарно не пересекающимися  $r$ -мерными клетками в  $E'$  и определить соответствующее отображение  $f'$  объединения этих клеток; очевидно, отображение  $f'$  будет липшицевским. Если  $A'$  — соответствующая полиэдральная цепь в  $E'$ , то  $f'A' = fA$ . Мы можем, таким образом, все липшицевские  $r$ -мерные цепи получить как образы полиэдральных цепей в  $E'$ .

Мы покажем, далее, что

$$(2) \quad |f\sigma| \leq \int_{\sigma} |J_f| \leq \mathfrak{L}'_f |\sigma|.$$

Возьмем разбиения  $\mathfrak{S}_1\sigma, \mathfrak{S}_2\sigma, \dots$  с полнотой  $\geq \eta > 0$ . По заданному  $\varepsilon > 0$  выберем  $\zeta > 0$  в соответствии с леммой 4а. Возьмем любое такое  $k$ , что степень мелкости разбиения  $\mathfrak{S}_k$  меньше  $\zeta$ . Пусть, скажем,  $\mathfrak{S}_k\sigma = \sum_i \sigma_{ki}$ . Возьмем точки  $p_i \in \sigma_{ki}$ . Тогда, если отображения  $f_k$  взяты, как в последней лемме, то из (4.2) и (4.3) находим

$$|f_k \sigma| \leq \sum_i |f_k \sigma_{ki}| = \int_{\sigma} |J_{f_k}| < \int_{\sigma} |J_f| + \varepsilon;$$

при  $k \rightarrow \infty$ , пользуясь (V, 16.1), получаем (2).

**Теорема 6А.** Для любой  $r$ -мерной липшицевской цепи  $fA$  (таким образом, якобиан  $J_f$  определен п. в.)

$$(3) \quad |fA| \leq M|A|, \quad \text{если } |J_f| \leq M \text{ в } \text{spt}(A),$$

$$(4) \quad |fA| \leq \mathfrak{L}'_f |A|.$$

Это сразу следует из (2). См. также теорему 7А.

**Теорема 6В.** Пусть  $K$  — некоторый симплициальный комплекс, и пусть  $f_0$  и  $f_1$  — отображения комплекса  $K$  в  $E^m$ , для которых  $\mathfrak{L}_{f_0}, \mathfrak{L}_{f_1} \leq L$  в каждом симплексе комплекса  $K$  (или в самом  $K$ ). Тогда для любой  $r$ -мерной симплициальной цепи  $A$  комплекса  $K$  справедливо заключение леммы 5а.

Для любого симплекса  $\sigma_k^s$  комплекса  $K$  пусть, скажем,  $\nabla f_0$  и  $\nabla f_1$  определены и измеримы на множестве  $Q_k^s \subset \sigma_k^s$ ,  $|\sigma_k^s \setminus Q_k^s|_s = 0$ . Как и в § 5, находим

$$|F(t, p)| \leq \delta L^s, \quad p \in Q_k^s, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

В силу (3)

$$|F(I \times \sigma_k^s)| \leq \delta L^s |I \times \sigma_k^s| = \delta L^s |\sigma_k^s|.$$

Поэтому  $|F(I \times A)| \leq \delta L^r |A|$ ,  $|F(I \times \partial A)| \leq \delta L^{r-1} |\partial A|$ , и формула (5.7) в применении к  $F$  дает неравенство (5.4). И на этот раз в (5.4) можно взять  $|f_1 A - f_0 A|_S^b$ .

**7. Липшицевские отображения открытых множеств.** Для данного открытого множества  $R$  в  $E^n$  положим

$$(1) \quad \rho_R(p, q) = \inf \{ \text{длин кривых, соединяющих } p \text{ и } q \text{ в } R \}.$$

Мы считаем, что  $\rho_R(p, q) = \infty$ , если в  $R$  не существует кривой, соединяющей эти точки. Мы могли бы, очевидно, потребовать, чтобы кривые были ломаными линиями. Заметим, что если  $pq$  — прямой отрезок, соединяющий точки  $p$  и  $q$ , то

$$(2) \quad |q - p| \leq \rho_R(p, q); \quad |q - p| = \rho_R(p, q), \quad \text{если } pq \in R.$$

Пусть  $f$  — непрерывное отображение открытого множества  $R \subset E^n$  в открытое множество  $S \subset E^m$ . Тогда  $R$ -константой Липшица отображения  $f$  называется число

$$(3) \quad \mathfrak{L}_{f,R} = \sup \left\{ \frac{\rho_S(f(p), f(q))}{\rho_R(p, q)} \right\}$$

при условии, что рассматриваемая верхняя грань существует; если это так, то отображение  $f$  называется  $R$ -липшицевским. Упомянем несколько элементарных фактов. Число  $\mathfrak{L}_{f,R}$  не зависит от  $S$ ; мы могли бы заменить  $S$  любой окрестностью множества  $f(R)$  или же пространством  $E^m$ . Любая кривая в  $R$  переходит при отображении  $f$  в кривую, длина которой не более, чем в  $\mathfrak{L}_{f,R}$  раз превышает длину данной кривой. Мы имеем

$$(4) \quad \rho_S(f(p), f(q)) \leq \mathfrak{L}_{f,R} |q - p|, \quad \text{если } pq \subset R.$$

Поэтому отображение  $f$  является „локально липшицевским“; в действительности, если обозначить через  $f|_Q$  отображение  $f$ , рассматриваемое только на подмножестве  $Q \subset R$ , то мы будем иметь

$$(5) \quad \mathfrak{L}_{f|_Q} \leq \mathfrak{L}_{f,R}, \quad \text{если } Q \subset R \text{ и } Q \text{ выпукло.}$$

Отсюда следует, что отображение  $f$  является липшицевским на любом компактном подмножестве множества  $R$ ; таким образом, для любой полиэдральной цепи  $A$  в  $R$ , как и в § 6, определена липшицевская цепь  $fA$ . Если  $fA = \lim^b f_k A$ , как в (6.1), то  $f_k A \subset S$  для всех достаточно больших  $k$  и, как видно из теоремы (VIII, 2B),  $\lim_S^b f_k A = fA$ .

Теперь мы покажем, каким образом каждое  $R$ -липшицевское отображение  $f$  определяет отображение  $fA$  бемольных цепей  $A$  множества  $R$ , если только цепи  $A$  удовлетворяют некоторому условию. Мы будем пользоваться обозначением

$$(6) \quad a^{[r]} = \sup \{a^r, a^{r+1}\}.$$

**Теорема 7A.** Пусть  $f$  — некоторое  $R$  — липшицевское отображение открытого множества  $R \subset E^n$  в открытое множество  $S \subset E^m$ . Тогда отображение  $fB$  пространства полиэдральных цепей  $B$  в множестве  $R$  в пространство липшицевских цепей в множестве  $S$  можно единственным образом продолжить в линейное отображение пространства бемольных цепей  $A$  множества  $R$ , для которых

$$(7) \quad \overline{f(\text{spt}(A))} \subset S,$$

в пространстве бемольных цепей  $fA$  множества  $S$  так, чтобы выполнялись следующие условия ( $r = \dim(A)$ ):

$$(8) \quad f \partial A = \partial fA,$$

$$(9) \quad |fA| \leq \mathfrak{L}_{f,R}^r |A|,$$

$$(10) \quad |fA|_S^b \leq \mathfrak{L}_{f,R}^{[r]} |A|_R^b,$$

$$(11) \quad \text{spt}(fA) \subset \overline{f(\text{spt}(A))}.$$

**Замечания.** Условие (7) выполняется для всех компактных цепей  $A$ ; если  $\overline{f(R)} \subset S$ , то оно выполняется для всех цепей  $A$ . Простые примеры показывают, что в общем случае оно не выполняется. Если бы мы ослабили ограничения, наложенные на отображение  $f$ , предположив только, что оно является локально липшицевским (липшицевским в окрестности каждой точки, или, что то же самое, в каждом компактном множестве), то мы все еще могли бы определить  $fA$  для всех компактных цепей в  $R$ .

Сначала мы докажем, что указанные выше условия выполняются для полиэдральных цепей  $A$ ; очевидно, отображение  $f$  на пространстве этих цепей линейно. Возьмем любой  $r$ -мерный ориентированный симплекс  $\sigma$  в  $R$ . Пусть  $\mathfrak{E}_{1\sigma}, \mathfrak{E}_{2\sigma}, \dots$  — некоторая полная последовательность подразделений симплекса  $\sigma$ ; она определяет также полную последовательность подразделений границы  $\partial\sigma$ . Если

$f_t$  — симплексно-аффинное отображение симплекса  $\tau$ , определяемое отображением  $f$  и подразделением  $\mathfrak{S}_t\tau$ , то, как мы отметили выше,

$$\lim^b_{\mathfrak{S}} f_k \tau = f\tau, \quad \lim^b_{\mathfrak{S}} f_k \partial\tau = f\partial\tau.$$

Так как отображение  $f_k$  симплексно-аффинно, то ясно, что  $f_k \partial\tau = \partial f_k \tau$ . Поскольку операция  $\partial$  непрерывна, отсюда следует равенство (8) для  $\sigma$ , а следовательно, и для любых полиэдральных цепей  $A$ .

Неравенство (9) для симплексов непосредственно вытекает из (6.2) и (5); поэтому оно выполняется для полиэдральных цепей  $A$ . Включение (11) следует из определения липшицевских цепей  $fA$  и носителей.

Чтобы доказать неравенство (10) для полиэдральной цепи  $A$ , возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Выберем в  $R$  такую полиэдральную цепь  $D$ , что

$$|A - \partial D| + |D| < |A|_R^b + \varepsilon.$$

Тогда неравенства (8) и (9) дают

$$\begin{aligned} |fA|_S^b &\leq |f(A - \partial D)|_S^b + |\partial fD|_S^b \leq \\ &\leq \mathfrak{L}_{f,R}^r |A - \partial D| + \mathfrak{L}_{f,R}^{r+1} |D| \leq \mathfrak{L}_{f,R}^{[r]} (|A|_R^b + \varepsilon), \end{aligned}$$

откуда и следует (10).

Возьмем теперь любую бемольную цепь  $A$  в  $R$ , удовлетворяющую условию (7). Тогда существует окрестность  $U_0$  множества  $Q_0 = f(\text{spt}(A))$ , для которой  $\bar{U}_0 \subset S$ , и окрестность  $U$  множества  $Q = \text{spt}(A)$ , для которой  $f(U) \subset U_0$ . В силу теоремы (VIII, 3С) существует такая последовательность  $A_1, A_2, \dots$  полиэдральных цепей в  $U$ , что  $\lim^b_k A_k = A$ . Применяя неравенство (10) к  $f(A_j - A_k)$ , находим, что в бемольной  $S$ -норме последовательность  $fA_1, fA_2, \dots$  является фундаментальной; мы определим  $fA$  и докажем, что

$$fA = \lim^b_{\mathfrak{S}} fA_k.$$

Заменяя множество  $S$  пространством  $E^m$ , мы прежде всего видим, что  $fA = \lim^b_{\mathfrak{S}} fA_k$  существует как цепь пространства  $E^m$ . Далее, выбирая такую полиэдральную цепь  $B_i$  в  $U_0$ , для которой  $|fA_k - B_i|_S^b < 1/i$  (VIII, теорема 3С), мы видим, что в бемольной  $S$ -норме  $B_1, B_2, \dots$  есть фундаментальная последовательность полиэдральных цепей, лежащих в замкнутом множестве  $\bar{U}_0 \subset S$ ; теперь  $fA = \lim^b_{\mathfrak{S}} B_i$ . В соответствии с определением (VIII, 1) мы заключаем отсюда, что  $fA$  есть бемольная цепь множества  $S$  и что она равна  $\lim^b_{\mathfrak{S}} fA_k$ . Очевидно, неравенство (10) продолжает выполняться,

Теперь  $\text{spt}(fA) \subset \bar{U}_0$ , и так как окрестность  $U_0$  была произвольной, то имеет место включение (11).

Пусть снова дана цепь  $A$ ; так как  $\text{spt}(\partial A) \subset \text{spt}(A)$ , то граница  $\partial A$  удовлетворяет условию (7); поэтому  $f\partial A$  есть цепь множества  $S$ . Запишем, как и выше,  $A = \lim_{\mathfrak{L}}^b A_i$ . Тогда  $\partial A = \lim_{\mathfrak{L}}^b \partial A_i$  и неравенство (10) показывают, что  $f\partial A = \lim_{\mathfrak{L}}^b f\partial A_i$ . Следовательно, пользуясь для  $A_i$  равенством (8), получаем

$$f\partial A = \lim_{\mathfrak{L}}^b \partial fA_i = \partial \lim_{\mathfrak{L}}^b fA_i = \partial fA,$$

и равенство (8) доказано в общем случае.

При доказательстве неравенства (9) для бемольной цепи  $A$  мы можем предполагать, что масса  $|A|$  конечна. Тогда (VIII, теорема 3С) мы можем выбрать рассмотренные выше полиэдральные цепи  $A_i$  так, что  $\lim |A_i| = |A|$ . Так как для цепей  $A_i$  неравенство (9) выполняется, то мы имеем

$$|fA| = |\lim_{\mathfrak{L}}^b fA_i| \leq \lim |fA_i| \leq \mathfrak{L}_{f,R}^r \lim |A_i| = \mathfrak{L}_{f,R}^r |A|.$$

Это завершает доказательство теоремы.

Докажем теорему о непрерывности.

**Теорема 7В.** Пусть  $R, S, f$  — такие же, как в предыдущей теореме, и пусть  $A$  — некоторая бемольная цепь множества  $R$ , удовлетворяющая условию (7). Тогда для любых чисел  $L$  и  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\zeta > 0$ , что для любого  $R$ -липшицевого отображения  $g$  множества  $R$  в  $S$  и любой бемольной цепи  $B$  множества  $R$ , удовлетворяющей по отношению к  $g$  условию (7),

$$(12) \quad |gB - fA|_S^b < \varepsilon, \text{ если } |B - A|_R^b < \zeta, \mathfrak{L}_{g,R} \leq L, \delta_{f,g} \leq \zeta.$$

Пусть  $L_0 = \sup \{\mathfrak{L}_{f,R}, L\}$ ; выберем такую полиэдральную цепь  $A_1$  в  $R$ , что

$$|A_1 - A|_R^b < \frac{\varepsilon}{4L_0^{[r]}}.$$

Положим  $P = \text{spt}(A_1)$ . Для некоторого  $\eta > 0$  существует последовательность симплициальных подразделений  $\mathfrak{S}_1 P, \mathfrak{S}_2 P, \dots$  полноты  $\geq \eta$ . Положим  $L_1 = L_0 / [(r-1)! \eta]$  и

$$\zeta = \frac{\varepsilon}{4 \sup \{L_1^{[r]}, L_1^r |A_1| + L_1^{r-1} |\partial A_1|\}}.$$

Теперь возьмем любое отображение  $g$  и цепь  $B$ , удовлетворяющие указанным выше условиям. Пусть  $f_k$  и  $g_k$  — симплексно-аффинные отображения полиэдра  $P$ , соответствующие подразделению  $\mathfrak{S}_k P$ .

В силу леммы 1а константы  $\mathfrak{L}_{f_k}$  и  $\mathfrak{L}_{g_k}$  в каждом симплексе комплекса  $\mathfrak{S}_k P$  не превосходят  $L_1$ . Кроме того,  $\delta_{f_k, g_k} \leq (1 + \lambda_k) \zeta$ , где  $\lambda_k \rightarrow 0$ . Поэтому в силу леммы 5а при достаточно большом  $k$

$$|g_k A_1 - f_k A_1|_S^b \leq (1 + \lambda_k) \zeta (L_1' |A_1| + L_1'^{-1} |\partial A_1|) \leq \frac{(1 + \lambda_k) \varepsilon}{4},$$

и при  $k \rightarrow \infty$  мы получаем

$$|g A_1 - f A_1|_S^b \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Далее, в силу (10)

$$|f A - f A_1|_S^b \leq \mathfrak{L}_{f, R}^{[r]} |A - A_1|_R^b < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$|g B - g A_1|_S^b \leq L^{[r]} (|B - A|_R^b + |A - A_1|_R^b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этих неравенств получаем (12).

В заключение докажем теорему о транзитивности.

**Теорема 7С.** Пусть  $R$ ,  $R'$  и  $R''$  — открытые множества в евклидовых пространствах  $E$ ,  $E'$  и  $E''$  соответственно; пусть, далее,  $f$  — некоторое  $R$ -липшицевское отображение множества  $R$  в  $R'$  и  $g$  — некоторое  $R'$ -липшицевское отображение множества  $R'$  в  $R''$ . Тогда  $gf$  есть  $R$ -липшицевское отображение множества  $R$  в  $R''$ . Кроме того, для любой бемольной цепи  $A$  множества  $R$ , для которой

$$Q = \text{spt}(A), \quad Q' = \overline{f(Q)} \subset R', \quad Q'' = \overline{g(Q')} \subset R''$$

(эти условия выполняются, например, если цепь  $A$  компактна),  $(gf)A$  есть цепь множества  $R''$  и

$$(13) \quad (gf)A = g(fA).$$

Положим  $h = gf$ . Допустим сначала, что  $A$  есть некоторый симплекс  $\sigma$ . Взяв полную последовательность подразделений симплекса  $\sigma$ , мы обозначим через  $f_1, f_2, \dots$  соответствующие симплексно-аффинные отображения (в  $R'$ , если подразделения достаточно мелки). Теперь  $\mathfrak{L}_{f_i} \leq L$  для некоторого  $L$  и  $\lim_k f_i \sigma = f \sigma$ . Поэтому неравенство (10) дает

$$\lim_k h_i \sigma = g(f \sigma).$$

Положим  $h_i = g f_i$ . Применяя лемму 6а к каждому симплексу  $\tau$   $i$ -го подразделения, получаем  $h_i \tau = g(f_i \tau)$ . (Если симплекс  $f_i \tau$  вырождается, то  $h_i \tau = g(f_i \tau) = 0$ .) Кроме того,  $\mathfrak{L}_{h_i} \leq L \mathfrak{L}_{g, R'}$ , так

как в силу (5)  $\mathcal{Q}_{g|f_i} \leq \mathcal{Q}_{g,R'}$  для каждого  $\tau$ . Следовательно, по теореме 6B  $\lim_k^b h_i \tau = h\tau$ . Поэтому

$$h\tau = \lim_k^b g(f_i \tau) = g(f\tau).$$

Таким образом, для полиэдральных цепей равенство (13) выполняется.

Теперь рассмотрим общий случай. Так как, очевидно,  $\mathcal{Q}_{h,R} \leq \mathcal{Q}_{f,R} \mathcal{Q}_{g,R'}$  и  $h(Q) \subset Q'' \subset R''$ , то  $hA$  является бемольной цепью множества  $R''$ . Выберем полиэдральные цепи  $A_1, A_2, \dots$  в  $R$ , для которых  $\lim_k^b A_i = A$ . Тогда в силу неравенства (10)

$$\lim_k^b f A_i = fA, \quad \lim_k^b g(f A_i) = g(fA), \quad \lim_k^b h A_i = hA.$$

Так как  $g(f A_i) = h A_i$ , то отсюда следует (13).

**8. Липшицевские отображения и бемольные коцепи.** Мы докажем теорему:

**Теорема 8A.** Пусть  $f$  — некоторое  $R$ -липшицевское отображение открытого множества  $R \subset E^n$  в открытое множество  $S \subset E^m$ . Тогда, полагая

$$(1) \quad f^* X \cdot A = X \cdot fA$$

для любой  $r$ -мерной бемольной цепи  $A$  множества  $R$ , удовлетворяющей условию (7.7), мы определяем для любой  $r$ -мерной бемольной коцепи  $X$  в  $S$  некоторую  $r$ -мерную бемольную коцепь  $f^* X$  в  $R$ . Мы имеем

$$(2) \quad df^* X = f^* dX,$$

$$(3) \quad |f^* X| \leq \mathcal{Q}_{f,R}' |X|,$$

$$(4) \quad |f^* X|_R^b \leq \mathcal{Q}_{f,R}^{[r]} |X|_S^b.$$

Если вдобавок  $g$  есть  $S$ -липшицевское отображение в открытое множество  $S' \subset E'$  и  $Y$  — бемольная коцепь в  $S'$ , то

$$(5) \quad (gf)^* Y = f^*(g^* Y).$$

Возьмем любую бемольную цепь  $A$  множества  $R$ , удовлетворяющую условию (7.7). Тогда из (1) и (7.10) мы получаем

$$|f^* X \cdot A| = |X \cdot fA| \leq |X|_S^b |fA|_S^b \leq \mathcal{Q}_{f,R}^{[r]} |X|_S^b |A|_R^b.$$

Так как множество цепей рассматриваемого вида плотно в пространстве  $r$ -мерных бемольных цепей множества  $R$ , то равенство (1) определяет некоторую  $r$ -мерную бемольную коцепь множества  $R$ ,

удовлетворяющую неравенству (4). Поскольку для любой бемольной цепи  $A$ , удовлетворяющей условию (7.7),

$$df^*X \cdot A = f^*X \cdot \partial A = X \cdot f \partial A = X \cdot \partial fA = f^*dX \cdot A,$$

условие (2) выполняется. Неравенство (3) следует из (7.9):

$$|f^*X \cdot A| = |X \cdot fA| \leq |X| |fA| \leq \mathfrak{L}_{f,R}^r |X| |A|.$$

Наконец, пусть заданы  $f$  и  $g$ ; возьмем любую полиэдральную цепь  $A$  в  $R$ . Тогда

$$(gf)^*Y \cdot A = Y \cdot (gf)A = Y \cdot g(fA) = f^*(g^*Y) \cdot A.$$

Поэтому выполняется и равенство (5).

Докажем теорему о слабых пределах [см. (VIII, 1 (g))]:

**Теорема 8В.** Пусть  $f$  — такое же, как выше, отображение, а  $X$  и  $X_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) — бемольные коцепи в  $S$ . Тогда

$$(6) \quad \text{wkl}_R^b f^*X_i = f^*X, \text{ если } \text{wkl}_S^b X_i = X.$$

Возьмем любой симплекс  $\sigma$  в  $R$ . Тогда

$$\lim (f^*X_i \cdot \sigma) = \lim (X_i \cdot f\sigma) = X \cdot f\sigma = f^*X \cdot \sigma.$$

В силу (4) нормы  $|f^*X_i|_R^b$  равномерно ограничены; поэтому (6) справедливо.

**9. Липшицевские отображения и бемольные формы.** Пусть  $f$  — гладкое отображение открытого множества  $R \subset E^n$  в открытое множество  $S \subset E^m$ , и пусть  $\omega$  — непрерывная  $r$ -форма в  $S$ . Тогда, как в (II, 4), существует соответствующая  $r$ -форма  $f^*\omega$  в  $R$ , определяемая формулой

$$(1) \quad f^*\omega(p) \cdot \alpha = f_p^*(\omega(q)) \cdot \alpha = \omega(q) \cdot \nabla f(p, \alpha), \quad q = f(p).$$

Пусть теперь  $f$  — липшицевское отображение, и пусть  $\omega$  — бемольная  $r$ -форма в  $S$ . Нельзя ожидать, что формулой (1) можно будет воспользоваться для определения формы  $f^*\omega$ ; например, отображение  $f$  может переводить  $R$  в подмножество множества  $S$ , на котором форма  $\omega$  не определена. Мы определим  $f^*\omega$ , взяв коцепь  $X = \Psi\omega$ , соответствующую форме  $\omega$  (IX, теорема 7С), образовав коцепь  $X^* = f^*X$  (§ 8) и найдя форму  $D_{X^*} = \Phi X^*$ , соответствующую коцепи  $X^*$ :

$$(2) \quad f^*\omega = \Phi f^*\Psi\omega.$$

Относительно коцепи  $X$  это записывается следующим образом:

$$(3) \quad f^*D_X = D_{f^*X}.$$

Теорема 9В, которую мы докажем ниже, показывает, что форму, эквивалентную форме  $f^*\omega$  (IX, 7), мы можем получить с помощью аналитической формулы (1), если только сначала мы „улучшим“ форму  $\omega$ , заменив ее формой  $D_X$ , где  $X = \Psi\omega$ . Таким образом, одно из важных свойств формы  $D_X$  состоит в том, что она всегда определена на множестве, достаточно большом для того, чтобы привести в действие эту аналитическую формулу. Это показывает также, что в ранее встречавшейся ситуации оба определения формы  $f^*\omega$  совпадают.

Отметим, что теорема 9В показывает, что  $D_X(q, \beta)$  существует для некоторого  $\beta$ , именно для  $\beta = \nabla f(p, \alpha)$ ; однако она не утверждает, что  $D_X(q, \beta)$  существует для остальных  $\beta$ . Может случиться, что  $D_X(q)$  как  $r$ -ковектор не существует ни для одной точки  $q = f(p)$ . Так, между прочим, будет обстоит дело в примере, приведенном в введении к гл. IX, если в качестве  $f$  мы возьмем отображение симплекса  $\sigma^1$  в интервал оси  $x$ .

Напомним, что  $D_X(q, \beta)$  сначала определяется для  $r$ -направлений  $\beta$  формулой (IX, 4.1), а затем для любых простых  $r$ -векторов  $\beta \neq 0$  формулой (V, 10.10). Напомним также, что из существования ковектора  $D_X(p)$  следует линейность произведения  $D_X(p) \cdot \alpha$  относительно  $\alpha$ .

*Теорема 9А. Пусть  $f$  — некоторое  $R$ -липшицевское отображение открытого множества  $R \subseteq E^n$  в открытое множество  $S \subseteq E^m$ , и пусть  $X$  — бемольная  $r$ -мерная коцепь в  $S$ . Положим  $X^* = f^*X$ . Тогда для любой точки  $p \in R$ , в которой отображение  $f$  дифференцируемо (IX, 11) и существует  $D_{X^*}(p)$ , существует и ковектор  $D_X(f(p))$  относительно плоскости  $P_p$ , проходящей через точку  $f(p)$  в направлении  $\nabla f(p, \alpha(p))$  (IX, 5), и*

$$(4) \quad D_{X^*}(p) = f_p^* D_X(f(p)).$$

*Замечания.* Плоскость  $P_p$  состоит из всех точек вида  $f(p) + \nabla f(p, v)$ . Теорема была бы верна и в том случае, если бы в определении формы  $D_X$  мы пользовались  $p$ -полными последовательностями симплексов, не обязательно содержащих точку  $p$ . Вместо выписанного ниже неравенства (8) мы должны были бы в этом случае воспользоваться следующим неравенством, основанным на (IX, 2.6):

$$(5) \quad \text{diam}(p \cup \sigma) |\partial \sigma| \leq \frac{(r+1) |\sigma|}{(r-1)! (r!)^{1/r} [\Theta_p(\sigma)]^{1+1/r}}.$$

Мы докажем теорему сначала в частном случае  $r = n$ . Так как отображение  $f$  дифференцируемо в точке  $p$ , то мы можем опре-

делить аффинное отображение  $F$  множества  $R$  в пространство  $E^m$ , полагая

$$(6) \quad F(p') = q + \nabla f(p, p' - p), \quad q = f(p).$$

Прежде всего мы покажем, что для любых чисел  $\eta > 0$  и  $\varepsilon > 0$  существует число  $\zeta > 0$ , обладающее следующим свойством. Для любого  $r$ -мерного симплекса  $\sigma$

$$(7) \quad |X \cdot F\sigma - X \cdot f\sigma| \leq \varepsilon |\sigma|, \text{ если } \Theta(\sigma) \geq \eta, \quad p \in \sigma \subset U_\zeta(p).$$

Для некоторого  $\eta' \leq \eta$  существует последовательность подразделений симплекса  $\sigma$  полноты  $\geq \eta' > 0$ . Выберем  $\varepsilon' > 0$  так, чтобы было

$$|X|_S^b \left[ L^r + \frac{(r+1)L^{r-1}}{(r-1)!\eta} \right] \varepsilon' \leq \varepsilon, \quad L = \mathfrak{L}_{f,R}.$$

Выберем  $\zeta \leq 1/2$  на основании свойства (с) из теоремы (IX, 11B), взяв в этой теореме  $\varepsilon'$  и  $\eta'$  вместо  $\varepsilon$  и  $\eta$ . Теперь выберем симплекс  $\sigma$  так же, как и выше. В силу (IX, 11.1)

$$|f(p') - F(p')| \leq \varepsilon' |p' - p| \leq \varepsilon' \text{diam}(\sigma), \quad p' \in \sigma.$$

Поскольку  $\mathfrak{L}_F \leq \mathfrak{L}_{f,R}$ , теорема 6B дает

$$|F\sigma - f\sigma|_S^b \leq \delta_{f,F} (L^r |\sigma| + L^{r-1} |\partial\sigma|).$$

В силу (IX, 2.7)

$$(8) \quad \text{diam}(\sigma) |\partial\sigma| \leq \frac{(r+1)|\sigma|}{(r-1)!\eta}.$$

Поэтому [так как  $\delta_{f,F} \leq \varepsilon' \text{diam}(\sigma) \leq \varepsilon'$  в  $\sigma$ ]

$$|X \cdot (F\sigma - f\sigma)| \leq |X|_S^b \varepsilon' \left[ L^r + \frac{(r+1)L^{r-1}}{(r-1)!\eta} \right] |\sigma| \leq \varepsilon |\sigma|.$$

Ориентируем пространство  $E^r = E^n$ , выбрав  $r$ -направление  $\alpha_0$ . Допустим сначала, что  $J_f(p) = 0$ . Тогда, чтобы доказать (4), нам нужно только показать, что  $D_{X^*}(p, \alpha_0) = 0$ . Пусть  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  — некоторая полная  $p$ -последовательность  $r$ -мерных симплексов; так как  $J_F(p) = 0$  и, следовательно, симплексы  $F\sigma_i$  вырождаются, то  $X \cdot F\sigma_i = 0$ . Следовательно, из (7) мы получаем

$$D_{X^*}(p, \alpha_0) = \lim \frac{X^* \cdot \sigma_i}{|\sigma_i|} = \lim \frac{X \cdot f\sigma_i}{|\sigma_i|} = 0.$$

Допустим теперь, что  $J_f(p) \neq 0$ . Тогда  $F$  является взаимно однозначным аффинным отображением пространства  $E^r$  на некоторую  $r$ -мерную плоскость  $P$  в пространстве  $E^m$ , проходящую

через  $q$ , и имеет обратное аффинное отображение  $F^{-1}$ , определенное на  $P$ . Положим

$$b = |J_f(p)|, \quad b' = \frac{1}{b}, \quad \alpha'_0 = b' J_f(p);$$

тогда  $\alpha'_0$  есть  $r$ -направление плоскости  $P$ , надлежащим образом ориентированной. Пусть  $\tau_1, \tau_2, \dots$  — любая полная  $q$ -последовательность симплексов в  $P$ , ориентированных как и  $\alpha'_0$ ; мы докажем, что

$$(9) \quad b \lim \frac{X \cdot \tau_i}{|\tau_i|} = D_{X^*}(p, \alpha_0).$$

Тогда отсюда будет следовать, что  $D_X(q, J_f(p))$  существует и

$$D_X(q, J_f(p)) = b D_X(q, \alpha'_0) = D_{X^*}(p, \alpha_0),$$

и мы получим (4).

Положим  $\sigma_i = F^{-1}\tau_i$ ; это — некоторый  $r$ -мерный симплекс в пространстве  $E^r$ , и в силу (4.1)  $|\tau_i| = b |\sigma_i|$ . Положим  $L_1 = \mathfrak{L}_{F^{-1}}$ ; тогда

$$\Theta(\sigma_i) = \frac{|\sigma_i|}{\text{diam}^r(\sigma_i)} \geq \frac{b' |\tau_i|}{L_1^r \text{diam}^r(\tau_i)} = \frac{b'}{L_1^r} \Theta(\tau_i),$$

и поэтому  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  есть полная  $p$ -последовательность и

$$\lim \frac{X^* \cdot \sigma_i}{|\sigma_i|} = D_{X^*}(p, \alpha_0).$$

Кроме того, на основании (7)

$$\lim \left( b \frac{X \cdot \tau_i}{|\tau_i|} - \frac{X^* \cdot \sigma_i}{|\sigma_i|} \right) = \lim \frac{X \cdot F\sigma_i - X^* \cdot f\sigma_i}{|\sigma_i|} = 0.$$

Из этих соотношений вытекает равенство (9); доказательство для случая  $r = n$  закончено.

В общем случае из только что доказанного следует, что  $D_X(q, \nabla f(p, \alpha))$  существует и равно  $D_{X^*}(p, \alpha)$  для каждого простого  $r$ -вектора  $\alpha$ ; так как второе из этих выражений линейно относительно  $\alpha$ , то линейно относительно  $\alpha$  будет и первое.

**Теорема 9В.** Пусть  $f$  и  $X$  — такие же, как в предыдущей теореме; положим  $\omega = D_X$  в  $S$ . Тогда формулой (1) можно воспользоваться для определения  $r$ -формы  $f^*\omega$  п. в. в  $R$ , и эта форма будет эквивалентна форме, определенной формулой (2).

Это непосредственно вытекает из предыдущей теоремы; напомним, что произведение  $\omega(q) \cdot \beta$  обязано быть линейной функцией от  $\beta$  только для некоторых  $\beta$ .

**Теорема 9С.** Пусть  $f$ ,  $X$  и  $\omega$  — такие же, как в предыдущей теореме. Тогда при любом из двух определений формы  $f^*\omega$  мы имеем

$$(10) \quad df^*\omega = f^*d\omega \text{ п. в. в } R.$$

Напомним, что  $d\xi$  определяется в (IX, 12.2). Так как в этом определении используется только коцепь, соответствующая форме  $\xi$ , то предыдущая теорема показывает, что левая часть равенства (10) не зависит от того, каким определением формы мы пользуемся; таким образом, от этого не зависит п. в. и правая часть. При определении (2) равенство (10) непосредственно вытекает из (8.2) и (IX, 12).

**10. Липшицевские отображения и диезные функции.** Пусть даны  $R$ -липшицевское отображение  $f$  открытого множества  $R$  в  $S$  и функция  $\varphi$ , диезная в  $S$ . С помощью формулы

$$(1) \quad \varphi^*(p) = (f^*\varphi)(p) = \varphi(f(p))$$

определим соответствующую функцию  $\varphi^* = f^*\varphi$ , диезную в  $R$ . Ясно, что

$$(2) \quad |f^*\varphi| \leq |\varphi|, \quad \mathfrak{L}_{f^*\varphi, R} \leq \mathfrak{L}_{f, R} \mathfrak{L}_{\varphi, S}, \quad |f^*\varphi|^\# \leq \mathfrak{L}_{f, R}^{[0]} |\varphi|^\#.$$

Сохраняя обозначения параграфа (IX, 12), мы будем здесь обозначать через  $\Psi\varphi$  нульмерную коцепь  $\varphi$ , соответствующую функции  $\varphi$ . Указанное выше отображение диезных форм эквивалентно отображению соответствующих нульмерных коцепей; иными словами,

$$(3) \quad f^*\Psi\varphi = \Psi f^*\varphi.$$

В самом деле,

$$f^*\Psi\varphi \cdot p = \Psi\varphi \cdot f(p) = \varphi(f(p)) = \varphi^*(p) = \Psi\varphi^* \cdot p.$$

Если  $X = \overline{\varphi}$ , то формула (3) дает формулу (9.4) в размерности нуль для всех точек  $p \in R$ .

Мы покажем, что для любой  $r$ -мерной бемольной коцепи  $X$  в  $S$

$$(4) \quad f^*(\varphi X) = (f^*\varphi)(f^*X) = \varphi^*(f^*X),$$

$$(5) \quad D_{f^*(\varphi X)}(p) = \varphi(f(p)) D_{f^*X}(p), \text{ если } D_{f^*X}(p) \text{ определено.}$$

Возьмем любую точку  $p$ , в которой форма  $D_{f^*X}(p)$  определена, и положим  $a = \varphi(f(p))$ . Так как  $f^*\varphi X \cdot \sigma = X \cdot \varphi f\sigma$  (VII, 2.1), то мы,

как в доказательстве равенства (IX, 7.6), находим

$$D_{f^*(\varphi X)}(p) \cdot \alpha = \lim_{|\sigma_i|} \frac{X \cdot \varphi f \sigma_i}{|\sigma_i|}, \quad D_{f^*X}(p) \cdot \alpha = \lim_{|\sigma_i|} \frac{X \cdot f \sigma_i}{|\sigma_i|},$$

$$|(\varphi - a) f \sigma_i| \leq |\varphi - a| \mathfrak{L}_{f,R} |\sigma_i|,$$

$$|\varphi f \sigma_i - a f \sigma_i| \leq \varepsilon_i \mathfrak{L}_{f,R} |\sigma_i|, \text{ если } |\varphi(p) - a| \leq \varepsilon_i \text{ в } f(\sigma_i),$$

и при  $i \rightarrow \infty$  получаем (5). Из (5) и (IX, 7.6) следует (4).

**11. Липшицевские отображения и произведения.** Мы покажем, что на рассматриваемый нами случай переносятся обычные формулы алгебраической топологии (и теории дифференциальных форм).

**Теорема 11А.** Пусть  $f$  — некоторое  $R$ -липшицевское отображение открытого множества  $R \subset E^n$  в открытое множество  $S \subset E^m$ . Тогда для любых бемольных коцепей  $X$  и  $Y$  в  $S$

$$(1) \quad f^*(X \cup Y) = f^*X \cup f^*Y.$$

Положим

$$X^* = f^*X, \quad Y^* = f^*Y, \quad Z = X \cup Y,$$

$$Z^* = f^*Z, \quad Z' = X^* \cup Y^*.$$

Допустим сначала, что коцепи  $X$  и  $Y$  гладкие (т. е. формы  $D_X$  и  $D_Y$  гладкие). Тогда в силу (IX, 14)

$$\sharp D_Z(q) = D_X(q) \vee D_Y(q) \quad \text{для всех } q \in S.$$

Пусть  $Q$  — множество точек  $p \in R$ , для которых  $D_{X^*}(p)$ ,  $D_{Y^*}(p)$  и  $D_{Z^*}(p)$  существуют,  $D_{Z'}(p) = D_{X^*}(p) \vee D_{Y^*}(p)$  и отображение  $f$  является дифференцируемым в точке  $p$ ; тогда  $|R \setminus Q| = 0$ . Возьмем любую точку  $p \in Q$  и положим  $q = f(p)$ . В силу теоремы 9А и формулы (I, 10.4)

$$D_{Z^*}(p) = f_p^*(D_Z(q)) = f_p^*(D_X(q) \vee D_Y(q)) =$$

$$= f_p^*D_X(q) \vee f_p^*D_Y(q) = D_{X^*}(p) \vee D_{Y^*}(p) = D_{Z'}(p).$$

Следовательно,  $D_{Z^*} = D_{Z'}$  п. в. в  $R$  и  $Z^* = Z'$ .

Теперь рассмотрим общий случай. Положим  $S_k = \text{int}_{1/k}(S)$ . Запишем

$$X = \text{wkl}_{i \rightarrow \infty}^b X_i, \quad Y = \text{wkl}_{i \rightarrow \infty}^b Y_i \text{ в каждом } S_k,$$

где  $X_i$  и  $Y_i$  — гладкие коцепи в  $S_i$ , такие же, как в (V, 13). Тогда для любого открытого множества  $R'$ , для которого  $f(R') \subset S_k$  при

каком-либо  $k$ , на основании теоремы (IX, 17A), теоремы 8B и доказанного выше мы получаем

$$\begin{aligned} f^*(X \cup Y) &= f^* \text{wkl}_{S_k}^b(X_i \cup Y_i) = \text{wkl}_{R'}^b f^*(X_i \cup Y_i) = \\ &= \text{wkl}_{R'}^b (f^*X_i \cup f^*Y_i) = \text{wkl}_{R'}^b f^*X_i \cup \text{wkl}_{R'}^b f^*Y_i = f^*X \cup f^*Y \end{aligned}$$

в  $R'$  и поэтому в  $R$ .

Теорема 11B. В обозначениях теоремы 11A

$$(2) \quad D_Z^*(p) = D_X^*(p) \vee D_Y^*(p) \quad \text{п. в. в } R.$$

Это сразу следует из (1) и определения (IX, 14.7).

Из этой формулы и теоремы 9A мы можем извлечь дальнейшую информацию относительно справедливости равенства  $D_Z = D_X \vee D_Y$ :

Теорема 11C. В обозначениях теоремы 11A

$$(3) \quad D_Z(f(p)) = D_X(f(p)) \vee D_Y(f(p)) \quad \text{в пространстве-образе отображения } \nabla f(p) \text{ п. в. в } R.$$

В самом деле, мы находим

$$(4) \quad f_p^* D_Z(f(p)) = f_p^* D_X(f(p)) \vee f_p^* D_Y(f(p)) \quad \text{п. в. в } R,$$

и это дает нам (3).

Когда первый множитель имеет степень 0, мы получаем произведение  $\bar{\varphi} \cup X = \varphi X$ ; см. (IX, 14.24). Если мы воспользуемся формулой (2), то получим формулу (10.5) п. в. в  $R$ .

Мы закончим формулой, относящейся к  $\cap$ -произведению.

Теорема 11D. В обозначениях теоремы 11A для любой бемольной цепи  $A$  множества  $R$ , удовлетворяющей условию (7.7), и любой бемольной коцепи  $X$  в  $S$

$$(5) \quad f(f^*X \cap A) = X \cap fA.$$

В самом деле, пусть  $Y$  — произвольная бемольная коцепь в  $S$  надлежащей размерности. Тогда по формулам (IX, 16.2) и (1)

$$\begin{aligned} Y \cdot f(f^*X \cap A) &= f^*Y \cdot (f^*X \cap A) = (f^*Y \cup f^*X) \cdot A = \\ &= f^*(Y \cup X) \cdot A = (Y \cup X) \cdot fA = Y \cdot (X \cap fA). \end{aligned}$$

Если  $X = \bar{\varphi}$  — нульмерная коцепь, то из (5), (IX, 16.18) и (10.1) мы получаем

$$(6) \quad f\varphi^*A = \varphi fA, \quad \varphi^*(p) = \varphi(f(p)).$$

Это следует также непосредственно из (10.4) (и обратно).

**12. О бемольной норме липшицевских цепей.** Точно так же, как бемольная норма полиэдральной цепи  $A$  определяется путем нахождения нижней грани суммы  $|A - \partial D| + |D|$  для полиэдральных цепей  $D$ , так мы можем найти бемольную норму липшицевской цепи  $A$ , рассматривая липшицевские цепи  $D$ . Это представляет интерес при изучении цепей в метрических пространствах.

**Теорема 12А.** Для любой липшицевской цепи  $A$  в открытом множестве  $R \subset E^n$

$$(1) \quad |A|_R^b = \inf \{ |A - \partial D| + |D| : \text{липшицевские цепи } D \subset R \}.$$

Так как неравенство  $\leq$  очевидно, то достаточно показать, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая липшицевская цепь  $D$  в  $R$ , что

$$|A - \partial D| + |D| < |A|_R^b + \varepsilon.$$

Пусть, скажем,  $A = fA_0$ ,  $A_0 = \sum a_i \sigma_i$ . Взяв полную последовательность подразделений симплекса  $\sigma_i$ , мы найдем число  $L$  и симплексно-аффинное отображение  $f'$  некоторого подразделения  $\sum \tau_j$  симплекса  $\sigma_i$ , для которых

$$\varrho_{f'} \leq L, \quad \delta_{f,f'}(L^r |A_0| + L^{r-1} |\partial A_0|) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть  $F(p, t)$  — деформация отображения  $f$  в отображение  $f'$ , определенная так же, как в (5.5). Тогда, как в (5.6),  $|J_F| \leq \delta_{f,f'} L^s$  в клетках  $I \times \tau_i^s$ . Поэтому в силу (6.3)

$$|F(I \times A_0)| \leq \delta_{f,f'} L^r |A_0|, \quad |F(I \times \partial A_0)| \leq \delta_{f,f'} L^{r-1} |\partial A_0|.$$

Теперь  $D' = F(I \times A_0)$  есть липшицевская цепь и, пользуясь соотношением, аналогичным соотношению (5.7), мы получаем

$$|f'A_0 - fA_0 - \partial D'| + |D'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это, в частности, показывает, что  $|f'A_0|_R^b < |A|_R^b + \varepsilon/2$ . Так как  $f'A_0$  — полиэдральная цепь, то существует такая полиэдральная цепь  $D''$  в  $R$ , что

$$|f'A_0 - \partial D''| + |D''| < |A|_R^b + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь мы имеем

$$|A - \partial(D'' - D')| + |D'' - D'| < |A|_R^b + \varepsilon.$$

Таким образом, мы можем взять  $D = D'' - D'$ .

**13. Деформации цепей.** Мы хотим обобщить лемму 5а. Если дана бемольная цепь  $A$  в  $E^n$ , то мы определим произведение  $I \times A$  в  $E^{n+1}$  и покажем, что

$$(1) \quad |I \times A|^b \leq 3|A|^b, \quad |I \times A| = |A|.$$

Допустим сначала, что  $A = \sum a_i \sigma_i$  — полиэдральная цепь. Тогда, если через  $I$  обозначить единичный отрезок, идущий в направлении  $(n+1)$ -й оси в пространстве  $E^{n+1}$ , то  $I \times \sigma_i$  будет клеткой в  $E^{n+1}$ , и  $I \times A = \sum a_i (I \times \sigma_i)$ . Если задано  $\varepsilon > 0$ , то выберем такие цепи  $C$  и  $D$  в  $E^n$ , что

$$A = C + \partial D, \quad |C| + |D| < |A|^b + \varepsilon.$$

Тогда  $I \times A = (I \times C + 1 \times D - 0 \times D) - \partial(I \times D)$ . Так как второе равенство в (1), очевидно, имеет место, то

$$\begin{aligned} |I \times C + 1 \times D - 0 \times D| + |I \times D| &\leq |C| + 3|D|, \\ |I \times A|^b &\leq 3(|A|^b + \varepsilon), \end{aligned}$$

и первое неравенство в (1) следует отсюда для рассматриваемого нами случая.

Для произвольной бемольной цепи  $A$  положим  $A = \lim^b A_i$ ,  $|A| = \lim |A_i|$ , где  $A_i$  — полиэдральные цепи. Тогда, пользуясь первым неравенством в (1), мы видим, что  $\lim^b (I \times A_i)$  существует и однозначно определяет некоторую бемольную цепь, которую мы обозначим через  $I \times A$ ; при этом первое неравенство в (1) продолжает выполняться; для второго соотношения в (1) показано лишь неравенство  $\leq$ .

Остающееся неравенство можно доказать следующим образом. Если дана  $r$ -мерная бемольная коцепь  $X$  в  $E^n$ , то, полагая,

$$(2) \quad D_Y(p) = e^{n+1} \vee D_X(p),$$

мы можем определить  $(r+1)$ -мерную бемольную коцепь  $Y$  в  $E^{n+1}$  [ср. (IX, 9)]. Тогда  $Y \cdot (I \times A) = X \cdot A$  и неравенство  $|I \times A| \geq |A|$  следует из (V, 16.3).

**Лемма 13а.** Пусть  $A$  — некоторая  $r$ -мерная бемольная цепь открытого множества  $R \subset E^n$ , пусть, далее,  $f_0$  и  $f_1$  — некоторые  $R$ -липшицевские отображения множества  $R$  в  $E^m$ , и пусть  $F$  — отображение цепи  $I \times A$  в  $E^m$ , определяемое деформацией (5.5) отображения  $f_0$  в отображение  $f_1$ . Тогда

$$(3) \quad |F(I \times A)| \leq \delta_{f_0, f_1} L^r |A|, \quad \text{если } \mathfrak{L}_{f_0, R}, \mathfrak{L}_{f_1, R} \leq L.$$

Пусть  $A = \lim_R^b A_i$ , где  $A_i$  — полиэдральные цепи в замкнутом множестве  $Q \subset R$ , причем  $\lim |A_i| = |A|$  (VIII, теорема 3С). Как и в (5.6),  $|J_F| \leq \delta_{f_0, f_1} L^r$  в клетках каждого из произведений  $I \times A_i$ ; поэтому, как в § 5 или (6.3), неравенство (3) выполняется для каждой цепи  $A_i$ . Так как  $\lim^b F(I \times A_i) = F(I \times A)$ , то отсюда следует (3).

**Теорема 13А.** Пусть  $f_0$  и  $f_1$  — некоторые  $R$ -липшицевские отображения открытого множества  $R \subset E^n$  в открытое множество  $S \subset E^m$ , и пусть  $A$  — бемольная  $r$ -мерная цепь множества  $R$ , для которой носители цепей  $f_0 A$  и  $f_1 A$  и цепей деформации  $F(I \times A)$ ,  $F(I \times \partial A)$  содержатся в  $S$ . Тогда

$$(4) \quad |f_1 A - f_0 A|_S^b \leq \delta_{f_0, f_1} (L^r |A| + L^{r-1} |\partial A|),$$

если  $\mathfrak{L}_{f_0 R}, \mathfrak{L}_{f_1 R} \leq L$ .

Цепи в  $S$  являются цепями множества  $S$  (теорема 7А). Пользуясь формулой (5.7) (для отображения  $F$ ) и неравенством (3), мы получаем неравенство (4).

Отметим, что условие (4) выражает непрерывность более сильного типа, чем условие (7.12). Мы не можем ожидать такой непрерывности в общем случае, что можно показать с помощью примера.

**Пример.** Положим  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin b_i x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , где  $a_i$  и  $b_i$  подобраны таким образом, чтобы функция  $\varphi(x)$  была недифференцируемой; эта функция определяет некоторую одномерную бемольную цепь  $A = \varphi$  в  $E^1$ . Пусть  $e$  — единичный вектор в  $E^1$ ; как легко видеть, не существует такого числа  $c$ , что

$$|T_{he} A - A|^b = |T_{he} A - A| \leq c |h| \quad \text{для всех } h.$$

## XI. Цепи и аддитивные функции множеств

В этой главе все рассматриваемые цепи будут дизъюнктными цепями конечной массы. Для данной  $r$ -мерной цепи  $A$  функция  $\Lambda_A(D_X) = X \cdot A$  дизъюнктной  $r$ -формы  $D_X$  [см. (V. 10)] линейна и удовлетворяет некоторому условию непрерывности. Основная теорема главы (теорема 11A) утверждает, что существует соответствующая аддитивная функция множества  $\gamma_A$ , которая с помощью интегрирования дает ту же самую функцию дизъюнктной  $r$ -формы

$$X \cdot A = \Lambda_A(D_X) = \int_E D_X \cdot d\gamma_A \text{ для всех дизъюнктных коцепей } X.$$

Значениями  $\gamma_A(Q)$  являются  $r$ -векторы; интеграл, таким образом, является обобщением обычного интеграла Лебега — Стильтьеса. Хотя нужная нам теория интегрирования является стандартной, ее не легко изложить в форме, наиболее подходящей для наших целей. Поэтому первая часть главы посвящена построению требуемой теории.

Сначала излагаются основные свойства аддитивных функций множества  $\gamma$  со значениями в конечномерном банаховом пространстве; вариация  $\bar{\gamma}$  функции множества  $\gamma$  является действительной функцией. Затем рассматриваются определение и элементарные свойства интеграла  $\int_Q \xi \cdot d\gamma$  по борелевским множествам  $Q$ . Как

функция от  $Q$  он аддитивен; мы обозначаем его символом  $\xi \cdot \gamma$ . В этих обозначениях формула  $\int \xi \cdot d(\psi \cdot \gamma) = \int (\xi \cdot \psi) \cdot d\gamma$  становится ассоциативным законом:  $\xi \cdot (\psi \cdot \gamma) = (\xi \cdot \psi) \cdot \gamma$ . В § 5 мы показываем, что функция множества может быть представлена как интеграл относительно ее вариации, и обратно.

Следующие параграфы посвящены доказательству того, что линейный функционал, удовлетворяющий некоторым условиям, задается интегралом; мы рассматриваем сначала неотрицательные функционалы, затем функционалы с действительными значениями, затем общий случай. После этого мы определяем дизъюнктную норму  $|\gamma|^\#$  функции множества  $\gamma$  и рассматриваем молекулярные функции множества; их свойства аналогичны свойствам молекулярных цепей.

Теорема существования и свойства функций множества  $\gamma_A$  легко выводятся из упомянутой выше теоремы о функционалах; кроме того, дизельные нормы  $|A|^\#$ ,  $|\gamma_A|^\#$  равны, а масса цепи  $A$  равна полной вариации функции  $\gamma_A$ . С помощью этой теоремы легко устанавливаются аналитические свойства цепей  $A$ , в частности произведений  $\varphi A$ , и тем самым обобщаются различные факты из гл. VII. „Часть  $A_Q$  цепи  $A$  в борелевском множестве  $Q$ “ можно определить как произведение  $\chi_Q A$ , где  $\chi_Q$  — характеристическая функция множества  $Q$  (§ 13);  $r$ -вектор  $\{A_Q\}$  этой цепи (VII, 6) в точности совпадает с  $\gamma_A(Q)$ . Связь непрерывных цепей (VI, 7) с  $r$ -вектор-функциями множества приобретает новый смысл.

Дизельная норма  $|\gamma|^\#$  характеризуется в § 15 внутренним образом, подобно тому, как норма  $|A|^\#$  характеризуется в (V, 8). Прямое определение нормы  $|\gamma|^\#$  (для компактных функций множества  $\gamma$ ), аналогичное определению нормы  $|A|^\#$  для полиэдральных цепей  $A$ , данному в (V, 6), более затруднительно. Оно получается с помощью „взрыва“ функции множества  $\gamma$ , разбивающего ее на куски, и перемещения этих кусков. Показано, что некоторые другие определения нормы  $|\gamma|^\#$  не пригодны.

Так как бемольные цепи являются дизельными, то все результаты имеют силу и для них; однако вопрос о том, что можно о них сказать помимо этого, мы полностью оставляем без ответа. См., например, проблему в § 11. Изучение структуры бемольных цепей представляет собой глубокую и важную задачу. См. в связи с этим теорему (VIII, 5A).

**1. О конечномерных банаховых пространствах.** При изучении функций множества, значениями которых являются элементы конечномерного банахова пространства  $V$ , нам понадобятся две следующие теоремы.

*Теорема 1A. Для данного пространства  $V$  существует число  $\eta > 0$ , обладающее следующим свойством. Пусть  $v_1, \dots, v_k$  — произвольное конечное множество элементов из  $V$ . Тогда существует такое его подмножество  $v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_r}$ , что*

$$(1) \quad |\sum v_{\lambda_j}| \geq \eta \sum |v_i|.$$

Пусть  $S$  — единичная сфера в  $V$  (множество всех элементов  $v$ , для которых  $|v| = 1$ ). Ее можно покрыть конечным числом множеств  $S_1, \dots, S_m$  диаметра  $\leq 1/2$ . Положим  $\eta = 1/(2m)$ . Если теперь даны элементы  $v_1, \dots, v_k$ , то мы можем выбрать такой номер  $h$ ,

что если  $v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_t}$  — те из этих элементов, для которых некоторое их положительное кратное содержится в  $S_h$ , то

$$\sum |v_{\lambda_j}| \geq \sum \frac{|v_i|}{m}.$$

Пусть, скажем,

$$v_{\lambda_j} = a_{\lambda_j} v'_{\lambda_j}, \quad v'_{\lambda_j} \in S_h, \quad a_{\lambda_j} = |v_{\lambda_j}|.$$

Выберем  $u \in S_h$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum v_{\lambda_j} \right| &= \left| \sum a_{\lambda_j} u + \sum a_{\lambda_j} (v'_{\lambda_j} - u) \right| \geq \\ &\geq \left| \sum a_{\lambda_j} u \right| - \sum a_{\lambda_j} |v'_{\lambda_j} - u| \geq \sum a_{\lambda_j} - \frac{1}{2} \sum a_{\lambda_j} = \\ &= \frac{1}{2} \sum |v_{\lambda_j}| \geq \eta \sum |v_i|. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что для некоторой совокупности непустых замкнутых множеств мы можем разумным образом из каждого из этих множеств выбрать по точке. *Борелевской функцией* называется такая функция  $\varphi$ , что для каждого борелевского множества  $Q$  прообраз  $\varphi^{-1}(Q)$  является борелевским множеством.

*Лемма 1а.* Пусть  $V_1$  и  $V_2$  — векторные пространства и  $S$  — некоторое замкнутое подмножество декартова произведения  $V_1 \times V_2$ . Пусть  $S(p)$  для точки  $p \in V_1$  есть множество точек  $q \in V_2$ , для которых  $(p, q) \in S$ . Предположим, что при  $p \in P$  множество  $S(p)$  не пусто. Тогда существует такая борелевская функция  $\varphi(p)$  ( $p \in P$ ) со значениями в пространстве  $V_2$ , что  $\varphi(p) \in S(p)$ .

Пусть  $f(t)$  — непрерывное отображение полупрямой  $t \geq 0$  на все пространство  $V_2$  („кривая Пеано“). Упорядочим с помощью этого отображения точки пространства  $V_2$ . Пусть  $\varphi(p)$  — первая точка множества  $S(p)$ . Иными словами, мы можем для точек  $p \in P$  по определению положить

$$\tau(p) = \inf \{t : f(t) \in S(p)\}, \quad \varphi(p) = f(\tau(p)).$$

Функция  $\tau$  полунепрерывна снизу. В самом деле, допустим, что  $p_i \rightarrow p$ ,  $t_i = \tau(p_i) \rightarrow t$ . Тогда  $q_i = f(t_i) \in S(p_i)$ ,  $q_i \rightarrow q = f(t)$  и, так как  $(p_i, q_i) \in S$ , то мы имеем  $(p, q) \in S$ . Поэтому  $q = f(t) \in S(p)$  и  $\tau(p) \leq t$ . Отсюда легко видеть, что  $\tau$  является борелевской функцией. Поскольку  $f$  — непрерывное отображение, борелевской функцией является и  $\varphi$ .

В векторном пространстве со скалярным произведением для каждого вектора  $v \neq 0$  существует единственный такой вектор  $\varphi(v)$ , что  $|\varphi(v)| = 1$ ,  $\varphi(v) \cdot v = |v|$ ; именно,  $\varphi(v) = v/|v|$ . В конечно-

мерном банаховом пространстве  $V$  справедлива следующая более слабая теорема:

**Теорема 1В.** *Для данного пространства  $V$  существует такая борелевская функция  $\varphi$ , определенная в  $V$  и принимающая значения в сопряженном пространстве  $\bar{V}$ , что*

$$(2) \quad |\varphi(v)| = 1, \quad \varphi(v) \cdot v = |v| \quad (v \in V).$$

Пусть  $S$  — множество всех пар  $(v, f) \in V \times \bar{V}$ , для которых

$$|f| = 1, \quad f \cdot v = |v|.$$

Тогда  $S$  замкнуто. Пусть  $S(v)$  — множество всех функционалов  $f$ , для которых  $(f, v) \in S$ . В силу леммы (П. I, 8b) множество  $S(v)$  не пусто. Лемма 1а показывает, что функция  $\varphi$  существует.

**Замечание.** Как было указано в замечании в параграфе (I, 13), функция  $\varphi$ , вообще говоря, определяется не единственным образом.

**2. Аддитивные функции множества со значениями в векторном пространстве.** Под *борелевским разбиением* борелевского множества  $Q \subset E^n = E$  мы понимаем представление множества  $Q$  в виде объединения  $\bigcup Q_i$  конечной или бесконечной последовательности попарно не пересекающихся борелевских множеств  $Q_i$ .

Пусть  $V$  — конечномерное банахово пространство. Под *аддитивной функцией множества в пространстве  $E$  со значениями в  $V$*  мы понимаем функцию  $\gamma(Q)$  от борелевских множеств  $Q \subset E$ , для которой  $\gamma(Q) \in V$  и

$$(1) \quad \gamma(Q) = \sum \gamma(Q_i) \text{ для борелевских разбиений } Q = \bigcup Q_i,$$

причем сумма ряда всегда существует в метрике пространства  $V$ .

Отметим следующий элементарный факт (Сакс, стр. 21):

$$(2) \quad \gamma(\lim Q_i) = \lim \gamma(Q_i), \text{ если } Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \text{ или } Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$$

*Вариация*  $\bar{\gamma}$  функции  $\gamma$  есть действительная функция множества, определяемая условием

$$(3) \quad \bar{\gamma}(Q) = \sup \left\{ \sum |\gamma(Q_i)| : \begin{array}{l} \text{борелевские разбиения} \\ \text{множества } Q \end{array} \bigcup Q_i \right\}.$$

Очевидно,

$$(4) \quad |\gamma(Q)| \leq \bar{\gamma}(Q).$$

Мы могли бы в (3) ограничиться только конечными разбиениями. В самом деле, если  $\bar{\gamma}'$  — получающаяся в результате функция, то, очевидно,  $\bar{\gamma}'(Q) \leq \bar{\gamma}(Q)$ . Чтобы доказать обратное неравен-

ство, возьмем любое борелевское разбиение  $\bigcup Q_i$  множества  $Q$ . Тогда для каждого  $m$

$$\sum_{i=1}^m |\gamma(Q_i)| \leq \sum_{i=1}^m |\gamma(Q_i)| + \left| \gamma \left( \bigcup_{i=m+1}^{\infty} Q_i \right) \right| \leq \bar{\gamma}'(Q),$$

и при  $m \rightarrow \infty$  мы видим, что  $\bar{\gamma}(Q) \leq \bar{\gamma}'(Q)$ .

Мы должны доказать, что  $\bar{\gamma}(Q)$  конечно. Допустим, что это не так. Тогда (ср. Сакс, стр. 24) мы выберем борелевские множества  $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$ , для которых

$$(5) \quad \bar{\gamma}(Q_i) = \infty, \quad |\gamma(Q_i)| \geq i - 1.$$

Положим  $Q_1 = Q$ . Допустим, что множества  $Q_1, \dots, Q_n$  уже построены. Так как  $\bar{\gamma}(Q_k) = \infty$ , то мы можем найти такое конечное борелевское разбиение  $Q_k = \bigcup_i Q_{ki}$ , что

$$\sum_i |\gamma(Q_{ki})| \geq \frac{\gamma(Q_k) + k}{\eta},$$

где  $\eta$  — число, определяемое по теореме 1А. Существуют такие подмножества  $Q_{k\lambda_j}$  множеств  $Q_{ki}$  соответственно, что

$$\left| \gamma \left( \bigcup_j Q_{k\lambda_j} \right) \right| = \left| \sum_j \gamma(Q_{k\lambda_j}) \right| \geq |\gamma(Q_k)| + k.$$

Положим  $Q' = \bigcup_j Q_{k\lambda_j}$ . Если  $\bar{\gamma}(Q') = \infty$ , то мы можем положить

$Q_{k+1} = Q'$ . Если же это не так, то мы полагаем  $Q_{k+1} = Q_k \setminus Q'$ . Тогда, очевидно,  $\bar{\gamma}(Q_{k+1}) = \infty$  (см. ниже доказательство аддитивности) и  $|\gamma(Q_{k+1})| \geq |\gamma(Q')| - |\gamma(Q_k)| \geq k$ .

Положим  $Q^* = \lim Q_k$ . Тогда в силу (2)

$$|\gamma(Q^*)| = |\lim \gamma(Q_k)| = \lim |\gamma(Q_k)| = \infty;$$

полученное противоречие показывает, что  $\bar{\gamma}(Q)$  конечно.

Теперь докажем, что  $\bar{\gamma}$  удовлетворяет условию (1); тем самым будет показано, что  $\bar{\gamma}$  есть (конечная) борелевская мера. Возьмем любое борелевское множество  $Q$  и любое борелевское разбиение  $Q = \bigcup Q_i$ . Сначала мы докажем, что  $\bar{\gamma}(Q) \leq \sum \bar{\gamma}(Q_i)$ . Пусть  $Q = \bigcup Q'_j$  — произвольное борелевское разбиение множества  $Q$ . Положим  $Q_{ij} = Q_i \cap Q'_j$ . Тогда  $\bigcup_j Q_{ij}$  есть борелевское разбиение

множества  $Q_i$ , и поэтому  $\sum_j |\gamma(Q_{ij})| \leq \bar{\gamma}(Q_i)$ . Следовательно,

$$\sum_j |\gamma(Q'_j)| = \sum_j \left| \sum_i \gamma(Q_{ij}) \right| \leq \sum_{i,j} |\gamma(Q_{ij})| \leq \sum_i \bar{\gamma}(Q_i),$$

как и требовалось. Чтобы доказать обратное неравенство, выберем по заданному  $\varepsilon > 0$  такие борелевские разбиения  $Q_i = \bigcup_j Q_{ij}$ , что

$$\sum_j |\gamma(Q_{ij})| > \bar{\gamma}(Q_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Теперь  $\bigcup_{i,j} Q_{ij}$  есть борелевское разбиение множества  $Q$ , и  $\sum_{i,j} |\gamma(Q_{ij})| > \sum_i \bar{\gamma}(Q_i) - \varepsilon$ , откуда и следует требуемый результат.

*Лемма 2а. Пусть даны любое борелевское множество  $Q$  и число  $\varepsilon > 0$ . Тогда существуют такое компактное множество  $P \subset Q$  и такое открытое множество  $R \supset Q$ , что для любого борелевского множества  $Q'$*

$$(6) \quad |\gamma(Q') - \gamma(Q)| < \varepsilon, \quad \text{если } P \subset Q' \subset R.$$

Мы можем выбрать  $P$  и  $R$  (ср. Сакс, стр. 108; Халмош' стр. 180) так, чтобы числа  $\bar{\gamma}(Q \setminus P)$  и  $\bar{\gamma}(R \setminus Q)$  были  $< \varepsilon/2$ . Тогда

$$\begin{aligned} |\gamma(Q') - \gamma(Q)| &= |\gamma(Q' \setminus Q) - \gamma(Q \setminus Q')| \leq \\ &\leq \bar{\gamma}(Q' \setminus Q) + \bar{\gamma}(Q \setminus Q') \leq \bar{\gamma}(R \setminus P) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Полное значение  $|\gamma|$  и полная вариация  $|\gamma|$  функции множества  $\gamma$  определяются соотношениями

$$(7) \quad |\gamma| = \gamma(E), \quad |\gamma| = [\bar{\gamma}] = \bar{\gamma}(E).$$

Если  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  — аддитивные функции множества со значениями в  $V$ , то мы можем определить аддитивную функцию множества

$$(8) \quad \gamma = \sum a_i \gamma_i: \gamma(Q) = \sum a_i \gamma_i(Q).$$

Аддитивные функции множества образуют теперь линейное пространство, и  $[\sum a_i \gamma_i] = \sum a_i [\gamma_i]$ .

**3. Интегралы со значениями в векторном пространстве.** Пусть  $V$ ,  $V'$  и  $V''$  — конечномерные банаховы пространства, и пусть  $v' \cdot v = v''$  — билинейное умножение пары пространств  $V', V$  со значениями в  $V''$ , причем

$$(1) \quad |v' \cdot v| \leq |v'| |v|.$$

Мы будем рассматривать главным образом следующие два случая:

(а)  $V' =$  пространству действительных чисел и  $V'' = V$ ;  $a \cdot v = av$ .

(б)  $V' =$  пространству  $\bar{V}$ , сопряженному к  $V$ , и  $V'' =$  пространству действительных чисел. В частности, для векторного пространства  $W = V(E)$  (П. I, 10) мы можем взять  $V = W_{[r]}$ ,  $V' = W^{[r]}$  и в качестве  $v' \cdot v$  рассматривать умножение из (I, 2.2); нормы, которыми мы здесь пользуемся, это — масса и комасса. См. (I, 13.4).

Пусть  $\gamma$  — некоторая аддитивная функция множества в  $E$  со значениями в  $V$ . Мы определим интеграл  $\int_R \xi \cdot d\gamma$  со значениями

в  $V''$ , где  $\xi$  — любая ограниченная борелевская функция со значениями в  $V'$ , определенная по крайней мере в борелевском множестве  $R \subset E$ .

Допустим сначала, что  $\xi$  — ступенчатая борелевская функция; это значит, что существует конечное борелевское разбиение  $R = Q_1 \cup \dots \cup Q_m$  и такие элементы  $\xi_1, \dots, \xi_m$  пространства  $V'$ , что  $\xi(p) = \xi_i$  при  $p \in Q_i$ . В этом случае мы по определению полагаем

$$(2) \quad \int_R \xi \cdot d\gamma = \sum_i \xi_i \cdot \gamma(Q_i).$$

Теперь рассмотрим общий случай. Для всякого  $\varepsilon > 0$  мы определим множество  $\Phi_\varepsilon \subset V''$ . Элемент  $v''$  пространства  $V''$  принадлежит  $\Phi_\varepsilon$ , если верно следующее. Существует борелевское множество  $S \subset V'$ , содержащее все значения  $\xi(p)$ , и борелевское разбиение  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$ , где каждое множество  $S_i$  имеет диаметр  $< \varepsilon$ ; существует элемент  $\xi_i \in S_i$  и

$$(3) \quad v'' = \sum_i \xi_i \cdot \gamma(Q_i), \quad Q_i = \xi^{-1}(S_i) \cap R.$$

Заметим, что мы можем выбрать  $p_i \in Q_i$  (если  $Q_i \neq 0$ ) и взять  $\xi_i = \xi(p_i)$ .

Докажем, что

$$(4) \quad \text{diam}(\Phi_\varepsilon) \leq 2\varepsilon \bar{\gamma}(R).$$

В самом деле, возьмем два элемента  $\Phi_\varepsilon$ , определяемые системами  $(S_1, \dots, S_k, \xi_1, \dots, \xi_k)$  и  $(S'_1, \dots, S'_l, \xi'_1, \dots, \xi'_l)$  соответственно. Положим

$$S_{ij} = S_i \cap S'_j, \quad Q_{ij} = \xi^{-1}(S_{ij}) \cap R$$

и при  $S_{ij} \neq 0$  выберем точки  $\xi_{ij} \in S_{ij}$ . Пусть символ  $\sum'_{i,j}$  обозначает сумму по всем парам  $(i, j)$ , для которых множество  $S_{ij}$

не пусто. Так как  $\bigcup_j Q_{ij}$  есть борелевское разбиение множества  $Q_i$  [мы опускаем пары  $(i, j)$ , для которых  $S_{ij} = 0$ ] и так как  $|\xi_{ij} - \xi_i| < \varepsilon$ , то мы находим

$$\left| \sum'_{i,j} \xi_{ij} \cdot \gamma(Q_{ij}) - \sum_i \xi_i \cdot \gamma(Q_i) \right| = \left| \sum'_{i,j} (\xi_{ij} - \xi_i) \cdot \gamma(Q_{ij}) \right| \leqslant \sum'_{i,j} |\xi_{ij} - \xi_i| \cdot |\gamma(Q_{ij})| \leqslant \varepsilon \bar{\gamma}(R).$$

Подобное же неравенство выполняется для  $S'_j$  и  $\xi'_j$ , откуда и следует (4).

Так как  $\Phi_\varepsilon \neq 0$  и  $\Phi_{\varepsilon'} \subset \Phi_\varepsilon$  при  $\varepsilon' < \varepsilon$ , то существует единственный элемент пространства  $V''$ , содержащийся в замыкании каждого множества  $\Phi_\varepsilon$ ; этот элемент и есть интеграл  $\int_R \xi \cdot d\gamma$ . Таким образом, интеграл есть предел аппроксимирующих сумм вида (3).

Легко устанавливаются простейшие свойства интегралов; например,

$$(5) \quad \left| \int_Q \xi \cdot d\gamma \right| \leqslant \int_Q \langle \xi \rangle d\bar{\gamma} \leqslant |\xi| \bar{\gamma}(Q) \leqslant |\xi| |\gamma|.$$

$$(6) \quad \int_Q \xi \cdot d\gamma = \xi_0 \cdot \gamma(Q), \text{ если } \xi(p) = \xi_0 \text{ в } Q.$$

$$(7) \quad \int_Q \xi \cdot d\gamma = \sum_{Q_i} \int_{Q_i} \xi \cdot d\gamma, \text{ если } \bigcup Q_i \text{ — борелевское разбиение}$$

множества  $Q$ .

Из этих свойств мы сразу видим, в какой мере сумма (3) аппроксимирует интеграл: для борелевских разбиений  $Q = \bigcup Q_i$

$$(8) \quad \left| \sum_i \xi_i \cdot \gamma(Q_i) - \int_Q \xi \cdot d\gamma \right| \leqslant \varepsilon \bar{\gamma}(Q), \text{ если } |\xi(p) - \xi_i| < \varepsilon \text{ в } Q_i.$$

Можно было бы, конечно, определить интеграл, вводя в банаховых пространствах системы координат и сводя таким образом определение интеграла к действительному случаю.

Если даны функция множества  $\gamma$  и ограниченная борелевская функция  $\xi$ , то мы определим функцию множества  $\xi \cdot \gamma$ , полагая

$$(9) \quad (\xi \cdot \gamma)(Q) = \int_Q \xi \cdot d\gamma; \quad \text{тогда } [\xi \cdot \gamma] = \int_E \xi \cdot d\gamma.$$

Очевидно,  $\xi \cdot \gamma$  и  $[\xi \cdot \gamma]$  являются билинейными функциями от  $\xi$  и  $\gamma$ .

Для любого борелевского разбиения  $\bigcup Q_i$  множества  $Q$  на основании (5) и (7) мы получаем

$$\sum |(\xi \cdot \gamma)(Q_i)| \leq \sum_{Q_i} \int \langle \xi \rangle d\bar{\gamma} = \int_Q \langle \xi \rangle d\bar{\gamma};$$

отсюда следуют неравенства для вариации

$$(10) \quad \overline{\gamma \cdot \xi}(Q) \leq \int_Q \langle \xi \rangle d\bar{\gamma}, \quad |\xi \cdot \gamma| \leq \int_E \langle \xi \rangle d\bar{\gamma} = [\langle \xi \rangle \cdot \bar{\gamma}].$$

Здесь может и не быть равенства, например, если  $(e_1, e_2)$  — базис в  $V$  и  $(e^1, e^2)$  — взаимный базис, а значения функций  $\gamma$  и  $\xi$  идут в направлении элементов  $e_1$  и  $e^2$  соответственно. См., однако, формулу (4.2) ниже.

Каждая функция множества  $\gamma$  определяет в пространстве ограниченных борелевских функций  $\xi$  некоторую полунорму:

$$(11) \quad \|\xi\|_\gamma = |\xi \cdot \gamma|.$$

Можно было бы определить  $\gamma$ -измеримые функции, подобно функциям, измеримым по Лебегу; нам это понадобится лишь в случае мер  $\gamma$ :  $\gamma(Q) \geq 0$ .

*Лемма 3а.* Пусть даны функция множества  $\gamma$ , ограниченная борелевская функция  $\xi$  и число  $\varepsilon > 0$ . Тогда существует такая ступенчатая борелевская функция  $\eta$ , что

$$(12) \quad \|\eta - \xi\|_\gamma \leq \int_E \langle \eta - \xi \rangle d\bar{\gamma} < \varepsilon, \quad |\eta| \leq |\xi|;$$

существует также дизъюнктная функция  $\eta$ , обладающая этим свойством.

Для ступенчатых борелевских функций это утверждение является простым следствием определения интеграла. Найдем дизъюнктную функцию  $\eta$ , предполагая, что  $\xi$  является ступенчатой борелевской функцией; ср. Халмош, стр. 235—236.

Пусть, скажем,  $E = Q_1 \cup \dots \cup Q_m$ ,  $\xi(p) = \xi_i$  в  $Q_i$ . Выберем такие компактные множества  $Q'_i \subset Q_i$ , что

$$\bar{\gamma}(Q_i \setminus Q'_i) < \frac{\varepsilon}{mN}, \quad N = \sup \{ |\xi_i| \}.$$

При некотором  $\zeta > 0$  множества  $U_\zeta(Q'_i)$  попарно не пересекаются. Пусть  $\varphi_i$  — такая действительная дизъюнктная функция, что  $0 \leq \varphi_i(p) \leq 1$ ,  $\varphi_i = 1$  в  $Q'_i$  и  $\varphi_i = 0$  вне  $U_\zeta(Q'_i)$  (П. III, лемма 1а). Положим

$$\eta_i(p) = \varphi_i(p) \xi_i, \quad \eta(p) = \sum \eta_i(p).$$

Тогда  $\eta$  — дизъюнктивная функция, и так как  $\eta(p) = \xi_i$  в  $Q'_i$  и  $|\eta(p)| \leq N$ , то мы находим

$$\int_E \langle \eta - \xi \rangle d\bar{\gamma} \leq \sum_{Q_i \setminus Q'_i} \int N d\bar{\gamma} \leq N \sum \bar{\gamma}(Q_i \setminus Q'_i) < \varepsilon.$$

Замечание. Вообще говоря, мы не можем получить функцию  $\eta$  из  $\xi$  посредством сглаживания, как в (П. III, 3), если  $\bar{\gamma}$  не является абсолютно непрерывной функцией множества относительно меры Лебега.

**4. Умножение функций множества на функции точки.** Если даны функция множества  $\gamma$  и действительная ограниченная борелевская функция  $\varphi$ , то мы определим функцию множества  $\varphi\gamma = \varphi \cdot \gamma$  по формуле (3.9). В частности, если  $\chi_Q$  — характеристическая функция множества  $Q$  (равная единице на  $Q$  и нулю на  $E \setminus Q$ ), то

$$(1) \quad \chi_Q \gamma(P) = \gamma(Q \cap P), \quad [\chi_Q \gamma] = \gamma(Q).$$

Выведем следующие соотношения для вариации функции  $\varphi\gamma$ :

$$(2) \quad \overline{\varphi\gamma} = \langle \varphi \rangle \bar{\gamma}, \quad \overline{\varphi\gamma}(Q) \leq |\varphi| \bar{\gamma}(Q), \quad \varphi — действительная функция.$$

То, что в первом из этих соотношений (для любого  $Q$ ) имеет место знак  $\leq$ , было доказано в (3.10). Чтобы доказать обратное неравенство, возьмем любое  $\varepsilon > 0$ . Мы можем выбрать такое борелевское разбиение  $Q = \bigcup Q_i$ , что  $\sum |\gamma(Q_i)| \geq \bar{\gamma}(Q) - \varepsilon$  и  $|\varphi(p) - \varphi(p_i)| \leq \varepsilon$  в  $Q_i$  для некоторой точки  $p_i \in Q_i$  (при каждом  $i$ ). Пусть, скажем,

$$|\gamma(Q_i)| = \bar{\gamma}(Q_i) - \eta_i;$$

тогда  $\sum \eta_i \leq \varepsilon$ . Пользуясь неравенством (3.8), получаем

$$|\varphi\gamma(Q_i) - \varphi(p_i)\gamma(Q_i)| \leq \varepsilon \bar{\gamma}(Q_i),$$

$$||\varphi(p_i)| \bar{\gamma}(Q_i) - \langle \varphi \rangle \bar{\gamma}(Q_i)| \leq \varepsilon \bar{\gamma}(Q_i),$$

$$||\varphi(p_i)\gamma(Q_i)| - |\varphi(p_i)| \bar{\gamma}(Q_i)| = |\varphi(p_i)| \eta_i,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \overline{\varphi\gamma}(Q) &\geq \sum |\varphi\gamma(Q_i)| \geq \sum [|\langle \varphi \rangle \bar{\gamma}(Q_i) - 2\varepsilon \bar{\gamma}(Q_i) - |\varphi| \eta_i] \geq \\ &\geq \langle \varphi \rangle \bar{\gamma}(Q) - 2\varepsilon \bar{\gamma}(Q) - \varepsilon |\varphi|, \end{aligned}$$

откуда и вытекает требуемое неравенство. Второе из соотношений (2) следует из доказанного равенства,

Мы докажем (ср. Сакс, стр. 61; Халмош, стр. 133), что

$$(3) \quad \int_Q \xi \cdot d(\varphi\gamma) = \int_Q \varphi\xi \cdot d\gamma; \text{ таким образом, } \xi \cdot \varphi\gamma = \varphi\xi \cdot \gamma.$$

Если задано  $\varepsilon > 0$ , то мы выберем разбиение  $Q = \bigcup Q_i$  и точки  $p_i \in Q_i$  так, чтобы было

$$|\xi(p) - \xi(p_i)| \leq \varepsilon, \quad |\varphi(p) - \varphi(p_i)| \leq \varepsilon \text{ в } Q_i, \text{ при каждом } i.$$

Тогда  $|\varphi(p)\xi(p) - \varphi(p_i)\xi(p_i)| \leq (|\varphi| + |\xi|)\varepsilon$  в  $Q_i$  и

$$\begin{aligned} \left| \int_Q \xi \cdot d(\varphi\gamma) - \sum \xi(p_i) \cdot \varphi\gamma(Q_i) \right| &\leq \varepsilon \bar{\varphi\gamma}(Q) \leq \varepsilon |\varphi| \bar{\gamma}(Q), \\ \left| \int_Q \varphi\xi \cdot d\gamma - \sum \varphi(p_i)\xi(p_i) \cdot \gamma(Q_i) \right| &\leq \varepsilon (|\varphi| + |\xi|) \bar{\gamma}(Q), \\ \left| \sum \xi(p_i) \cdot [\varphi\gamma(Q_i) - \varphi(p_i)\gamma(Q_i)] \right| &\leq \\ &\leq |\xi| \sum_{Q_i} \langle \varphi - \varphi(p_i) \rangle d\bar{\gamma} \leq \varepsilon |\xi| \bar{\gamma}(Q); \end{aligned}$$

поэтому

$$\left| \int_Q \xi \cdot d(\varphi\gamma) - \int_Q \varphi\xi \cdot d\gamma \right| \leq 2\varepsilon (|\varphi| + |\xi|) \bar{\gamma}(Q),$$

и мы получаем (3).

**Замечание.** Равенство (3), очевидно, выполняется в более общем случае:  $\xi$ ,  $\psi$  и  $\gamma$  принимают значения в векторных пространствах  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  соответственно (причем  $\xi$  и  $\psi$  — борелевские функции точки, а  $\gamma$  — аддитивная функция множества) и произведения  $(v_1 \cdot v_2) \cdot v_3$  и  $v_1 \cdot (v_2 \cdot v_3)$  определены и совпадают. Тогда  $\xi \cdot (\psi \cdot \gamma) = (\xi \cdot \psi) \cdot \gamma$ .

Укажем некоторые соотношения, содержащие пределы. Мы будем писать

$$(4) \quad \lim \gamma_i = \gamma, \text{ если } \lim \gamma_i(Q) = \gamma(Q) \text{ для всех борелевских множеств } Q.$$

$$(5) \quad \lim \uparrow \varphi_i = \varphi \text{ или же } \varphi_i \uparrow \varphi, \text{ если } \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \text{ и } \lim \varphi_i = \varphi;$$

подобным же образом мы определяем символ  $\varphi_i \downarrow \varphi$ .

Если  $(\varphi - \varphi_i) \downarrow 0$ , то

$$|\varphi\gamma(Q) - \varphi_i\gamma(Q)| = \left| \int_Q (\varphi - \varphi_i) d\gamma \right| \leq \int_Q \langle \varphi - \varphi_i \rangle d\bar{\gamma} \rightarrow 0$$

(ср. Сакс, стр. 47; Халмош, стр. 113); следовательно,

$$(6) \quad \lim \varphi_i \gamma = \varphi \gamma, \quad \text{если } \varphi_i \uparrow \varphi \quad \text{или} \quad \varphi_i \downarrow \varphi.$$

Поэтому, используя (2), мы получаем для действительных ограниченных борелевских функций  $\varphi_i$  и  $\varphi$

$$(7) \quad \overline{\varphi \gamma} = \overline{\varphi} \gamma = \sum \varphi_i \gamma = \sum \overline{\varphi_i \gamma}, \quad \text{если } \sum \varphi_i = \varphi, \quad \varphi_i \geq 0.$$

В частности,

$$(8) \quad |\gamma| = \sum |\chi_{Q_i} \gamma| \quad \text{для борелевских разбиений } \bigcup Q_i \text{ пространства } E.$$

Для ограниченных борелевских функций  $\xi_i$ ,  $\xi$ ,  $\varphi_i$ ,  $\varphi$  мы имеем

$$(9) \quad \lim \xi_i \cdot \gamma = \xi \cdot \gamma, \quad \text{если } \xi_i \rightarrow \xi, \quad |\xi_i| \leq N \quad \text{при всех } i,$$

$$(10) \quad \lim \varphi_i \gamma = \varphi \gamma, \quad \text{если } \varphi_i \rightarrow \varphi, \quad |\varphi_i| \leq N \quad \text{при всех } i,$$

где  $N$  — некоторое число. Например, если  $\eta_i = \xi - \xi_i$ , то

$$|(\eta_i \cdot \gamma)(Q)| \leq ((\eta_i) \gamma)(Q) \rightarrow 0$$

(Сакс, стр. 50—51; Халмош, стр. 111).

**5. Связь между функцией множества и ее вариацией.** Мы хотим выразить каждую из функций  $\gamma$ ,  $\bar{\gamma}$  как интеграл относительно другой. Мы будем писать  $\xi = \eta$  п. в. ( $\mu$ ), где  $\mu$  — некоторая мера, если множество  $Q$  точек, в которых  $\xi(p) \neq \eta(p)$ , удовлетворяет условию  $\mu(Q) = 0$ .

**Теорема 5А.** Пусть так же, как в § 2, дана аддитивная функция множества  $\gamma$ . Тогда существует такая борелевская функция  $\Gamma(p)$  со значениями в  $V$ , что

$$(1) \quad \gamma(Q) = \int_Q \Gamma d\bar{\gamma} \quad \text{для всех борелевских множеств } Q: \gamma = \Gamma \bar{\gamma}.$$

$$(2) \quad |\Gamma(p)| = 1 \quad \text{в } E.$$

Функция  $\Gamma$  единственна с точностью до  $\bar{\gamma}$ -эквивалентности.

Выберем в пространстве  $V$  некоторый базис  $(e_1, \dots, e_m)$  и запишем

$$\gamma(Q) = \sum \gamma^i(Q) e_i;$$

тогда  $\gamma^i$  — аддитивные функции множества с действительными значениями и, очевидно, для некоторого  $N$

$$|\gamma^i(Q)| \leq N |\gamma(Q)| \leq N \bar{\gamma}(Q) \quad \text{при всех } i.$$

Следовательно, в силу теоремы Радона — Никодима (Сакс, стр. 59; Халмош, стр. 128) существуют  $\bar{\gamma}$ -измеримые функции  $\Gamma^i$ , удовлетворяющие условию (1) с  $\gamma^i$  вместо  $\gamma$ . Существует борелевская функция  $\Gamma_0 = \Gamma^i$  п. в. ( $\bar{\gamma}$ ) (Сакс, стр. 116—118). Тогда функция  $\Gamma'(p) = \sum \Gamma_0^i(p) e_i$  удовлетворяет условию (1). Обычное доказательство единственности показывает, что, как и утверждалось, функция  $\Gamma'$  единственна с точностью до  $\bar{\gamma}$ -эквивалентности.

Допустим, что условие  $|\Gamma'(p)| \geq 1$  п. в. ( $\bar{\gamma}$ ) не выполняется. Тогда для некоторого  $\varepsilon > 0$  существует такое борелевское множество  $Q$ , что  $\bar{\gamma}(Q) > 0$  и  $|\Gamma'(p)| \leq 1 - \varepsilon$  в  $Q$ . В таком случае для любого борелевского разбиения  $Q = \bigcup Q_i$

$$\sum |\gamma(Q_i)| \leq \sum \left| \int_{Q_i} (1 - \varepsilon) d\bar{\gamma} \right| = (1 - \varepsilon) \bar{\gamma}(Q),$$

в противоречии с определением числа  $\bar{\gamma}(Q)$ .

Допустим, наконец, что не выполняется условие  $\Gamma'(p) \leq 1$  п. в. ( $\bar{\gamma}$ ). Тогда существуют число  $\varepsilon > 0$ , борелевское подмножество  $S$  пространства  $V$  и элемент  $v \in S$ , для которых

$$|v| \geq 1 + \varepsilon, \quad \text{diam}(S) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

$$Q = \Gamma'^{-1}(S), \quad \bar{\gamma}(Q) > 0.$$

Теперь  $|\Gamma'(p) - v| \leq \varepsilon/2$  для точек  $p \in Q$ , и поэтому

$$\begin{aligned} |\gamma(Q)| &\geq \left| \int_Q v d\bar{\gamma}(p) \right| - \left| \int_Q [\Gamma'(p) - v] d\bar{\gamma}(p) \right| \geq \\ &\geq (1 + \varepsilon) \bar{\gamma}(Q) - \frac{\varepsilon}{2} \bar{\gamma}(Q) > \bar{\gamma}(Q), \end{aligned}$$

т. е. снова получаем противоречие. Следовательно,  $|\Gamma'| = 1$  п. в. ( $\bar{\gamma}$ ), и мы можем заменить функцию  $\Gamma'$  функцией  $\Gamma$ , для которой  $|\Gamma(p)| = 1$  в  $E$ .

Во второй теореме мы не можем применить теорему Радона — Никодима в ее обычной форме и уже не будем иметь единственности (см. замечание, сделанное после теоремы 1В).

**Теорема 5В.** Пусть  $\gamma$  — такая же, как и ранее, функция множества. Существует такая борелевская функция  $f$  в про-

пространстве  $E$  со значениями в пространстве  $\bar{V}$ , сопряженном к  $V$ , что

$$(3) \quad |f(p)| = 1, \quad \int_Q f \cdot d\gamma = \bar{\gamma}(Q) \quad \text{для всех борелевских}$$

множеств  $Q$ :  $\bar{\gamma} = f \cdot \gamma$ .

Определим функцию  $\varphi$  в соответствии с теоремой 1В и положим

$$(4) \quad \varphi f(p) = \varphi(\Gamma(p)).$$

Тогда  $f(p) \cdot \Gamma(p) = |\Gamma(p)| = 1$ , и формулы (1) и (4.3) вместе со следующим за второй из этих формул замечанием дают

$$f \cdot \gamma = f \cdot (\Gamma \cdot \bar{\gamma}) = (f \cdot \Gamma) \cdot \bar{\gamma} = \bar{\gamma}.$$

Мы выведем еще одну формулу для  $\bar{\gamma}$ :

**Теорема 5С.** Пусть  $\gamma$  — такая же, как и ранее, функция множества. Тогда

$$(5) \quad \bar{\gamma}(Q) = \sup \left\{ \int_Q f \cdot d\gamma : |f| \leq 1 \right\},$$

где  $f$  — борелевские функции точки со значениями в  $\bar{V}$ . Мы можем потребовать, чтобы  $f$  были ступенчатыми борелевскими функциями или же дизъюнктивными функциями в  $E$ . Если множество  $Q$  открыто, то мы можем потребовать, чтобы  $f$  были дизъюнктивными функциями, равными нулю вне  $Q$ .

Неравенство  $\geq$  в (5) в каждом из рассматриваемых случаев очевидно, а неравенство  $\leq$  для первоначальной формулировки следует из (3). То, что мы можем получить неравенство  $\leq$ , ограничиваясь ступенчатыми борелевскими функциями или же дизъюнктивными функциями, следует из леммы 3а. Чтобы доказать последнее утверждение (для неравенства  $\leq$ ), допустим, что множество  $Q$  открыто и зададим  $\varepsilon > 0$ .

Выберем такую функцию  $g_0$  (теорема 5В), что  $|g_0| = 1$  и  $\int g_0 \cdot d\gamma = \bar{\gamma}(Q)$ . Выберем дизъюнктивную функцию  $g_1$  в соответствии с леммой 3а так, чтобы было  $|g_1| \leq 1$  и  $\int_E (g_1 - g_0) \cdot d\bar{\gamma} < \varepsilon/2$ . Выберем, далее,

такое компактное множество  $Q' \subset Q$ , что  $\bar{\gamma}(Q \setminus Q') < \varepsilon/2$  (лемма 2а). Выберем, наконец, такую действительную дизъюнктивную функцию  $\varphi$  в  $E$ , что  $0 \leq \varphi(p) \leq 1$ ,  $\varphi = 1$  в  $Q'$  и  $\varphi = 0$  в  $E \setminus Q$  (П. III, лемма 1а), и положим  $f = \varphi g_1$ . Легко видеть, что  $\int_Q f \cdot d\gamma > \bar{\gamma}(Q) - \varepsilon$ .

**6. О положительных линейных функционалах.** Мы хотим показать, что некоторая линейная функция  $\Lambda$ , определенная на некотором классе функций  $\varphi$ , задается посредством интегрирования функций  $\varphi$  относительно меры Каратеодори. Это — обычная теорема в лебеговской теории. Пусть  $L^+$  обозначает множество действительных неотрицательных функций в  $E$ .

*Лемма 6а.* Пусть  $\Lambda$  — такая действительная неотрицательная функция, определенная на множестве  $L^+$ , что

$$(1) \quad \Lambda(a\varphi + b\psi) = a\Lambda(\varphi) + b\Lambda(\psi), \text{ если } a, b \geq 0; \quad \varphi, \psi \in L^+;$$

$$(2) \quad \lim \Lambda(\varphi_i) = 0, \text{ если } \varphi_i \downarrow 0.$$

Тогда существует единственным образом определенная мера Каратеодори  $\mu$  в  $E$ , для которой

$$(3) \quad \Lambda(\varphi) = \int \varphi d\mu \text{ при всех } \varphi \in L^+.$$

Заметим, что каждая такая мера  $\mu$  приводит к функции  $\Lambda$  указанного вида; см. (4.6).

Возьмем в (1)  $a = b = 1$ . Если мы положим  $\varphi = \psi = 0$ , то найдем  $\Lambda(0) = 0$ . Если же вместо  $\varphi, \psi$  мы подставим  $\varphi, \psi - \varphi$ , то получим

$$(4) \quad \Lambda(\varphi) \leq \Lambda(\psi), \text{ если } \varphi(p) \leq \psi(p).$$

Подставляя вместо  $\varphi, \psi$  функции  $\varphi_i, \varphi - \varphi_i$ , получаем

$$(5) \quad \Lambda(\varphi) = \lim \Lambda(\varphi_i), \text{ если } \varphi_i \uparrow \varphi, \quad \varphi_i, \varphi \in L^+.$$

Пусть  $L^*$  — множество всех ограниченных функций  $\varphi$ , представимых в виде  $\lim \uparrow \varphi_i, \varphi_i \in L^+$ . Положим

$$(6) \quad \Lambda(\varphi) = \lim \Lambda(\varphi_i), \text{ если } \varphi_i \uparrow \varphi, \quad \varphi_i \in L^+, \varphi \in L^*.$$

Так как  $\Lambda(\varphi_i) \leq \Lambda(\bar{\varphi})$  [ $\bar{\varphi}(p) = |\varphi|$  для всех точек  $p$ ], то предел  $\Lambda(\varphi)$  конечен. Он не зависит от выбора последовательности. В самом деле, пусть также  $\varphi'_i \uparrow \varphi$ . Положим  $\psi_{ij}(p) = \inf \{\varphi_i(p), \varphi'_j(p)\}$ . Тогда  $\psi_{ij} \uparrow \varphi'_j$  для всех  $j$ ; поэтому

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda(\varphi_i) \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda(\psi_{ij}) = \Lambda(\varphi'_j) \text{ при всех } j,$$

и, следовательно,  $\lim \Lambda(\varphi_i) \geq \lim \Lambda(\varphi'_j)$ . Подобным же образом доказывается обратное неравенство.

Очевидно, что условия (1) и (4) выполняются теперь при  $\varphi, \psi \in L^*$ ,

Характеристическая функция  $\chi_R$  любого открытого множества  $R$  принадлежит  $L^*$ . [Мы можем взять  $\varphi_i(p) = \inf \{t_p(p, E \setminus R), 1\}$ ; тогда  $\varphi_i \uparrow \chi_R$ .] Положим

$$(7) \quad \mu(R) = \Lambda(\chi_R).$$

Для любого множества  $Q$  его внешняя мера  $\mu^*(Q)$  определяется следующим равенством:

$$(8) \quad \mu^*(Q) = \inf \{\mu(R) : Q \subset R, R \text{ открыто}\}.$$

Очевидно,  $\mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2)$ , если  $Q_1 \subset Q_2$ , и  $\mu^*(R) = \mu(R)$ , если  $R$  открыто. Мы должны доказать (Сакс, глава II; Халмош, стр. 52 и гл. X), что

$$(9) \quad \mu^*\left(\bigcup Q_i\right) \leq \sum \mu^*(Q_i),$$

$$(10) \quad \mu^*(Q_1 \cup Q_2) = \mu^*(Q_1) + \mu^*(Q_2), \text{ если } \rho(Q_1, Q_2) > 0.$$

Если мы докажем эти утверждения для открытых множеств, то их легко будет получить и для общего случая. Предположим, что

$R = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ . Пусть  $\chi_{R_i} = \lim_{j \rightarrow \infty} \uparrow \psi_{ij}$ ,  $\psi_{ij} \in L^+$ . Положим

$$\varphi_j = \inf \{\psi_{1j} + \dots + \psi_{jj}, 1\}.$$

Тогда  $\varphi_j \uparrow \chi_R$ , так что  $\mu(R) = \lim \Lambda(\varphi_j)$ . Кроме того,

$$\Lambda(\varphi_j) \leq \Lambda(\psi_{1j} + \dots + \psi_{jj}) = \Lambda(\psi_{1j}) + \dots + \Lambda(\psi_{jj}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i),$$

и неравенство (9) следует отсюда для открытых множеств. Чтобы доказать для открытых множеств равенство (10) (нам нужно только, чтобы было  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ ), допустим, что  $\chi_{R_i} = \lim_{j \rightarrow \infty} \uparrow \psi_{ij}$ , и положим  $\varphi_j = \psi_{1j} + \psi_{2j}$ . Тогда, если  $R = R_1 \cup R_2$ , то  $\chi_R = \lim \uparrow \varphi_i$  и

$$\mu(R) = \lim \Lambda(\varphi_i) = \lim [\Lambda(\varphi_1) + \Lambda(\varphi_2)] = \mu(R_1) + \mu(R_2).$$

Таким образом,  $\mu^*$  есть внешняя мера Каратеодори. Мы будем писать  $\mu(Q) = \mu^*(Q)$  для  $\mu$ -измеримых множеств, в частности для борелевских множеств  $Q$ .

Чтобы доказать равенство (3), возьмем любое  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $R_i$  — множество точек  $p$ , в которых  $\varphi(p) > i\varepsilon$  ( $i = 0, 1, \dots$ ); тогда  $R_i$  открыто, и при некотором  $m$  множество  $R_m$  пусто. Положим

$$\psi(p) = \begin{cases} (i+1)\varepsilon & \text{при } p \in R_i \setminus R_{i+1}, \\ 0 & \text{при } p \in E \setminus R_0; \end{cases}$$

тогда

$$\psi(p) = \varepsilon \sum_{i=0}^m \chi_{R_i}(p), \quad \psi(p) - \varepsilon < \varphi(p) \leq \psi(p).$$

В силу (7)  $\Lambda(\chi_{R_i}) = \int \chi_{R_i} d\mu$ ; поэтому  $\Lambda(\psi) = \int \psi d\mu$ . Кроме того,

$$\Lambda(\psi) \leq \Lambda(\varphi) + \varepsilon\mu(E) \leq \Lambda(\psi) + \varepsilon\mu(E),$$

и те же самые неравенства выполняются для соответствующих интегралов. Это показывает, что

$$\left| \Lambda(\varphi) - \int \varphi d\mu \right| \leq \varepsilon\mu(E),$$

и равенство (3) доказано.

Из (3) ясно, что мера  $\mu$  должна быть такой, как построенная; следовательно, она единственна.

**7. Об ограниченных линейных функционалах.** Мы докажем лемму, аналогичную лемме 6а, рассматривая вместо  $L^+$  пространство  $\mathcal{C}^{\#0}$  всех действительных дизельных функций и предполагая, что выполняется некоторая другая гипотеза непрерывности. Связь между двумя гипотезами непрерывности устанавливается следующей леммой:

*Лемма 7а. Пусть  $\varphi_i \downarrow 0$  (функции  $\varphi_i$  непрерывны); тогда  $\varphi_i \rightarrow 0$  р. к. м. (равномерно на компактных множествах).*

Если даны компактное множество  $Q$  и число  $\varepsilon > 0$ , то пусть  $Q_i$  — множество точек  $p \in Q$ , в которых  $\varphi_i(p) \geq \varepsilon$ . Тогда  $\bigcap Q_i = \emptyset$  и, так как множества  $Q_i$  компактны, то некоторое  $Q_{i_0}$  пусто. Теперь  $\varphi_i(p) < \varepsilon$  в  $Q$  при  $i \geq i_0$ .

Для данной действительной функции  $\Lambda$ , определенной в  $\mathcal{C}^{\#0}$ , по определению положим

$$(1) \quad |\Lambda| = \sup \{ |\Lambda(\varphi)| : \varphi \text{ — дизельные функции; } |\varphi| \leq 1 \};$$

функция  $\Lambda$  ограничена, если эта верхняя грань конечна.

*Лемма 7б. Пусть  $\Lambda$  — линейная функция в  $\mathcal{C}^{\#0}$ , обладающая следующим свойством. Пусть  $\varphi_i \in \mathcal{C}^{\#0}$  и  $N$  — произвольное число; в этом случае*

$$(2) \quad \lim \Lambda(\varphi_i) = 0, \text{ если } |\varphi_i| \leq N, \varphi_i \rightarrow 0 \text{ р. к. м.}$$

Тогда существует единственная аддитивная функция множества  $\gamma$  в  $E$ , для которой

$$(3) \quad \Lambda(\varphi) = \int_E \varphi d\gamma, \quad \varphi \in C^{\#0}; \quad |\Lambda| = |\gamma|.$$

Сначала мы покажем, что функция  $\Lambda$  ограничена. Если бы это было не так, то нашлась бы такая последовательность  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  что  $|\varphi_i| \leq 1$  и  $|\Lambda(\varphi_i)| \geq i$ . Положим  $\psi_i = \varphi_i/i$ ; тогда  $\psi_i \rightarrow 0$  равномерно, и поэтому  $\Lambda(\psi_i) \rightarrow 0$ ; однако,  $|\Lambda(\psi_i)| \geq 1$ , и мы пришли к противоречию.

Определим функции  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  в  $L^+$  (§ 6) условиями

$$(4) \quad \Lambda_1(\varphi) = \sup \{ \Lambda(\psi) : \psi - \text{дизъюнктные функции, } 0 \leq \psi \leq \varphi \},$$

$$(5) \quad \Lambda_2(\varphi) = \Lambda_1(\varphi) - \Lambda(\varphi).$$

Взяв в (4)  $\psi = 0$ , мы видим, что  $\Lambda_1(\varphi) \geq 0$ . Для любой функции  $\psi$  в (4)  $|\Lambda(\psi)| \leq |\Lambda| |\psi| \leq |\Lambda| |\varphi|$ ; поэтому верхняя грань  $\Lambda_1(\varphi)$  конечна; конечна и разность  $\Lambda_2(\varphi)$ . Взяв  $\psi = \varphi$ , мы видим, что  $\Lambda_1(\varphi) \geq \Lambda(\varphi)$ ,  $\Lambda_2(\varphi) \geq 0$ .

Чтобы показать, что функция  $\Lambda_1$  (а поэтому и  $\Lambda_2$ ) линейна в  $L^+$ , заметим прежде всего, что  $\Lambda_1(a\varphi) = a\Lambda_1(\varphi)$  ( $a \geq 0$ ). Возьмем теперь любые функции  $\varphi_1, \varphi_2$ ,  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ , принадлежащие  $L^+$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  выберем  $\psi_i$  так, чтобы было  $0 \leq \psi_i \leq \varphi_i$  и  $\Lambda(\psi_i) > \Lambda_1(\varphi_i) - \varepsilon/2$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда  $0 \leq \psi_1 + \psi_2 \leq \varphi$ , и поэтому

$$\Lambda_1(\varphi) \geq \Lambda(\psi_1 + \psi_2) = \Lambda(\psi_1) + \Lambda(\psi_2) > \Lambda_1(\varphi_1) + \Lambda_1(\varphi_2) - \varepsilon.$$

Обратно, выбрав  $\psi$  так, чтобы было  $0 \leq \psi \leq \varphi$  и  $\Lambda(\psi) > \Lambda_1(\varphi) - \varepsilon$ , положим  $\psi_1 = \inf \{\varphi_1, \psi\}$ ,  $\psi_2 = \psi - \psi_1$ ; тогда мы легко находим, что  $0 \leq \psi_i \leq \varphi_i$  ( $i = 1, 2$ ), и поэтому

$$\Lambda_1(\varphi_1) + \Lambda_1(\varphi_2) \geq \Lambda(\psi_1) + \Lambda(\psi_2) = \Lambda(\psi) > \Lambda_1(\varphi) - \varepsilon.$$

Тем самым доказано, что  $\Lambda_1(\varphi) = \Lambda_1(\varphi_1) + \Lambda_1(\varphi_2)$ .

Допустим, что  $\varphi_i \downarrow 0$ . Выберем  $\psi_i$  так, чтобы было  $0 \leq \psi_i \leq \varphi_i$ ,  $\Lambda(\psi_i) > \Lambda_1(\varphi_i) - 1/2^i$ . В силу леммы 7а  $\varphi_i \rightarrow 0$  р. к. м.; поэтому  $\psi_i \rightarrow 0$  р. к. м. Кроме того,  $|\psi_i| \leq |\varphi_i|$ . Следовательно,  $\Lambda(\psi_i) \rightarrow 0$ , и поэтому  $\Lambda_1(\varphi_i) \rightarrow 0$ . Отсюда также вытекает, что  $\Lambda_2(\varphi_i) \rightarrow 0$ .

В силу леммы 6а существуют такие меры Каратеодори  $\mu_1, \mu_2$ , что  $\Lambda_i(\varphi) = \int \varphi d\mu_i$ ,  $\varphi \in L^+$ . Положим

$$(6) \quad \gamma = \mu_1 - \mu_2 : \gamma(Q) = \mu_1(Q) - \mu_2(Q).$$

Тогда

$$\int \varphi d\gamma = \int \varphi d\mu_1 - \int \varphi d\mu_2 = \Lambda_1(\varphi) - \Lambda_2(\varphi) = \Lambda(\varphi), \quad \varphi \in L^+.$$

Если задана произвольная функция  $\varphi \in \mathbb{C}^{\#0}$ , то мы положим  $\varphi_1 = \sup \{\varphi, 0\}$ ,  $\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi$ ; тогда  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  принадлежат  $L^+$  и

$$\Lambda(\varphi) = \Lambda(\varphi_1) - \Lambda(\varphi_2) = \int \varphi_1 d\gamma - \int \varphi_2 d\gamma = \int \varphi d\gamma,$$

и это доказывает первое равенство в (3). По поводу второго равенства и единственности см. теорему 8А.

**8. Линейные функции диезной  $r$ -формы.** Теорема, доказываемая ниже, является непосредственным распространением леммы 7b. Она составляет базу для части теоремы 11А. В качестве норм мы пользуемся массой  $r$ -векторов и комассой  $r$ -форм (II, 3.2).

**Теорема 8А.** Пусть  $\Lambda$  — такая действительная функция диезной  $r$ -формы в пространстве  $E$ , что

$$(1) \quad \lim \Lambda(\omega_i) = 0, \quad \text{если} \quad |\omega_i|_0 \leq N, \quad \omega_i \rightarrow 0 \text{ р. к. м.}$$

Тогда существует единственная аддитивная  $r$ -вектор-функция множества  $\gamma$ , обладающая тем свойством, что

$$(2) \quad \Lambda(\omega) = \int_E \omega \cdot d\gamma = [\omega \cdot \gamma] \text{ для всех диезных } r\text{-форм } \omega;$$

при этом мы имеем

$$(3) \quad |\Lambda| = |\gamma|.$$

Заметим, что каждая такая функция множества  $\gamma$  приводит к функции  $\Lambda$ , удовлетворяющей условию (1) (без „р. к. м.“); см. (4.9).

Пусть  $(e_1, \dots, e_r)$  — некоторый базис в  $V(E)$ . Для каждого множества индексов  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  положим

$$(4) \quad \Lambda^\lambda(\varphi) = \Lambda(\varphi e^\lambda), \text{ где } \varphi \text{ — действительные диезные функции.}$$

В силу леммы 7b существует действительная аддитивная функция множества  $\gamma^\lambda$ , для которой

$$\Lambda(\varphi e^\lambda) = \int \varphi d\gamma^\lambda.$$

Положим

$$\gamma = \sum_{(\lambda)} \gamma^\lambda e_\lambda : \gamma(Q) = \sum_{(\lambda)} \gamma^\lambda(Q) e_\lambda, \quad Q \text{ — борелевские множества.}$$

Определение интеграла в § 3 как предела последовательности сумм, каждая из которых составляется для некоторого борелевского разбиения пространства  $E$ , показывает, что

$$\begin{aligned} \int_E \omega \cdot d\gamma &= \lim \sum_i \omega(p_i) \cdot \gamma(Q_i) = \\ &= \lim \sum_i \sum_{(\lambda)} \omega_\lambda(p_i) \gamma^\lambda(Q_i) = \sum_{(\lambda)} \int_E \omega_\lambda d\gamma^\lambda; \end{aligned}$$

поэтому

$$\Lambda(\omega) = \sum_{(\lambda)} \Lambda(\omega_\lambda e^\lambda) = \sum_{(\lambda)} \int_E \omega_\lambda d\gamma^\lambda = \int_E \omega \cdot d\gamma.$$

Чтобы доказать единственность, допустим, что, кроме того,  $\Lambda(\omega) = \int_E \omega \cdot d\gamma'$ ,  $\gamma' \neq \gamma$ . Положим  $\gamma_1 = \gamma' - \gamma$ ; тогда  $|\gamma_1| > 0$ .

В силу теоремы 5С существует такая дизъюнктная  $r$ -форма  $\omega$ , что

$$\int_E \omega \cdot d\gamma_1 > \frac{|\gamma_1|}{2}, \quad \int_E \omega \cdot d\gamma' \neq \int_E \omega \cdot d\gamma,$$

и мы получаем противоречие.

Равенство (3) сразу следует из (5.5) и (2).

Упомянем теорему, которой можно воспользоваться вместо теоремы 8А ниже в доказательстве теоремы 11А. Пусть  $K_0$  — нормированное линейное пространство компактных дизъюнктных  $r$ -форм  $\omega$  в  $E$  (мы могли бы рассматривать компактные непрерывные формы) с комассой  $|\omega|_0 = \sup \{ |\omega(p)|_0 \}$  в качестве нормы. Дополнение  $K$  пространства  $K_0$ , как легко видеть, является банаховым пространством непрерывных  $r$ -форм, „стремящихся к нулю в бесконечности“; иными словами, для данной формы  $\omega \in K$  и числа  $\varepsilon > 0$  существует такое компактное множество  $Q$ , что  $|\omega(p)|_0 < \varepsilon$  в  $E \setminus Q$ . Пусть  $\bar{K}_0 = \bar{K}$  — пространство, сопряженное к  $K_0$  (или к  $K$ ).

**Теорема 8В.** При указанных обозначениях пространство  $\bar{K}$  есть банахово пространство аддитивных функций множества в  $E$ , значениями которых являются  $r$ -векторы, с полной вариацией в качестве нормы. В более явной форме: если дана функция  $\Lambda \in \bar{K}$ , то существует единственная аддитивная функция множества  $\gamma$ , обладающая тем свойством, что

$$(5) \quad \Lambda(\omega) = \int_E \omega \cdot d\gamma \quad \text{для всех } \omega \in K.$$

При этом  $|\Lambda| = |\gamma|$ . Обратно, каждая такая функция множества  $\gamma$  приводит к некоторой функции  $\Lambda$ .

Эта теорема сразу сводится к случаю действительных функций. Пользуясь разложением такого же вида, как в (7.5), мы можем применить теорему 4 (Халмош, стр. 240) к каждой из функций  $\Lambda_1, \Lambda_2$ .

**9. Диезная норма  $r$ -вектор-функций множества.** Определим диезную норму  $|\omega|^\#$  для  $r$ -форм, как в (V, 10.2). Если  $\gamma$  — функция множества, значениями которой являются  $r$ -векторы, то ее диезная норма есть

$$(1) \quad |\gamma|^\# = \sup \left\{ \int_E \omega \cdot d\gamma : \omega \text{ — диезные } r\text{-формы, } |\omega|^\# \leq 1 \right\}.$$

Неравенство  $|\gamma|^\# > 0$  при  $\gamma \neq 0$  следует из теоремы 5С.

Если форма  $\omega = \omega_0$  постоянна, то в силу (3.6)  $[\omega \cdot \gamma] = \omega_0 \cdot |\gamma|$ . Поэтому в силу формулы (I, 13.6) и теоремы 5С

$$(2) \quad \|\gamma\|_0 \leq |\gamma|^\# \leq |\gamma|.$$

*Носитель*  $\text{spt}(\gamma)$  функции множества  $\gamma$  есть множество точек  $\varphi$ , во всякой окрестности которых имеется такое борелевское множество  $Q \subset U$ , что  $\gamma(Q) \neq 0$ ; иначе говоря,  $E \setminus \text{spt}(\gamma)$  есть наибольшее открытое множество  $R$ , для которого  $\bar{\gamma}(R) = 0$ . Мы пишем  $\gamma \subset Q$ , если  $\text{spt}(\gamma) \subset Q$ . Мы говорим, что функция  $\gamma$  *компактна*, если компактно множество  $\text{spt}(\gamma)$ . Докажем, что

$$(3) \quad |\gamma|^\# \leq \frac{p|\gamma|}{r+1} + \|\gamma\|_0, \quad \text{если } \gamma \subset \bar{U}_p(p).$$

В самом деле, возьмем любое  $\varepsilon > 0$ . Выберем диезную  $r$ -форму  $\omega$ , для которой

$$|\omega|^\# \leq 1, \quad [\omega \cdot \gamma] > |\gamma|^\# - \varepsilon.$$

Положим  $\omega_0 = \omega(p)$ . Тогда, как и в доказательстве неравенства (VII, 7.2),

$$(4) \quad \begin{aligned} |[\omega \cdot \gamma]| &\leq \left| \int_{U_p(p)} (\omega - \omega_0) \cdot d\gamma \right| + \left| \int_E \omega_0 \cdot d\gamma \right| \leq \\ &\leq pQ_0(\omega) |\gamma| + |\omega|_0 \cdot \|\gamma\|_0. \end{aligned}$$

откуда и следует (3).

Заметим, что

$$(5) \quad \text{spt}(\bar{\gamma}) = \text{spt}(\gamma), \quad \text{spt}(\varphi\gamma) = \text{spt}(\varphi) \cap \text{spt}(\gamma).$$

Второе соотношение легко доказывается при  $\varphi \geq 0$ ,  $\gamma = \bar{\gamma}$ ; в общем случае следует воспользоваться первым соотношением и равенством (4.2).

**10. Молекулярные функции множества.** Мы говорим, что функция множества  $\gamma$  является *атомной* и что она является функцией множества *в точке*  $p$ , если  $\text{spt}(\gamma) = p$ . В этом случае  $[\gamma] = \gamma(p)$ . Если  $\gamma(p) = \alpha$ , то мы пишем  $\gamma = \gamma_{p, \alpha}$ . Молекулярная функция множества есть конечная сумма атомных функций множества. Заметим, что для любой ограниченной борелевской формы  $\omega$

$$(1) \quad [\omega \cdot \gamma_{p, \alpha}] = \omega(p) \cdot \alpha.$$

Лемма 10а. Совокупность молекулярных функций множества плотна в пространстве аддитивных  $r$ -вектор-функций множества с дизельной нормой.

Возьмем любую аддитивную функцию множества  $\gamma$ , значениями которой являются  $r$ -векторы, и число  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $Q$  — компактное множество, для которого  $\gamma(E \setminus Q) < \varepsilon/2$  (лемма 2а). Пусть  $\bigcup Q_i$  — такое конечное борелевское разбиение множества  $Q$ , что  $\text{diam}(Q_i) \leq \leq \rho = (r+1)\varepsilon/(4|\gamma|)$ . Выберем точки  $p_i \in Q_i$  и положим  $Q_0 = E \setminus Q$  и  $\alpha_i = \gamma(Q_i)$ ,  $\gamma_i = \gamma_{p_i, \alpha_i}$  ( $i \geq 1$ ),  $\gamma'_i = \chi_{Q_i} \gamma$  ( $i \geq 0$ ).

Тогда из (4.1) и (9.2) при  $i \geq 1$  мы получаем

$$[\gamma_i] = \alpha_i = [\gamma'_i], \quad |\gamma_i| = |\alpha_i|_0 \leq |\gamma'_i|.$$

В силу (4.8)  $\sum_{i \geq 0} |\gamma'_i| = |\gamma|$ . Поэтому на основании неравенств (9.2) и (9.3)

$$\begin{aligned} \left| \gamma - \sum_{i \geq 1} \gamma_i \right|^\# &\leq |\gamma'_0|^\# + \sum_{i \geq 1} |\gamma'_i - \gamma_i|^\# \leq \\ &\leq |\gamma'_0| + \sum_{i \geq 1} \rho \frac{2|\gamma'_i|}{r+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\rho|\gamma|}{r+1} = \varepsilon, \end{aligned}$$

как и требовалось.

Замечание. Молекулярная функция множества обладает тем свойством, что

$$(2) \quad \left| \sum_{i \geq 1} \gamma_i \right| \leq \sum |\gamma'_i| \leq |\gamma|.$$

Определение полной вариации показывает, что для любой молекулярной функции множества

$$(3) \quad \left| \sum \gamma_{p_i, \alpha_i} \right| = \sum |\gamma_{p_i, \alpha_i}| = \sum |\alpha_i|_0, \quad \text{если точки } p_i \text{ отличны одна от другой.}$$

**11. Диезные цепи и функции множества.** Рассмотрим следующие линейные пространства:

Пространство  $\mathfrak{M}_r$ , состоящее из всех  $r$ -мерных диезных цепей конечной массы в  $E$ , с массой или диезной нормой в качестве нормы.

Пространство  $\mathbf{M}_r$ , состоящее из всех аддитивных функций множества в  $E$ , значениями которых являются  $r$ -векторы, с полной вариацией или диезной нормой в качестве нормы.

Мы покажем, что эти пространства изоморфны, причем изоморфизм сохраняет обе нормы.

Мы говорим, что элементы  $A \in \mathfrak{M}_r$  и  $\gamma \in \mathbf{M}_r$  соответствуют один другому [ср. (VI, 7)], если для каждой  $r$ -мерной диезной коцепи  $X$  в  $E$

$$(1) \quad X \cdot A = \int_E D_X \cdot d\gamma = [D_X \cdot \gamma].$$

**Теорема 11А.** Установленное выше соответствие  $A \rightarrow \gamma = \gamma_A$  является взаимно однозначным линейным отображением пространства  $\mathfrak{M}_r$  на пространство  $\mathbf{M}_r$ , причем

$$(2) \quad [\gamma_A] = \{A\}, \quad |\gamma_A|^\# = |A|^\#, \quad |\gamma_A| = |A|.$$

Каждой  $r$ -мерной цепи  $A$  соответствует линейная функция  $\Lambda_A$  диезной  $r$ -формы, определяемая условием  $\Lambda_A(D_X) = X \cdot A$ . Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — такая последовательность  $r$ -мерных диезных коцепей, что  $|D_{X_i}|_0 \leq N$  для некоторого  $N$  и  $D_{X_i} \rightarrow 0$  р. к. м. Мы покажем, что  $\lim \Lambda_A(D_{X_i}) = 0$ . Если задано  $\varepsilon > 0$ , то мы выберем действительную компактную диезную функцию  $\varphi$  (VII, теорема 4А), для которой

$$|\varphi A - A| < \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Положим  $Q = \text{spt}(\varphi)$ . Теперь  $\varphi D_{X_i} \rightarrow 0$  равномерно, и формулы (V, 10.4) и (VI, 8.4) показывают, что

$$|\varphi X_i| = |D_{\varphi X_i}|_0 = |\varphi D_{X_i}|_0 \rightarrow 0.$$

Поэтому мы можем выбрать такой номер  $i_0$ , что

$$|\varphi X_i| < \frac{\varepsilon}{2|A|} \quad \text{при } i \geq i_0.$$

Возьмем теперь любой номер  $i \geq i_0$ . Пользуясь соотношением (VII, 2.1), получаем

$$\begin{aligned} |\Lambda_A(D_{X_i})| &= |X_i \cdot A| \leq |X_i \cdot (A - \varphi A)| + |\varphi X_i \cdot A| \leq \\ &\leq N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2|A|} |A| = \varepsilon; \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что  $\Lambda_A(D_{X_i}) \rightarrow 0$ . Поэтому в силу теоремы 8A существует единственная аддитивная функция множества  $\gamma = \gamma_A$ , для которой выполняется условие (1). Очевидно, это соответствие линейно.

Возьмем любой  $r$ -ковектор  $\omega_0$ ; пусть  $X$  — такая коцепь, что  $D_X(p) = \omega_0$  для всех  $p$ . В силу (VII, 6.3) и (3.6)

$$\omega_0 \cdot \{A\} = X \cdot A = \int_E \omega_0 \cdot d\gamma_A = \omega_0 \cdot [\gamma_A];$$

отсюда следует, что  $[\gamma_A] = \{A\}$ . В силу формул (V, 16.3) для  $|A|$  (дизный случай) и (5.5) для  $|\gamma|$ , а также и формул (V, 10.4) и (1) имеем  $|\gamma_A| = |A|$ . В силу (V, 4.3) (дизный случай), (9.1), (V, 10.4) и (1) имеем  $|\gamma_A|^\# = |A|^\#$ .

Допустим, что  $\gamma_A = 0$ , т. е.  $\gamma_A(Q) = 0$  для всех борелевских множеств  $Q$ . Тогда для любой коцепи  $X$  мы имеем  $X \cdot A = [D_X \cdot \gamma_A] = 0$  и поэтому  $A = 0$ . Следовательно, рассматриваемое соответствие взаимно однозначно.

Пусть  $A$  — цепь в точке  $p$ , для которой  $\{A\} = \alpha$  (VII, 7), и  $\gamma = \gamma_{p, \alpha}$  (§ 10). Тогда из (VII, 7.1) и (10.1) мы получаем

$$X \cdot A = D_X(p) \cdot \alpha = [D_X \cdot \gamma_{p, \alpha}]$$

для всех дизных коцепей  $X$ ; поэтому  $\gamma_A = \gamma_{p, \alpha}$ , и это показывает, что молекулярным цепям соответствуют молекулярные функции множества.

Чтобы показать, что рассматриваемое соответствие является отображением на пространство  $M_r$ , возьмем любую функцию множества  $\gamma \in M_r$ . Для каждого натурального числа  $k$  возьмем молекулярную функцию множества  $\gamma_k$ , для которой  $|\gamma - \gamma_k|^\# < 1/2^k$  (лемма 10a). Пусть, скажем,  $\gamma_{A_k} = \gamma_k$ . В таком случае

$$|A_j - A_k|^\# = |\gamma_j - \gamma_k|^\# \rightarrow 0,$$

и поэтому последовательность  $A_1, A_2, \dots$  является в дизной норме фундаментальной последовательностью и имеет предел  $A$ . В силу теоремы (V, 16B), соотношения (2) и неравенства (10.2)

$$|A| \leq \lim |A_k| = \lim |\gamma_k| \leq |\gamma|,$$

причем полная вариация конечна. Далее,

$$|\gamma_A - \gamma_k|^\# = |A - A_k|^\# \rightarrow 0,$$

следовательно,  $|\gamma_A - \gamma|^\# = 0$  и  $\gamma_A = \gamma$ , как и требовалось. Этим завершается доказательство.

**Примеры.** При  $r=0$   $\gamma_A(Q)$  есть действительное число. Если  $A = \sum a_i p_i$ , то  $\gamma_A(Q)$  есть сумма тех коэффициентов  $a_i$ , для которых  $p_i \in Q$ ;  $[\gamma_A] = \{A\} = \sum a_i$ . Если  $A$  — одномерная цепь, определяемая ориентированной дугой, идущей от точки  $p$  к точке  $q$  ( $X, 6$ ), то  $[\gamma_A]$  есть вектор  $q - p$ ; если  $Q$  — борелевское множество, состоящее из дуги  $p'q'$ , являющейся частью рассматриваемой дуги  $pq$ , то  $\gamma_A(Q) = q' - p'$  (ср. § 13).

**Проблема.** Пусть  $A$  — бемольная цепь конечной массы. Тогда  $A$  является и дизельной цепью (V, теорема 14B) и поэтому  $X \cdot A = \int_E D_X \cdot d\gamma_A$  для всех дизельных коцепей  $X$ . Выполняется ли

это соотношение и для бемольных коцепей  $X$ ?

Закончим доказательством соотношения

$$(3) \quad \text{spt}(\gamma_A) = \text{spt}(A).$$

Допустим, что  $p \in \text{spt}(\gamma_A)$ . Возьмем любую окрестность  $U$  точки  $p$ . Пусть, скажем,  $\gamma_A(Q) \neq 0$ ,  $Q \subset U$ . Тогда  $\bar{\gamma}_A(U) \geq \bar{\gamma}_A(Q) > 0$ , и, в силу теоремы 5C, существует дизельная функция  $\omega$ , обращающаяся в нуль вне  $U$ , для которой  $[\omega \cdot \gamma_A] \neq 0$ . Пусть, например,  $D_X = \omega$ ; тогда  $X \cdot A \neq 0$ , и этим доказано, что  $p \in \text{spt}(A)$ . Обратно, если точка  $p$  не содержится в  $\text{spt}(\gamma_A)$ , то существует такая окрестность  $U$  точки  $p$ , что  $\gamma_A(Q) = 0$  для всех  $Q \subset U$ . Теперь  $[\omega \cdot \gamma_A] = 0$ , если  $\text{spt}(\omega) \subset U$ ; поэтому  $X \cdot A = 0$ , если  $\text{spt}(X) \subset U$ , и, значит, точка  $p$  не содержится в  $\text{spt}(A)$ .

**12. Умножение цепей на ограниченные борелевские функции.** Если  $A$  — цепь конечной массы, а  $\varphi$  — действительная ограниченная борелевская функция, то через  $\varphi A$  мы обозначим цепь, соответствующую функции множества  $\varphi \gamma_A$  (теорема 11A); итак,

$$(1) \quad \gamma_{\varphi A} = \varphi \gamma_A, \quad \varphi \text{ — ограниченные борелевские функции.}$$

Если  $\varphi$  — дизельная функция, то для любой дизельной коцепи  $X$  по формулам (1), (4.3) и (VI, 8.4) получаем

$$X \cdot \varphi A = [D_X \cdot \varphi \gamma_A] = [\varphi D_X \cdot \gamma_A] = [D_{\varphi X} \cdot \gamma_A] = \varphi X \cdot A;$$

из (VII, 2.1) мы видим, что в рассматриваемом случае определение цепи  $\varphi A$  согласуется с определением этой цепи в (VII, 1).

Если мы по определению положим

$$(2) \quad \omega \cdot A = \int_E \omega \cdot d\gamma_A = [\omega \cdot \gamma_A]$$

для ограниченной борелевской  $r$ -формы  $\omega$ , то из доказанного выше будет следовать, что для действительной ограниченной борелевской функции  $\varphi$

$$(3) \quad \varphi \omega \cdot A = \omega \cdot \varphi A.$$

Частным случаем равенства (2) является равенство  $D_X \cdot A = X \cdot A$  ( $X$  — дизъюнкционная коцепь).

Функция  $\varphi A$  линейна относительно обеих переменных. В силу (4.3) и (1)

$$(4) \quad \varphi(\psi A) = (\varphi\psi) A.$$

В силу (11.2), (1) и (4.2)

$$(5) \quad |\varphi A| = |\langle \varphi \rangle A| = |\varphi \gamma_A| = \int_E \langle \varphi \rangle d\bar{\gamma}_A.$$

В силу (11.2) и (1)

$$(6) \quad \{\varphi A\} = [\varphi \gamma_A] = \int_E \varphi d\gamma_A.$$

Докажем для ограниченных борелевских функций  $\varphi_i$ ,  $\varphi$  и ограниченных борелевских  $r$ -форм  $\omega_i$ ,  $\omega$  следующие соотношения:

$$(7) \quad \lim |\varphi A - \varphi_i A| = 0, \quad \text{если } \varphi_i \uparrow \varphi \text{ или } \varphi_i \downarrow \varphi,$$

$$(8) \quad \lim |\varphi A - \varphi_i A| = 0, \quad \text{если } \varphi_i \rightarrow 0, \quad |\varphi_i| \leq N,$$

$$(9) \quad \lim \omega_i \cdot A = \omega \cdot A, \quad \text{если } \omega_i \rightarrow \omega, \quad |\omega_i|_0 \leq N.$$

Эти утверждения следуют из (4.6), (4.9), (4.10) и (3.10), причем нужно воспользоваться соотношениями (4.2). Таким образом,

$$|(\varphi - \varphi_i) A| = |(\varphi - \varphi_i) \gamma_A| = \langle \varphi - \varphi_i \rangle \bar{\gamma}_A(E) \rightarrow 0,$$

$$|(\omega - \omega_i) \cdot A| \leq |(\omega - \omega_i) \cdot \gamma_A| \leq \langle \omega - \omega_i \rangle_0 \bar{\gamma}_A(E) \rightarrow 0.$$

Заметим, что из (7) и (8) для ограниченных борелевских функций  $\varphi_i$ ,  $\varphi$  мы получаем

$$(10) \quad \varphi_i A \xrightarrow{\#} \varphi A, \quad \text{если } \varphi_i \uparrow \varphi \text{ или } \varphi_i \downarrow \varphi, \text{ или } \varphi_i \rightarrow \varphi, \quad |\varphi_i| \leq N.$$

Обобщая равенство (VII, 1.17) (в случае, когда масса  $|A|$  конечна), мы докажем, что для ограниченных борелевских функций  $\varphi_i$ ,  $\varphi$

$$(11) \quad \sum |\varphi_i A| = |\varphi A|, \quad \text{если } \varphi_i \geq 0, \quad \sum \varphi_i = \varphi.$$

Для конечных сумм это равенство следует из (5); для суммы бесконечного ряда нужно применить (7).

**13. Часть цепи в борелевском множестве.** Пусть  $A$  — цепь конечной массы, а  $Q$  — борелевское множество с характеристической функцией  $\chi_Q$ . Мы определим *часть цепи  $A$  в  $Q$* , полагая

$$(1) \quad A_Q = \chi_Q A.$$

В силу (12.10)

$$(2) \quad A_Q = \sum A_{Q_i}, \text{ если } \bigcup Q_i \text{ — борелевское разбиение множества } Q.$$

Таким образом,  $\Phi_A(Q) = A_Q$  есть аддитивная функция множества, значениями которой являются дизъюнктные цепи конечной массы. Мы докажем, что

$$(3) \quad \{A_Q\} = \gamma_A(Q).$$

В самом деле, из (4.1), (12.1) и (11.2) следует, что

$$\gamma_A(Q) = [\chi_Q \gamma_A] = [\gamma_{\chi_Q A}] = \{\chi_Q A\}.$$

На основании (12.4)

$$(4) \quad \varphi(A_Q) = \varphi(\chi_Q A) = \chi_Q(\varphi A) = (\varphi A)_Q.$$

Полагая в (12.5)  $\varphi = \chi_Q$ , находим

$$(5) \quad |A_Q| = \bar{\gamma}_A(Q).$$

Поэтому

$$(6) \quad |A_Q| = \sum |A_{Q_i}|, \text{ если } \bigcup Q_i \text{ — борелевское разбиение множества } Q.$$

Более общо, в силу (12.4) и (12.5)

$$(7) \quad |(\varphi A)_Q| = |(\chi_Q \varphi) A| = \int_Q \langle \varphi \rangle d\bar{\gamma}_A.$$

В силу (3), (VII, 6.2) и (5)

$$(8) \quad |\gamma_A(Q)|_0 \leq |A_Q|^{\#} \leq |A_Q| = \bar{\gamma}_A(Q).$$

Заметим, что

$$(9) \quad |\varphi|_A = |\varphi|_{\bar{\gamma}_A} = |\varphi A| = \int_E \langle \varphi \rangle d\bar{\gamma}_A$$

[мы пользуемся обозначениями, принятыми в (3.11)] есть полунорма в пространстве ограниченных борелевских функций  $\varphi$ .

Приведем теорему, аналогичную теореме (VII, 8С); последнюю можно было бы вывести из этой теоремы (если масса  $|A|$  конечна).

**Теорема 13А.** Для всякой цепи  $A$  конечной массы и любого  $\varepsilon > 0$  существует такое борелевское разбиение  $E = \bigcup Q_i$ , что

$$(10) \quad \sum |A_{Q_i}|^\# \geq \sum |\{A_{Q_i}\}|_0 > |A| - \varepsilon.$$

В соответствии с определением полной вариации  $|\gamma_A|$  мы можем выбрать множества  $Q_i$  так, чтобы было  $\sum |\gamma_A(Q_i)|_0 > |\gamma_A| - \varepsilon$ ; пользуясь (3), (8) и (11.2), получаем неравенство (10).

**14. Цепи и функции точки.** Пусть  $A$  — некоторая  $r$ -мерная цепь конечной массы. В силу теорем 5А и 5В существуют такие борелевские функции  $\Gamma_A(p)$  и  $\xi_A(p)$ , значениями которых являются соответственно  $r$ -векторы и  $r$ -ковекторы, что

$$(1) \quad \gamma_A(Q) = \int_Q \Gamma_A d\bar{\gamma}_A, \quad |\Gamma_A(p)|_0 = 1,$$

$$(2) \quad \bar{\gamma}_A(Q) = \int_Q \xi_A \cdot d\gamma_A, \quad |\xi_A(p)|_0 = 1.$$

Функция  $\Gamma_A$  определяется единственным образом п. в. ( $\bar{\gamma}_A$ ), но функция  $\xi_A$  может быть не единственной.

Пользуясь замечанием, следующим за формулой (4.3), получаем для дизъюнктивных коцепей  $X$

$$(3) \quad D_X \cdot \gamma_A = D_X \cdot (\Gamma_A \cdot \bar{\gamma}_A) = (D_X \cdot \Gamma_A) \bar{\gamma}_A;$$

поэтому

$$(4) \quad X \cdot A = [D_X \cdot \gamma_A] = [(D_X \cdot \Gamma_A) \bar{\gamma}_A] = \int_E (D_X \cdot \Gamma_A) d\bar{\gamma}_A.$$

**Примеры.** Пусть  $A$  — одномерная цепь, образованная гладкой ориентированной дугой [см. (X, 6)]. Тогда мы можем считать, что  $\Gamma_A(p)$  есть касательный вектор в каждой точке  $p$  этой дуги и  $\Gamma_A(p) = 0$  во всех остальных точках. (Вне дуги вектор  $\Gamma_A$  произволен, так как там  $\bar{\gamma}_A = 0$ .) Если цепь  $A$  образована некоторым куском  $r$ -мерного гладкого ориентированного многообразия  $M$ , то  $\Gamma_A(p)$  ( $p \in M$ ) есть  $r$ -направление ориентированной касательной плоскости в точке  $p$ .

Теперь мы обсудим возможность представить  $\gamma_A(Q)$  в виде интеграла  $\int_Q \alpha(p) d\mu$ , где функция  $\alpha$  суммируема. Пусть  $\mu$  — мера Лебега; тогда этот интеграл можно записать в виде

$$\int_Q \alpha = \int_Q \alpha d\mu = (\alpha\mu)(Q).$$

Заметим, что из доказательства равенства (4.2) следует, что

$$(5) \quad \overline{\alpha\mu} = \langle \alpha \rangle_0 \mu, \quad |\alpha\mu| = \int_E \langle \alpha \rangle_0 d\mu = \int_E |\alpha(p)|_0 d\mu.$$

**Теорема 14А.** *Отображение  $\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}$ , рассматриваемое в теореме (VI, 7А), существует для измеримых по Лебегу суммируемых  $r$ -вектор-функций  $\alpha$ , а не только для непрерывных суммируемых  $\alpha$ ; мы имеем*

$$(6) \quad \gamma_{\tilde{\alpha}} = \alpha\mu.$$

Прежде всего теоремой (VI, 7А)  $\tilde{\alpha}$  определяется для непрерывной суммируемой  $r$ -вектор-функции  $\alpha$ . Если задана измеримая по Лебегу суммируемая  $r$ -вектор-функция  $\alpha$ , то выберем для каждого натурального числа  $i$  такую непрерывную суммируемую  $r$ -вектор-функцию  $\alpha_i$ , что (II, III, 6)

$$|(\alpha - \alpha_i)\mu| < \frac{1}{2^i}.$$

Тогда, как и в доказательстве теоремы (VI, 7А),  $A = \lim b \tilde{\alpha}_i$  существует,  $X \cdot A = \int_E D_X \cdot \alpha d\mu$  для дизъюнктных коцепей  $X$ , и поэтому

$$\gamma_A = \alpha\mu.$$

В силу (11.2) и (5)

$$(7) \quad |A| = |\gamma_A| = |\alpha\mu| = \int_E \langle \alpha \rangle_0 d\mu.$$

Заметим, что отображение  $\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}$  является взаимно однозначным только в том смысле, что из  $\tilde{\alpha}' = \tilde{\alpha}$  следует  $\alpha' = \alpha$  п. в.

Докажем теорему:

Теорема 14В. Для данной цепи  $A$  конечной массы в том и только в том случае существует измеримая по Лебегу суммируемая  $r$ -вектор-функция  $\alpha$ , для которой  $A = \tilde{\alpha}$ :

$$(8) \quad X \cdot A = \int_E D_X \cdot \alpha \, d\mu \quad (\text{для всех дизельных коцепей } X),$$

если функция множества  $\gamma_A$  абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.

Если  $A = \tilde{\alpha}$ , то для любой дизельной коцепи  $X$  из (11.1), (8) и (4.3) мы получаем  $[D_X \cdot (\gamma_A - \alpha\mu)] = 0$ ; по теореме 5С  $\gamma_A = \alpha\mu$  и, следовательно,  $\gamma_A$  абсолютно непрерывна. Обратно, если  $\gamma_A$  абсолютно непрерывна, то по теореме Радона — Никодима мы можем записать  $\gamma_A = \alpha\mu$ ; теперь  $|\alpha\mu| = |\gamma_A| = |A|$ , и поэтому  $\alpha$  суммируема; кроме того, в силу (4.3)  $X \cdot A = [D_X \cdot \gamma_A] = [(D_X \cdot \alpha)\mu]$  и, следовательно,  $A = \tilde{\alpha}$ .

**15. Характеризация дизельной нормы.** Пусть даны функция множества  $\gamma$  и вектор  $v$ . Определим функцию множества  $T_v\gamma$ , которую назовем *сдвигом* функции  $\gamma$  на вектор  $v$ , полагая

$$(1) \quad T_v\gamma(Q) = \gamma(T_{-v}Q),$$

где  $T_uQ$  обозначает множество точек  $p + u$ ,  $p \in Q$ .

Теорема 15А. Дизельная норма  $|\gamma|^\#$  ( $\gamma \in M_r$ ) есть верхняя грань  $|\gamma|^\#_S$  полунорм  $|\gamma|'$ , удовлетворяющих условиям

- (а)  $|\gamma|' \leq |\gamma|$ ,  
 (б)  $|T_v\gamma - \gamma|' \leq |v| |\gamma| / (r + 1)$ ,  
 (с) для каждой точки  $p$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\zeta > 0$ , что

$$(2) \quad |\gamma|' \leq \varepsilon |\gamma|, \quad \text{если } \gamma \subset U_\zeta(p) \text{ и } |\gamma| = 0.$$

В силу леммы (П. I, 15b)  $|\cdot|^\#_S$  есть полунорма в пространстве  $M_r$ .

Покажем сначала, что дизельная норма удовлетворяет перечисленным условиям; тем самым будет доказано, что  $|\gamma|^\# \leq |\gamma|^\#_S$ , и поэтому  $|\cdot|^\#_S$  является нормой. Выполнение условий (а) и (с) следует из (9.2) и (9.3) соответственно. Чтобы доказать (б), возьмем любую дизельную  $r$ -форму  $\omega$ , для которой  $|\omega|^\# \leq 1$ . Если  $\omega_v(p) = \omega(p - v)$ , то

$$(3) \quad |[\omega \cdot (T_v\gamma - \gamma)]| = \left| \int_E (\omega_v - \omega) \cdot d\gamma \right| \leq \mathfrak{L}_0(\omega) |v| |\gamma|.$$

В силу (V, 10.2)  $\mathfrak{L}_0(\omega) \leq 1/(r + 1)$ ; поэтому из (9.1) мы получаем (б).

Пусть символ  $\text{diam}(\gamma)$  обозначает  $\text{diam}(\text{spt}(\gamma))$ . Мы говорим, что функции множества  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  образуют *чистое  $\zeta$ -разбиение* функции множества  $\gamma$ , если существует такое борелевское разбиение  $\bigcup Q_i$  множества  $\text{spt}(\gamma)$ , что

$$(4) \quad \gamma_i = \chi_{Q_i} \gamma \quad (\text{поэтому } \sum \gamma_i = \gamma), \quad \text{diam}(\gamma_i) \leq \zeta.$$

Если функция  $\gamma$  компактна, то чистое  $\zeta$ -разбиение существует при каждом  $\zeta > 0$  (нужно взять  $\text{diam}(Q_i) \leq \zeta$ ).

Доказательство неравенства  $|\gamma|_S^\# \leq |\gamma|^\#$  мы начнем с установления того факта, что полунорма  $|\cdot|_S^\#$  удовлетворяет неравенству (9.3). Возьмем любую точку  $p$ , число  $\rho > 0$  и функцию множества  $\gamma \subset \bar{U}_\rho(p)$ . Пусть  $|\cdot|'$  — любая полунорма, удовлетворяющая условиям (а), (b) и (с). Если задано произвольное  $\varepsilon > 0$ , то мы выберем  $\zeta > 0$  в соответствии с условием (с). Пусть  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  — некоторое чистое  $\zeta$ -разбиение функции  $\gamma$ ; мы можем выбрать такие векторы  $v_1, \dots, v_m$ ,  $|v_i| \leq \rho$ , что  $\gamma' = \sum v_i \gamma_i \subset \bar{U}_\zeta(p)$ . В силу (b) и (4.8)

$$|\gamma' - \gamma|' \leq \sum \frac{|v_i| |\gamma_i|}{r+1} \leq \frac{\rho |\gamma|}{r+1}.$$

Положим  $\alpha = |\gamma|$ ,  $\beta = \gamma_{p,\alpha}$  (§ 10). Тогда  $|\beta - \gamma'| = 0$ ,  $|\beta| = |\alpha|_0$  и условие (с) дает

$$|\beta - \gamma'| \leq \varepsilon |\beta - \gamma'| \leq \varepsilon (|\gamma|_0 + |\gamma|).$$

Поэтому, если  $N = 2|\gamma|$ , то

$$|\gamma'| \leq |\gamma - \beta|' + |\beta| \leq \frac{\rho |\gamma|}{r+1} + N\varepsilon + |\gamma|_0$$

и неравенство (9.3) следует отсюда для  $|\cdot|'$ , а значит и для  $|\cdot|_S^\#$ .

Далее, по только что доказанному мы можем применить доказательство леммы 10а и тем самым установить, что совокупность молекулярных функций множества всюду плотна при норме  $|\cdot|_S^\#$ . Мы покажем, что совокупность полиэдральных функций множества  $\gamma_A$  ( $A$  — полиэдральные цепи) также всюду плотна. Достаточно показать, что для любой атомной функции множества  $\gamma = \gamma_{p,\alpha}$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такая полиэдральная цепь  $A$ , что  $|\gamma - \gamma_A|_S^\# < \varepsilon$ .

По определению массы  $|\alpha|_0$  (I, 13.1) существуют простые  $r$ -векторы  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , для которых

$$\alpha = \sum \alpha_i, \quad \sum |\alpha_i| < |\alpha|_0 + 1.$$

Выберем такое число  $\rho > 0$ , что  $\rho(2|\alpha|_0 + 1)/(r + 1) < \varepsilon$ . Выберем далее симплексы  $\sigma_i$  в  $U_\rho(p)$  и числа  $a_i$ , так, чтобы было

$$\{a_i \sigma_i\} = \alpha_i, \quad |a_i \sigma_i| = |\alpha_i|.$$

Положим  $A = \sum a_i \sigma_i$ . Тогда

$$\{A\} = \sum \alpha_i = \alpha, \quad |A| < |\alpha|_0 + 1.$$

Кроме того,

$$|\gamma - \gamma_A| \leq |\gamma| + |A| < 2|\alpha|_0 + 1,$$

и неравенство (9.3) для  $|\cdot|_S^\#$  дает [мы пользуемся равенством (11.3)]

$$|\gamma - \gamma_A|_S^\# \leq \frac{\rho |\gamma - \gamma_A|}{r + 1} < \varepsilon,$$

как и требовалось.

Затем мы покажем, что  $|\gamma_A|_S^\# \leq |\gamma_A|^\#$  для полиэдральных цепей  $A$ . Возьмем любую норму  $|\cdot|'$ , удовлетворяющую условиям (а), (b) и (с). Положим  $|A|' = |\gamma_A|'$  для полиэдральных цепей  $A$ . Пользуясь соотношениями (11.2) и тем фактом, что  $[\gamma_{\partial\sigma}] = \{\partial\sigma\} = 0$ ,  $\gamma_{T_v A} = T_v \gamma_A$ , мы видим, что норма  $|A|'$  удовлетворяет условиям теоремы (V, 8B); см. (V, 8.8). Поэтому

$$|\gamma_A|' = |A|' \leq |A|^\# = |\gamma_A|^\#,$$

и наше утверждение доказано.

Мы знаем теперь, что  $|\gamma_A|_S^\# = |A|^\# = |\gamma_A|^\#$  для полиэдральных цепей  $A$ . Возьмем любую функцию множества  $\gamma \in M_r$ . Для каждого натурального числа  $i$  существует такая полиэдральная цепь  $A_i$ , что  $|\gamma - \gamma_{A_i}|_S^\# < 1/2^i$  (см. выше). Теперь

$$|\gamma|_S^\# = \lim |\gamma_{A_i}|_S^\# = \lim |\gamma_{A_i}|^\# = |\gamma|^\#,$$

так как

$$|\gamma - \gamma_{A_i}|^\# \leq |\gamma - \gamma_{A_i}|_S^\# \rightarrow 0.$$

Этим и завершается доказательство.

**16. Представление диэзной нормы.** Мы укажем одно представление для диэзной нормы любой компактной функции множества  $\gamma \in M_r$ . Для произвольной функции множества  $\gamma \in M_r$  по заданному  $\varepsilon > 0$  мы можем выбрать компактное множество  $Q$ , для

которого  $\bar{\gamma}(E \setminus Q) < \varepsilon$ , и поэтому

$$|\gamma - \gamma_Q|^{\#} \leq |\gamma - \gamma_Q| < \varepsilon,$$

где  $\gamma_Q = \chi_Q \gamma$ ; таким образом, предельный переход даст нам диез-ную норму любой функции множества  $\gamma \in M_r$ .

Пусть  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  компактны. Тогда  $\rho$ -взрыв  $\mathcal{E}$  этого множества состоит из

(А) чистых разбиений (§ 15)  $\sum_j \gamma_{ij}$  каждой функции множества  $\gamma_i$ ,

(В) перегруппировки совокупности всех  $\gamma_{ij}$  в некоторую совокупность функций множества  $\beta_{kl}$ ,

(С) такого множества векторов  $v_{kl}$ , что для некоторого множества точек  $p_k$

$$T_{v_{kl}} \beta_{kl} \subset \bar{U}_\rho(p_k) \quad (\text{для всех } k, l).$$

(Мы могли бы просто предположить, что  $\sum_l T_{v_{kl}} \beta_{kl} \subset \bar{U}_\rho(p)$  для всех  $k$ .)

Для данного взрыва  $\mathcal{E}$  положим

$$(1) \quad N(\gamma_1, \dots, \gamma_m; \mathcal{E}) = \sum_{k,l} \frac{|v_{kl}| |\beta_{kl}|}{r+1} + \sum_k \left| \sum_l \beta_{kl} \right|_0.$$

Таким образом, мы сдвигаем  $\gamma_{ij}$  так, чтобы они лежали в некоторой совокупности множеств малого диаметра; мы добавляем к сумме масс  $r$ -векторов соответствующих функций множества „величину сдвига“. Очевидна аналогия с (V, 6.1).

По определению положим

$$(2) \quad N_\rho(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = \inf \{N(\gamma_1, \dots, \gamma_m; \mathcal{E}) : \rho\text{-взрывы } \mathcal{E}\}.$$

Так как любой  $\rho'$ -взрыв при  $\rho' < \rho$  является и  $\rho$ -взрывом, то мы имеем

$$(3) \quad N_{\rho'}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \geq N_\rho(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \quad \text{при } \rho' < \rho.$$

Поэтому мы можем положить

$$(4) \quad N(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = \lim_{\rho \rightarrow 0} N_\rho(\gamma_1, \dots, \gamma_m).$$

Наконец, для любой компактной функции множества  $\gamma$  положим

$$(5) \quad |\gamma|_e^{\#} = \inf \{N(\gamma_1, \dots, \gamma_m) : \gamma = \sum \gamma_i, \gamma_i \text{ компактны}\}.$$

Очевидно,

$$N_p(\gamma_1, \dots, \gamma'_1, \dots) \leq N_p(\gamma_1, \dots) + N_p(\gamma'_1, \dots);$$

поэтому мы видим, что  $|\cdot|_e^\#$  есть полунорма. Мы докажем, что

$$(6) \quad |\gamma|^\# = |\gamma|_e^\#, \quad \text{если } \gamma \text{ компактна.}$$

Докажем сначала, что  $|\gamma|_e^\# \leq |\gamma|^\#$  ( $\gamma$  компактна). В силу теоремы 15А достаточно показать, что полунорма  $|\cdot|_e^\#$  удовлетворяет условиям (а), (b) и (с) этой теоремы.

Чтобы доказать (а), достаточно показать, что  $N_p(\gamma) \leq |\gamma|$  для всех  $p$ . Возьмем некоторое чистое  $p$ -разбиение  $\sum \gamma_i$  функции множества  $\gamma$ ; не будем делать никакой перегруппировки и возьмем  $v_i = 0$ . Для получающегося в результате  $p$ -взрыва  $\mathcal{E}$  мы имеем

$$N(\gamma; \mathcal{E}) = \sum_i |\gamma_i|_0 \leq \sum_i |\gamma_i| = |\gamma|$$

[мы пользуемся (4.8)], что и дает требуемый результат.

Чтобы доказать (b), зададим  $\gamma$  и  $v$  и возьмем любое  $p > 0$ . Пусть  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  — какое-либо чистое  $p$ -разбиение функции множества  $-\gamma$ . Положим

$$\gamma_{m+i} = T_v \gamma_i, \quad v_i = v, \quad v_{m+i} = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Сгруппируем  $\gamma_i$  с  $\gamma_{m+i}$  при каждом  $i$ ; это дает некоторый  $p$ -взрыв  $\mathcal{E}$  пары  $-\gamma, T_v \gamma$ . При этом в силу (1)

$$N(-\gamma, T_v \gamma; \mathcal{E}) = \sum_{i=1}^m \frac{|v| |\gamma_i|}{r+1} = \frac{|v| |\gamma|}{r+1}.$$

Следовательно,

$$N_p(-\gamma, T_v \gamma) \leq |v| |\gamma| / (r+1),$$

и это же неравенство выполняется для  $N(-\gamma, T_v \gamma)$  и для  $|T_v \gamma - \gamma|_e^\#$ , как и требовалось.

Чтобы доказать (с), зададим точку  $p$  и число  $\varepsilon > 0$  и положим  $\zeta = (r+1)\varepsilon$ . Теперь возьмем любую функцию множества  $\gamma \subset \bar{U}_\zeta(p)$ , для которой  $|\gamma| = 0$ . Возьмем, далее, любое  $p > 0$ . Выберем чистое разбиение  $\sum \gamma_i$  функции множества  $\gamma$  и точки  $p_i$ , для которых  $\gamma_i \subset \bar{U}_p(p_i)$ . Положим  $v_i = p - p_i$ ; тогда  $|v_i| \leq \zeta$  и  $T_{v_i} \gamma_i \subset \bar{U}_p(p)$ . Далее,  $[\sum T_{v_i} \gamma_i] = |\gamma| = 0$ . Группируя вместе

все  $\gamma_i$ , мы получаем такой  $\rho$ -взрыв  $\mathcal{E}$  функции  $\gamma$ , что

$$N(\gamma; \mathcal{E}) = \sum \frac{|v_i| |\gamma_i|}{r+1} \leq \frac{\zeta |\gamma|}{r+1};$$

следовательно,  $N_\rho(\gamma) \leq \varepsilon |\gamma|$ , и (с) доказано.

Докажем теперь, что  $|\gamma|^\# \leq |\gamma|_e^\#$ . В силу (9.1) достаточно показать, что

$$(7) \quad |[\omega \cdot \gamma]| \leq |\gamma|_e^\#, \quad \text{если } |\omega|^\# \leq 1.$$

Возьмем любое  $\varepsilon > 0$ . Запишем

$$\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_m, \quad N(\gamma_1, \dots, \gamma_m) < |\gamma|_e^\# + \varepsilon,$$

где  $\gamma_i$  компактны. Возьмем любое  $\rho > 0$ . Так как  $N_\rho(\gamma_1, \dots) \leq N(\gamma_1, \dots)$ , то существует такой  $\rho$ -взрыв  $\mathcal{E}$ , что

$$N(\gamma_1, \dots, \gamma_m; \mathcal{E}) < |\gamma|_e^\# + \varepsilon.$$

В принятых выше обозначениях с помощью (15.3), (9.4), (1) и (4.8) получаем

$$\begin{aligned} |[\omega \cdot \gamma]| &= \left| \sum_{k,l} [\omega \cdot (\beta_{kl} - T_{v_{kl}} \beta_{kl})] + \sum_k \left[ \omega \cdot \sum_l T_{v_{kl}} \beta_{kl} \right] \right| \leq \\ &\leq \mathcal{Q}_0(\omega) \sum_{k,l} |v_{kl}| |\beta_{kl}| + \sum_k \left[ \rho \mathcal{Q}_0(\omega) \left| \sum_l T_{v_{kl}} \beta_{kl} \right| + \right. \\ &\quad \left. + |\omega|_0 \left| \left[ \sum_l T_{v_{kl}} \beta_{kl} \right] \right|_0 \right] \leq \\ &\leq \sum_{k,l} \frac{|v_{kl}| |\beta_{kl}|}{r+1} + \frac{\rho}{r+1} \sum_{k,l} |\beta_{kl}| + \sum_k \left| \left[ \sum_l \beta_{kl} \right] \right|_0 < \\ &< |\gamma|_e^\# + \varepsilon + \rho \sum_i \frac{|\gamma_i|}{r+1}. \end{aligned}$$

Так как  $\rho$  произвольно, то

$$|[\omega \cdot \gamma]| \leq |\gamma|_e^\# + \varepsilon,$$

откуда следует (6). Это и завершает доказательство.

**17. Другие представления диезной нормы.** Мы будем говорить, что представление  $\gamma = \sum \gamma_i$  функции множества  $\gamma$  является ее борелевским разбиением, если существуют такие борелевские функции  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  в  $E^n$ , что

$$(1) \quad 0 \leq \varphi_i(p) \leq 1, \quad \sum_i \varphi_i(p) = 1, \quad \gamma_i = \varphi_i \gamma.$$

Мы говорим, что представление  $\gamma = \sum \gamma_i$  является *липшицевским разбиением*, если существуют функции  $\varphi_i$  с указанными свойствами, являющиеся липшицевскими.

**Теорема 17А.** *В определении нормы  $|\gamma|_e^\#$  ( $\gamma$  компактна) в § 16 чистые разбиения можно заменить борелевскими разбиениями или же липшицевскими разбиениями.*

Пусть  $|\gamma|_B^\#$  обозначает  $|\gamma|_e^\#$  с тем лишь отличием, что вместо чистых разбиений используются борелевские разбиения. Так как чистые разбиения являются борелевскими, то  $|\gamma|_B^\# \leq |\gamma|_e^\#$ . Далее, доказательство неравенства (16.7), если воспользоваться (4.7), показывает, что  $|\omega \cdot \gamma| \leq |\gamma|_B^\#$  для всех дизъюнктивных форм  $\omega$ , для которых  $|\omega|^\# \leq 1$ ; поэтому  $|\gamma|^\# \leq |\gamma|_B^\#$ . Так как  $|\gamma|_e^\# = |\gamma|^\#$ , то мы имеем  $|\gamma|_B^\# = |\gamma|_e^\#$ .

Определим число  $|\gamma|_L^\#$ , пользуясь липшицевскими разбиениями; тогда, очевидно,  $|\gamma|_L^\# \geq |\gamma|_B^\#$ . Доказательство того, что  $|\gamma|_L^\# \leq |\gamma|^\#$ , проводится в точности так же, как доказательство неравенства  $|\gamma|_e^\# \leq |\gamma|^\#$  в § 16. Таким образом,  $|\gamma|_L^\# = |\gamma|_e^\#$ .

В определении нормы  $|\gamma|_e^\#$  мы не можем пользоваться пределом

$$(2) \quad |\gamma|_2^\# = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \inf \{N_\rho(\gamma_1, \dots) : \sum \gamma_i = \gamma, \gamma_i \text{ компактные} \} \right].$$

В самом деле, пусть  $\sigma$  — некоторый  $(r+1)$ -мерный симплекс. Возьмем любое  $\rho > 0$ . Если мы напомним  $\sigma = \sum \sigma_i$ ,  $\text{diam}(\sigma_i) < \rho$  и возьмем  $\gamma = \gamma_{\partial\sigma}$ ,  $\gamma_i = \gamma_{\partial\sigma_i}$ , то, рассматривая каждую функцию множества  $\gamma_{\partial\sigma_i}$  отдельно и полагая  $v_i = 0$ , мы видим, что  $N_\rho(\gamma_1, \dots) = 0$  и  $|\gamma_{\partial\sigma}|_2^\# = 0$ .

Вообще говоря, не верно и соотношение  $|\gamma|_e^\# = N(\gamma)$ . В самом деле, положим  $\gamma = \gamma_{A_0}$ , где цепь  $A_0$  определяется следующим образом. Пусть  $A$  и  $B$  — два перпендикулярных ориентированных прямолинейных отрезка в  $E^2$  длины  $\lambda = 0,1$  с общим концом. Пусть  $A'$  и  $B'$  образуются путем сдвига отрезков  $A$  и  $B$  на вектор  $v$  длины  $h = 1,8$ . Положим

$$A_0 = A + B - A' - B'.$$

Пусть  $C$  и  $C'$  — соответствующие гипотенузы, а  $D$  и  $D'$  — обра-

зованные таким образом треугольники. Тогда

$$\begin{aligned} |A_0|^{\#} &= |\partial D - \partial D' + (T_v C - C)|^{\#} \leq \\ &\leq |D| + |D'| + \frac{|v||C|}{2} = \lambda^2 + \frac{2^{1/2} h \lambda}{2} < 2^{1/2} \lambda. \end{aligned}$$

Мы докажем, что  $N(\gamma_{A_0}) \geq 2^{1/2} \lambda$ ; на самом деле  $N_p(\gamma_{A_0}) \geq 2^{1/2} \lambda$  при  $\rho = 0, 1$ . Возьмем любое чистое разбиение функции  $\gamma_{A_0}$ ; мы, очевидно, можем разбить его далее, получив разбиения функций  $\gamma_{A'}$ ,  $\gamma_{B'}$ . Тем самым получаются разбиения цепей  $A$ ,  $B$ ,  $A'$ ,  $B'$ . Действуя с ними, сгруппируем сдвиги в полиэдральные цепи  $L_1, \dots, L_s$  диаметра  $< \rho$ . Мы должны изучить формулу (16.1). Каждая из цепей  $L_i$  образуется путем сдвига частей  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $A'_i$ ,  $B'_i$  цепей  $A$ ,  $B$ ,  $A'$ ,  $B'$  соответственно. Пусть  $h_i$  — минимальная длина векторов, использованных для кусков цепей  $A_i$  и  $B_i$ , а  $h'_i$  — для кусков цепей  $A'_i$  и  $B'_i$ . Очевидно,

$$h_i + h'_i > h - 2\rho - 2^{1/2} \lambda > 1,45 > 2^{1/2}.$$

(Если  $L_i$  не содержит, например, никаких частей цепей  $A'_i$  или  $B'_i$ , то мы можем во всем дальнейшем положить  $h'_i = 1,45$ .)

Положим

$$\begin{aligned} 2a_i &= h_i |A_i| + h'_i |A'_i| + 2^{1/2} ||A_i| - |A'_i||, \\ 2b_i &= h_i |B_i| + h'_i |B'_i| + 2^{1/2} ||B_i| - |B'_i||. \end{aligned}$$

Покажем, что правая часть равенства (16.1) не менее, чем

$$(3) \quad a = \sum (a_i + b_i).$$

Из неравенства  $(a - b)^2 \geq 0$  получаем  $a^2 + b^2 \geq (a + b)^2/2$ ; полагая

$$\alpha_i = ||A_i| - |A'_i||, \quad \beta_i = ||B_i| - |B'_i||,$$

мы, таким образом, имеем

$$|\{A_i + B_i - A'_i - B'_i\}|_0 = (\alpha_i^2 + \beta_i^2)^{1/2} \geq 2^{-1/2} (\alpha_i + \beta_i),$$

и наше утверждение доказано.

Заметим, далее, что если  $h + h' \geq k$  и  $\alpha \geq \alpha'$ , причем все числа положительны, то  $h\alpha + h'\alpha' \geq k\alpha'$ ; поэтому для положительных чисел

$$h\alpha + h'\alpha' + k|\alpha - \alpha'| \geq k \sup \{\alpha, \alpha'\}, \quad \text{если } h + h' \geq k.$$

Пользуясь этим, находим

$$2a_i \geq 2^{1/2} \sup \{|A_i|, |A'_i|\},$$

и аналогично для  $2b_i$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} a &\geq \frac{2^{1/2}}{2} \sum_i \sup\{|A_i|, |A'_i|\} + \sup\{|B_i|, |B'_i|\} \geq \\ &\geq \frac{2^{1/2}}{4} \sum_i (|A_i| + |A'_i| + |B_i| + |B'_i|) = 2^{1/2}\lambda. \end{aligned}$$

Этим доказано, что

$$N(\gamma_{A_0}) \geq 2^{1/2}\lambda > |A_0|^\# = |\gamma_{A_0}|^\#,$$

как и утверждалось.

# П Р И Л О Ж Е Н И Я



## Векторные и линейные пространства

С линейными пространствами мы сталкиваемся в этой книге повсюду; в частности, линейными пространствами (в действительности банаховыми) являются множество областей интегрирования (цепи) и множество объектов интегрирования (коцепи). Наиболее важными из встречающихся конечномерных векторных пространств являются векторное пространство  $V = V(E^n)$  (§ 10), связанное с евклидовым пространством  $E^n$ , и пространства  $V_{[r]}$  и  $V^{[r]}$  поливекторов и поликовекторов, образованные из  $V$  (гл. I). Мы дадим здесь обзор основных свойств линейных пространств, которые предполагаются известными в основном тексте книги.

До некоторой степени по-новому вводится понятие аффинного пространства (§ 10). Мы пользуемся аксиоматическим подходом, основанным на теории векторных пространств.

Напомним несколько общих терминов. *Отображение  $f$  множества  $S$  в множество  $S'$  является взаимно однозначным*, если из  $f(p) = f(q)$  следует  $p = q$ ;  $f$  *есть отображение на*, если образ  $f(S)$  множества  $S$  есть все множество  $S'$ , т. е. каждый элемент  $p' \in S'$  есть  $f(p)$  для некоторого  $p \in S$ . Если и в  $S$  и в  $S'$  определена некоторая операция  $p \circ q$  (например, сложение или умножение), то  $f$  *есть гомоморфизм* при условии, что  $f(p \circ q) = f(p) \circ f(q)$ . Если  $S'$  — группа, то *ядро* гомоморфизма  $f$  *есть* множество тех элементов из  $S$ , которые переходят в тождественный элемент группы  $S'$ . Некоторое отображение одной алгебраической системы в другую систему той же природы является *изоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и сохраняет все операции. Отображение одного метрического пространства в другое *изометрично*, если оно сохраняет расстояние (следовательно, оно взаимно однозначно).

Мы пользуемся символом  $0$  в равной степени и для обозначения числа нуль и для обозначения тождественного элемента аддитивной группы (например, вектора  $0$ )<sup>1)</sup>. Обычно  $\lambda$ ,  $\mu$  и т. д. обозначают упорядоченные множества целых чисел; таким образом,

<sup>1)</sup> Этим же символом в книге обозначается пустое множество. — Прим. перев.

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ . Сумма  $\sum_{\lambda}$  обозначает сумму по всем множествам  $\lambda$ , тогда как

$$\sum_{(\lambda)} \text{ есть сумма с ограничением } \lambda_1 < \dots < \lambda_r.$$

Полезны некоторые числовые функции:

$$\epsilon_{\lambda} = \epsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_n}, \quad \delta_{\lambda}^{\mu} = \delta_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{\mu_1 \dots \mu_n};$$

$\epsilon_{\lambda}$  равно 1, если  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  — четная перестановка упорядоченного множества  $(1, \dots, n)$ , равно  $-1$ , если эта перестановка нечетна, и равно 0, если не все  $\lambda_i$  различны;  $\delta_{\lambda}^{\mu}$  равно 1, если как все  $\lambda_i$ , так и все  $\mu_i$  попарно различны и одно из этих множеств является четной перестановкой другого, равно  $-1$ , если эта перестановка нечетна, и равно 0 во всех остальных случаях.

Знак  $\hat{i}$  означает, что символ  $i$  опускается. Так,

$$\begin{aligned} (p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n) &= (p_1, \dots, \hat{i}, \dots, p_n) = \\ &= (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n). \end{aligned}$$

Мы пишем  $G \approx G'$ , если группы или векторные пространства  $G, G'$  изоморфны.

**1. Векторные пространства.** *Линейное пространство*  $V$  есть множество элементов, называемых точками, или векторами, которые образуют абелеву группу при операции сложения и которые можно умножать на скаляры (всегда в этой книге являющиеся действительными числами), причем <sup>1)</sup>  $a(u+v) = au + av$ ,  $(ab)v = a(bv)$ ,  $1v = v$ . Мы предполагаем известной теорию линейной зависимости. *Размерность*  $\dim(V)$  пространства  $V$  есть максимальное число независимых элементов в  $V$ ;  $V$  есть *векторное пространство*, если его размерность конечна. В этом случае в  $V$  существует *базис*  $e_1, \dots, e_n$  ( $n = \dim(V)$ ), обладающий тем свойством, что любой вектор  $v$  из  $V$  может быть единственным образом записан в виде  $v = \sum v^i e_i$ ; числа  $v^i$  называются *компонентами* вектора  $v$  относительно этого базиса.

Каждое множество  $H$  векторов из  $V$  порождает некоторое подпространство  $H^*$  пространства  $V$ , состоящее из всех векто-

<sup>1)</sup> Конечно, приведенных автором требований недостаточно. Например, если определить „умножение“ на числа так, что  $0 \cdot v = 0$ ,  $a \cdot v = v$  при  $a \neq 0$ , то требования автора будут выполнены, но, конечно, это не есть линейное пространство. Пропущено требование  $(a+b)v = av + bv$ . — Прим. ред.

ров  $v$ , которые можно записать в виде  $\sum a_i u_i$ , где  $u_i$  принадлежит  $H$ .

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  и  $e'_1, \dots, e'_n$  — базисы в  $V$ . Тогда мы можем написать

$$(1) \quad e_i = \sum_j a_i^j e'_j, \quad e'_i = \sum_j a_i'^j e_j.$$

Комбинируя эти равенства, получаем  $e_i = \sum_j a_i^j \sum_k a_j'^k e_k$  и т. д., следовательно,

$$(2) \quad \sum_j a_i^j a_j'^k = \sum_j a_i'^j a_j^k = \delta_i^k,$$

т. е. матрицы  $\|a_i^j\|$ ,  $\|a_i'^j\|$  являются взаимно обратными. Записывая

$$v = \sum_i v'^i e'_i = \sum_j v^j e_j = \sum_j v^j \sum_i a_i^j e'_i,$$

мы получаем закон преобразования компонент вектора  $v$ :

$$(3) \quad v'^i = \sum_j a_i^j v^j, \quad v^i = \sum_j a_i'^j v'^j.$$

Векторное пространство  $V$  (но, вообще говоря, не линейное пространство) имеет *естественную топологию*: определяются открытые и замкнутые множества, а также предельные точки последовательностей, с обычными свойствами. Чтобы показать это, выберем некоторый базис  $e_1, \dots, e_n$  и с его помощью введем метрику, как ниже в § 9; различный выбор базисов приводит, вообще говоря, к различным метрикам, но к одной и той же топологии.

Важный пример векторного пространства представляет собой  $n$ -мерное *арифметическое пространство*  $\mathfrak{A}^n$ . Его элементами являются упорядоченные множества  $(a_1, \dots, a_n)$ , состоящие из  $n$  действительных чисел, с очевидным определением сложения и умножения на скаляры. Оно имеет *естественный базис*

$$(4) \quad \bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \bar{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad \bar{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

С помощью этого базиса получаем естественную метрику пространства  $\mathfrak{A}^n$  (§ 9).

**2. Линейные отображения.** Отображение  $\varphi$  линейного пространства  $V$  в другое линейное пространство  $W$  называется *линейным*, если

$$(1) \quad \varphi(u + v) = \varphi u + \varphi v, \quad \varphi(au) = a\varphi u.$$

Ясно, что  $\varphi$  является взаимно однозначным в том и только в том случае, если из  $\varphi u = 0$  следует  $u = 0$ .

Множество всех линейных отображений пространства  $V$  в  $W$ , если мы по определению положим

$$(2) \quad (\varphi + \psi)v = \varphi v + \psi v, \quad (a\varphi)v = a(\varphi v),$$

образует линейное пространство  $L(V, W)$ .

Если  $\varphi$  и  $\psi$  — линейные отображения пространства  $V$  в  $W$  и пространства  $W$  в  $X$  соответственно, то отображение  $\psi \circ \varphi = \psi\varphi$ , определяемое условием

$$(3) \quad (\psi\varphi)(v) = \psi(\varphi v),$$

является линейным отображением пространства  $V$  в  $X$ .

**3. Сопряженные пространства.** Пусть  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^1$  — пространство действительных чисел. Тогда *пространство, сопряженное* к векторному пространству  $V$ , есть векторное пространство

$$(1) \quad \bar{V} = L(V, \mathfrak{A});$$

таким образом, элементами пространства  $\bar{V}$  являются линейные функции  $f$ , определенные в  $V$  и принимающие действительные значения. (По поводу случая нормированных линейных пространств см. ниже § 8.) Элементы пространства  $\bar{V}$  мы называем *ковекторами* пространства  $V$ .

Если  $e_1, \dots, e_n$  — некоторый базис в  $V$ , то *взаимный базис*  $e^1, \dots, e^n$  в пространстве  $\bar{V}$  есть множество элементов из  $\bar{V}$ , определяемых условиями

$$(2) \quad e^i(e_j) = \delta_j^i.$$

Так как любой элемент из  $\bar{V}$  определяется заданием его значений на элементах  $e_i$ , то мы легко находим, что элементы  $e^i$  действительно образуют базис в  $\bar{V}$ . Отсюда следует также, что  $\dim(\bar{V}) = \dim(V)$  и, следовательно,  $V$  и  $\bar{V}$  изоморфны (но изоморфизм зависит от выбора базиса).

*Компонентами* ковектора  $f = \sum f_i e^i$  относительно указанного выше базиса являются числа  $f_i$ . Составляя значения  $e^i(v)$  и  $f(e_i)$  и пользуясь (2), получаем

$$(3) \quad v^i = e^i(v), \quad f^i = f(e_i);$$

Далее,

$$(4) \quad f(v) = \sum f_i v^i.$$

Для каждого вектора  $v$  пространства  $V$  положим

$$(5) \quad \Phi_v(f) = f(v), \quad f \in \bar{V};$$

тогда  $\Phi_v$  есть линейная функция на пространстве  $\bar{V}$ , т. е. элемент пространства  $\bar{\bar{V}}$ , сопряженного к  $\bar{V}$ . Ясно, что  $\Phi$  есть линейное отображение пространства  $V$  в  $\bar{\bar{V}}$ .

Лемма 3а.  $\Phi$  есть изоморфизм векторного пространства  $V$  на  $\bar{\bar{V}}$ .

Замечание. Это может не выполняться для банаховых пространств; см. § 14.

Чтобы показать, что  $\Phi$  взаимно однозначно, допустим, что  $v \neq 0$ . Существуют такие элементы  $e_2, \dots, e_n$  пространства  $V$ , что  $v, e_2, \dots, e_n$  есть базис. Существует, далее, такой элемент  $f$  пространства  $\bar{V}$ , что  $f(v) = 1, f(e_i) = 0$ ; тогда  $\Phi_v(f) = f(v) \neq 0$ . Этим доказано, что  $\Phi_v \neq 0$ . Отсюда также следует, что  $\dim(\Phi(V)) = \dim(V) = \dim(\bar{V}) = \dim(\bar{\bar{V}})$ ; следовательно,  $\Phi$  есть отображение на все пространство  $\bar{\bar{V}}$ .

Возьмем, как и в § 1, в пространстве  $V$  два базиса, и пусть  $e^1, \dots$  и  $e'^1, \dots$  — взаимные базисы. Пользуясь (1.1) и (1.2), получаем

$$\left(\sum_k a_k^i e^k\right)(e'_j) = \left(\sum_k a_k^i e^k\right)\left(\sum_l a_j'^l e_l\right) = \sum_{k,l} a_j'^l a_k^i \delta_l^k = \delta_j^i;$$

аналогичное соотношение имеет место для  $e'^k, e_j$ . Отсюда

$$(6) \quad e'^i = \sum_j a_j^i e^j, \quad e^i = \sum_j a_j'^i e'^j.$$

Так же, как в (1.3), находим закон преобразования компонент ковектора:

$$(7) \quad f'_i = \sum_j a_j^i f_j, \quad f_i = \sum_j a_j'^i f'_j.$$

Пусть  $\varphi$  — линейное отображение векторного пространства  $V$  в векторное пространство  $W$ . Тогда существует сопряженное (или дуальное, или присоединенное) линейное отображение  $\varphi^*$  пространства  $\bar{W}$  в пространство  $\bar{V}$ , определяемое условием

$$(8) \quad (\varphi^* f)(v) = f(\varphi v), \quad f \in \bar{W}, v \in V.$$

Каждому отображению  $\varphi$  соответствует некоторое  $\varphi^*$ ; таким образом, мы имеем отображение пространства  $L(V, W)$  в  $L(\bar{W}, \bar{V})$ , которое, очевидно, линейно:

$$(9) \quad (\varphi_1 + \varphi_2)^* = \varphi_1^* + \varphi_2^*, \quad (a\varphi)^* = a\varphi^*.$$

Кроме того, если  $\varphi$  и  $\psi$  — линейные отображения пространства  $V$  в  $W$  и пространства  $W$  в  $X$  соответственно, то

$$(10) \quad (\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*,$$

потому что для любых  $f \in \bar{X}$  и  $v \in V$  мы имеем

$$\begin{aligned} ((\psi\varphi)^* f)(v) &= f((\psi\varphi)v) = f(\psi(\varphi v)) = \\ &= (\psi^* f)(\varphi v) = (\varphi^*(\psi^* f))(v) = ((\varphi^*\psi^*) f)(v). \end{aligned}$$

**4. Прямые суммы, дополнения.** Если  $X$  и  $Y$  — произвольные множества, то их *декартово произведение*  $X \times Y$  есть множество всех пар  $(x, y)$ , или  $x \times y$ , где  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . Пусть  $V$  и  $W$  — линейные пространства. Тогда их декартово произведение может быть превращено в линейное пространство  $V \oplus W$ , *прямую сумму* пространств  $V$  и  $W$ , если по определению положить

$$(1) \quad (v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \quad a(v, w) = (av, aw).$$

Подобным же образом мы можем определить  $V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ . Ясно, что для векторных пространств  $\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W)$ . Заметим, что  $\mathfrak{A}^n = \mathfrak{A} \oplus \dots \oplus \mathfrak{A}$  ( $n$  слагаемых).

Пусть  $V_1$  и  $V_2$  — некоторые подпространства линейного пространства  $V$ . Если каждый элемент из  $V$  может быть единственным образом записан в виде  $v = v_1 + v_2$  ( $v_1 \in V_1$ ,  $v_2 \in V_2$ ), то мы говорим, что  $V_1$  и  $V_2$  являются *дополнительными подпространствами* пространства  $V$ . Тогда, очевидно,  $V \approx V_1 \oplus V_2$ . Линейное отображение  $\pi$ , определяемое равенством

$$(2) \quad \pi(v_1 + v_2) = v_1 \quad (v_1 \in V_1, v_2 \in V_2),$$

оставляет неподвижными все векторы из  $V_1$  и переводит все векторы из  $V_2$  в 0; оно называется *проекцией* пространства  $V$  на  $V_1$  вдоль  $V_2$ .

**5. Фактор-пространства.** Пусть  $V_1$  — некоторое подпространство линейного пространства  $V$ . Мы пишем

$$(1) \quad v \equiv w \bmod V_1, \quad \text{если} \quad w - v \in V_1.$$

Это соотношение рефлексивно, симметрично и транзитивно; поэтому элементы пространства  $V$  распадаются на классы эквивалентности относительно этого соотношения. Пусть  $C_v$  — класс, содержащий элемент  $v$ . Полагая

$$(2) \quad C_v + C_w = C_{v+w}, \quad aC_v = C_{av},$$

мы превращаем эти классы в элементы некоторого линейного пространства, *фактор-пространства, пространства-частного*, или

*пространства-разности* пространства  $V$  по подпространству  $V_1$ ; мы будем обозначать его символом  $V \bmod V_1$ .

Если  $V_1$  имеет в  $V$  дополнение  $V_2$ , то каждый класс  $C_v$  содержит в точности один элемент  $\pi v$  из  $V_2$ ; полагая  $\Phi(C_v) = \pi v$ , мы определяем изоморфизм пространства  $V \bmod V_1$  на подпространство  $V_2$ .

**6. Спаривание линейных пространств.** Результаты этого параграфа будут применены в следующем. Мы говорим, что линейные пространства  $V, W$  *спарены*, если определено билинейное умножение  $w \cdot v$  с действительными значениями. Для любого подпространства  $V_1$  пространства  $V$  *аннулятор*  $\text{ann}(V_1)$  есть подпространство пространства  $W$ , состоящее из всех таких элементов  $w$ , что  $w \cdot v = 0$  при  $v \in V_1$ ; подобным же образом определяется  $\text{ann}(W_1)$ .

*Лемма 6а.* Пусть  $H$  и  $H^*$  — спаренные векторные пространства; допустим, что  $\text{ann}(H)$  и  $\text{ann}(H^*)$  содержат соответственно в  $H^*$  и  $H$  только 0. Тогда, полагая  $[\Phi(h^*)](h) = h^* \cdot h$ , мы получаем изоморфизм  $\Phi$  пространства  $H^*$  на пространство  $\bar{H}$ .

Ясно, что  $\Phi$  есть линейное отображение пространства  $H^*$  в  $\bar{H}$ . Если  $\Phi(h^*) = 0$ , то  $h^* \in \text{ann}(H)$ ; поэтому  $h^* = 0$  и  $\Phi$  взаимно однозначно. Ясно также, что  $\dim(H^*) \leq \dim(\bar{H})$ . По тем же соображениям

$$\dim(\bar{H}) = \dim(H) \leq \dim(\bar{H}^*) = \dim(H^*);$$

следовательно,  $\Phi$  есть отображение на все пространство  $\bar{H}$ .

**7. Абстрактные гомологии.** Мы пользуемся обозначениями, сходными с обозначениями в (П. II, 8). Если дано векторное пространство  $C$  и такое линейное отображение  $d$  пространства  $C$  в себя, что  $d\partial A = 0$ , то мы определим соответствующие пространства „гомологий“  $H$  и пространство „когомологий“  $H^*$ . Мы пишем  $X \cdot A$  вместо  $X(A)$  ( $A \in C, X \in \bar{C}$ ).

Пусть  $Z$  и  $B$  — соответственно ядро и образ отображения  $d$ ; пусть  $d = d^*$  — сопряженное к  $d$  отображение пространства  $\bar{C}$  в  $\bar{C}$ , и пусть  $Z^*$  и  $B^*$  — соответственно ядро и образ отображения  $d^*$ . Докажем соотношения

$$(1) \quad Z^* = \text{ann}(B), \quad (2) \quad Z = \text{ann}(B^*),$$

$$(3) \quad B^* = \text{ann}(Z), \quad (4) \quad B = \text{ann}(Z^*).$$

Включение  $X \in Z^*$  означает, что  $dX = 0$ , т. е.  $dX \cdot A = X \cdot \partial A = 0$  (для всех  $A \in C$ ), и, значит,  $X \in \text{ann}(B)$ . Точно так же  $B \subset \text{ann}(Z^*)$ . Если дан элемент  $A \in \text{ann}(Z^*)$ , то, полагая  $\varphi(dX) = X \cdot A$ , мы,

очевидно, получаем некоторую линейную функцию  $\varphi$  в  $\mathbf{B}^*$ , имеющую линейное продолжение  $\varphi_1$  на  $\bar{\mathbf{C}}$ . Так как  $\bar{\mathbf{C}} \approx \mathbf{C}$ , то существует такой элемент  $B \in \mathbf{C}$ , что  $Y \cdot B = \varphi_1(Y)$  для всех  $Y \in \bar{\mathbf{C}}$ . Теперь

$$X \cdot \partial B = dX \cdot B = \varphi_1(dX) = \varphi(dX) = X \cdot A \text{ для всех } X \in \bar{\mathbf{C}},$$

откуда следует, что  $A = \partial B$ ,  $A \in \mathbf{B}$ . Таким образом, равенства (1) и (4) доказаны. Меняя местами  $\mathbf{C}$  и  $\bar{\mathbf{C}}$  и пользуясь изоморфизмом  $\bar{\mathbf{C}} \approx \mathbf{C}$ , получаем два других равенства.

Так как  $\partial \partial A = 0$ , то  $\mathbf{B} \subset \mathbf{Z}$ . Далее,

$$ddX \cdot A = dX \cdot \partial A = X \cdot \partial \partial A = 0$$

(для всех  $A \in \mathbf{C}$ ); поэтому  $ddX = 0$  и  $\mathbf{B}^* \subset \mathbf{Z}^*$ . Следовательно, мы можем определить фактор-пространства

$$(5) \quad \mathbf{H} = \mathbf{Z} \bmod \mathbf{B}, \quad \mathbf{H}^* = \mathbf{Z}^* \bmod \mathbf{B}^*.$$

Полагая

$$(6) \quad h^* \cdot h = X \cdot A, \text{ если } X \in h^*, A \in h,$$

мы определяем спаривание пространств  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}^*$ ; из (1) и (2) сразу видим, что это определение корректно. Допустим, что  $h^* \cdot h = 0$  для всех  $h \in \mathbf{H}$ . Возьмем элемент  $X \in h^*$ ; тогда  $X \cdot A = 0$  для всех  $A \in \mathbf{Z}$  и в силу (3)  $X \in \mathbf{B}^*$  и  $h^* = 0$ ; поэтому  $\text{app}(\mathbf{H}) = 0$ . Аналогично,  $\text{app}(\mathbf{H}^*) = 0$ . Следовательно, в силу леммы 6а рассматриваемое умножение определяет изоморфизмы

$$(7) \quad \mathbf{H}^* \approx \bar{\mathbf{H}}, \quad \mathbf{H} \approx \bar{\mathbf{H}}^*.$$

**8. Нормированные линейные пространства.** Пусть  $V$  — некоторое линейное пространство. Любую действительную функцию  $|v|$ , определенную в  $V$  и удовлетворяющую условиям

$$(1) \quad |v + w| \leq |v| + |w|,$$

$$(2) \quad |av| = |a| |v|,$$

мы называем *полуноrmой* в  $V$ .

**Лемма 8а.** Для любой *полуноrmы*

$$(3) \quad |0| = 0,$$

$$(4) \quad |v| \geq 0.$$

Равенство (3) следует из (2), если положить  $a = 0$ , а неравенство (4) — из того, что  $2|v| = |v| + |-v| \geq |v - v| = 0$ .

Полунорма  $|v|$  является *нормой*, если

$$(5) \quad |v| \neq 0 \text{ при } v \neq 0.$$

Если это имеет место, то мы можем определить *расстояние* между двумя векторами  $v$  и  $w$ , полагая

$$(6) \quad \rho(v, w) = |w - v|;$$

тем самым мы превращаем  $V$  в метрическое пространство. [Неравенство треугольника сразу следует из (1).] Мы будем теперь предполагать, что  $V$  нормировано.

*Действительная ограниченная линейная функция* <sup>1)</sup>  $f$  в пространстве  $V$  есть такая линейная функция, принимающая действительные значения, для которой верхняя грань

$$(7) \quad |f| = \sup \{f(v) : v \in V, |v| = 1\}$$

конечна. Тогда  $|f|$  есть наименьшее из таких чисел, что

$$(8) \quad |f(v)| \leq |f| |v| \quad \text{для всех } v \in V.$$

Из (8) следует, что *функция  $f$  непрерывна в  $V$ .*

*Лемма 8b. Для любого  $v \in V$  существует такая ограниченная линейная функция  $f$  в пространстве  $V$ , что*

$$(9) \quad |f| = 1, \quad f(v) = |v|.$$

Это непосредственное следствие теоремы Хана — Банаха о продолжении линейной функции, см. Банах, стр. 27 <sup>2)</sup>.

*Замечание.* Вообще говоря, функция  $f$  не единственна; см. конец параграфа (I.13).

Множество всех ограниченных линейных функций в пространстве  $V$  образует линейное пространство, в котором, очевидно, выполняются условия (1) и (2); ясно также (в силу леммы), что выполняется и условие (5). Таким образом, эти функции образуют нормированное линейное пространство  $\bar{V}$ , *пространство, сопряженное к пространству  $V$ .*

*Лемма 8с. Для определенных выше норм имеет место соотношение*

$$(10) \quad |v| = \sup \{f(v) : f \in \bar{V}, |f| = 1\}.$$

Пусть  $|v|'$  — обозначает правую часть. В силу (8)  $|v|' \leq |v|$ ; но в силу леммы 8b  $|v|' \geq |v|$ .

Пусть  $V$  — нормированное векторное пространство. Тогда любая линейная функция  $f$  на  $V$  ограничена; поэтому  $\bar{V}$ , рассматриваемое

<sup>1)</sup> В переводе сохранена терминология автора: мы называем  $f$  функцией, а не функционалом. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> См. Банах С., Курс функционального анализа, Київ, 1948, стр. 46. — *Прим. перев.*

просто как векторное пространство, является в точности пространством, сопряженным к  $V$ , в соответствии с определением, данным в § 3.

**Лемма 8d.** Пусть дано нормированное линейное пространство  $V$ , и пусть  $\Phi$  — линейное отображение пространства  $V$  в  $\bar{V}$ , определяемое с помощью (3.5). Тогда  $\Phi$  есть изоморфизм в пространство  $\bar{V}$ .

В силу леммы 8b пригодно доказательство леммы 3a.

Допустим, что  $V$  и  $\bar{V}$  сопряжены, как в § 3. Пусть  $|v|$  и  $|f|$  — некоторые нормы в этих пространствах. Мы называем эти нормы *сопряженными*, если имеют место равенства (7) и (10). В силу леммы 8с достаточно доказать (7). Теперь мы покажем, что достаточно также доказать (10).

**Лемма 8e.** Пусть  $V$  и  $\bar{V}$  — сопряженные векторные пространства, и пусть они как-либо нормированы. Если имеет место соотношение (10), то имеет место и (7), и нормы являются сопряженными.

Норма  $|f|$  в  $\bar{V}$  определяет некоторую норму в  $\bar{V}$ ; если отображение  $\Phi$  определено так же, как и выше, то в силу (10) норма любого элемента  $\Phi_v$  из  $\bar{V}$  равна

$$(11) \quad |\Phi_v| = \sup \{ \Phi_v(f) : |f| = 1 \} = \sup \{ f(v) : |f| = 1 \} = |v|.$$

Таким образом, применяя лемму 8с к пространствам  $\bar{V}$ ,  $\bar{\bar{V}}$ , мы получаем

$$|f| = \sup \{ \Phi_v(f) : |\Phi_v| = 1 \} = \sup \{ f(v) : |v| = 1 \},$$

что и требовалось.

**9. Евклидовы линейные пространства.** Линейное пространство  $V$  является *евклидовым*, если в нем определено *скалярное произведение*  $u \cdot v$  с действительными значениями, удовлетворяющее условиям

(1) Это произведение билинейно и симметрично.

(2)  $v \cdot v > 0$ , если  $v \neq 0$ .

Определим *норму* и *расстояние* формулами

$$(3) \quad |v| = (v \cdot v)^{1/2}, \quad \rho(v, w) = |w - v|.$$

Докажем неравенство Шварца:

$$(4) \quad |u \cdot v| \leq |u| |v|.$$

Мы можем считать, что  $|v| = 1$ . Полагая  $a = u \cdot v$ , находим

$$0 \leq |u - av|^2 = |u|^2 - 2a(u \cdot v) + a^2 = |u|^2 - (u \cdot v)^2,$$

откуда следует (4). [Другое доказательство можно найти в (I, 12.8).]

Применяя (4), получаем

$$|u + v|^2 = |u|^2 + 2(u \cdot v) + |v|^2 \leq (|u| + |v|)^2,$$

и (8.1) доказано. Отсюда мы видим, что  $|v|$  действительно есть норма в  $V$  и что, следовательно,  $V$  является метрическим пространством.

Векторы  $u, v$  ортогональны, если  $u \cdot v = 0$ ; если  $u \neq 0, v \neq 0$ , то мы называем их *перпендикулярными*. Множества  $P, Q$  векторов ортогональны, если  $u \cdot v = 0$  для всех  $u \in P, v \in Q$ . Множество векторов  $v_1, \dots, v_r$  называется *ортонормальным*, если  $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$ ; таким образом,  $v_1, \dots, v_r$  являются взаимно ортогональными единичными векторами.

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормальный базис в  $V$  (мы предполагаем, что  $V$  имеет конечную размерность). Тогда, выражая векторы через их компоненты (§ 1), мы находим

$$(5) \quad u \cdot v = \left( \sum_i u^i e_i \right) \cdot \left( \sum_j v^j e_j \right) = \sum_i u^i v^i,$$

$$(6) \quad |v| = \left| \sum_i v^i e_i \right| = \left[ \sum_i (v^i)^2 \right]^{1/2}.$$

Заметим, что базис  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  в  $\mathfrak{A}^n$  (§ 1) ортонормален.

Если дано векторное пространство  $V$ , то мы можем выбрать в нем некоторый базис  $e_1, \dots, e_n$  и с помощью (5) определить скалярное произведение; тем самым  $V$  превращается в евклидово векторное пространство.

**Лемма 9а.** *Отображение  $\varphi$  евклидова векторного пространства  $V$  в  $\bar{V}$ , определяемое условием  $\varphi_u(v) = u \cdot v$ , является изометричным отображением на все пространство  $\bar{V}$ ; если положить  $\varphi_u \cdot \varphi_v = u \cdot v$ , то  $\bar{V}$  становится евклидовым пространством с той же нормой, что и в (8.7).*

Так как скалярное произведение билинейно, то  $\varphi_u \in \bar{V}$  и отображение  $\varphi$  линейно. Если  $u \neq 0$ , то  $\varphi_u(u) = |u|^2 \neq 0$ ,  $\varphi_u \neq 0$ , поэтому  $\varphi$  взаимно однозначно. Так как  $\dim(\bar{V}) = \dim(V)$ , то  $\varphi$  является отображением на все пространство  $\bar{V}$ . Норма элемента  $\varphi_u$  в  $\bar{V}$  равна

$$|\varphi_u| = \sup \{ \varphi_u(v) : |v| = 1 \} = \sup \{ u \cdot v : |v| = 1 \}.$$

В силу (4)  $|\varphi_u| \leq |u|$ . Если  $u \neq 0$ , то, полагая  $v = u/|u|$ , мы покажем, что  $|\varphi_u| \geq |u|$ . Таким образом,  $|\varphi_u| = |u|$ , и из (8.6) следует, что  $\varphi$  есть изометричное отображение.

Заметим, что если  $v \neq 0$ , то функция  $f = \varphi_v$ , где  $u = v/|v|$ , удовлетворяет условиям (8.9) и является единственным элементом из  $\bar{V}$ , обладающим этим свойством.

Скалярное произведение  $\varphi_u \cdot \varphi_v = u \cdot v$  удовлетворяет условию (1). Далее,  $(\varphi_u \cdot \varphi_u)^{1/2} = (u \cdot u)^{1/2} = |u| = |\varphi_u|$ . Наконец, если  $\varphi_u \neq 0$ , то  $u \neq 0$ ,  $|u| \neq 0$  и  $|\varphi_u| \neq 0$ , и (2) доказано.

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — некоторый ортонормальный базис в  $V$ . Так как  $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ , то множество  $\varphi_{e_1}, \dots, \varphi_{e_n}$  является взаимным базисом.

Так как  $\varphi_u(e_i) = u \cdot e_i = \varphi_u \cdot \varphi_{e_i} = e^i \cdot \varphi_u$ , то  $f(e_i) = e^i \cdot f$ . Кроме того,  $e^i(v) = \varphi_{e_i}(v) = e_i \cdot v$ . Поэтому в силу (3.3)

$$7) \quad v^i = e^i(v) = e_i \cdot v, \quad f_i = f(e_i) = e^i \cdot f$$

для ортонормального базиса.

Далее (все время для некоторого ортонормального базиса),

$$(8) \quad u \cdot v = \sum_i u^i v^i, \quad f \cdot g = \sum_i f_i g_i.$$

Так как  $\varphi_v = \sum v^i \varphi_{e_i} = \sum v^i e^i$ , то мы имеем

$$(9) \quad f_i = v^i, \quad \text{если} \quad f = \varphi_v.$$

**10. Аффинные пространства.** Аффинное пространство, грубо говоря, есть векторное пространство, но без специального вектора, выбранного в качестве нуля. Оно может быть определено следующим образом.

*Аффинное пространство*  $E$  размерности  $n$  есть система, состоящая из множества точек  $p$ , векторного пространства  $V = V(E)$  размерности  $n$  и операций  $p + v$ , где  $p \in E$  и  $v \in V$ , называемых *сдвигами* и обладающих следующими свойствами <sup>1)</sup>:

$$(1) \quad (p + u) + v = p + (u + v).$$

$$(2) \quad p + 0 = p.$$

$$(3) \quad p + v \neq p, \quad \text{если} \quad v \neq 0.$$

$$(4) \quad \text{Для каждых } p \text{ и } q \text{ существует такой вектор } v, \\ \text{что } p + v = q.$$

<sup>1)</sup> Свойство (2) вытекает из остальных. Действительно, пусть  $u$  — такой вектор, что  $p + u = q$  [см. (4)]. В силу (1)  $(p + u) + 0 = p + (u + 0) = p + u$ , или  $q + 0 = q$  (где  $q$  — произвольная точка). — Прим. ред.

Другими словами,  $V$  есть транзитивная группа преобразований пространства  $E$ .

Докажем, что

$$(5) \quad \text{если } p + u = p + v, \text{ то } u = v.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} p + 0 &= p + (u + (-u)) = (p + u) + (-u) = \\ &= (p + v) + (-u) = p + (v - u), \end{aligned}$$

и из (3) следует, что  $v - u = 0$ .

В силу (5) вектор  $v$  в (4) определяется единственным образом. Мы обозначаем его через  $q - p$ .

Если  $p + v = q$ , то  $q + (-v) = p + (v + (-v)) = p$ ; поэтому соотношения

$$(6) \quad p + v = q, \quad v = q - p, \quad q + (-v) = p, \quad -v = p - q$$

эквивалентны.

Так как в силу (1) и (6)

$$\begin{aligned} p + [(p' - p) + (p'' - p')] &= \\ &= [p + (p' - p)] + (p'' - p') = p' + (p'' - p') = p'', \end{aligned}$$

то, второй раз применяя (6), получаем

$$(7) \quad p'' - p = (p'' - p') + (p' - p).$$

Выберем фиксированную точку  $O \in E$ , которую можно называть „началом“, и положим  $\varphi(v) = O + v$  ( $v \in V$ ). Тем самым между векторами из  $V$  и точками из  $E$  установлено взаимно однозначное соответствие.

Пример. Пусть  $V^{n+1}$  — векторное пространство, а  $V^n$  — его подпространство (индексы указывают размерности). Выберем вектор  $O \in V^{n+1}$ , не принадлежащий  $V^n$ , и пусть  $E$  — множество всех векторов вида  $p = O + v$  ( $v \in V^n$ ). Тогда  $E$  есть аффинное пространство с  $V^n$  в качестве связанного с ним векторного пространства.

Любой вектор в  $V^{n+1}$  может быть записан в виде

$$(8) \quad tp + v \quad (t \in \mathbb{A}, p \in E, v \in V^n),$$

причем  $t$  определено однозначно; мы имеем

$$(9) \quad tp + v = tp' + v' \quad \text{в том и только в том случае,} \\ \text{если } v' - v = t(p - p').$$

Покажем теперь, что все аффинные пространства имеют такой же характер. Если даны  $E$  и  $V = V(E)$ , то определим  $V'$  как множество всех выражений вида (8), подчиняющихся правилу (9). Очевидно, соотношение (9) рефлексивно, симметрично и транзитивно; поэтому  $V'$  есть корректно определенное множество элементов. Пусть  $tp$  обозначает  $tp + 0$ .

Чтобы превратить  $V'$  в векторное пространство, выберем некоторую точку  $O \in E$ . Заметим, что из (9) следует

$$(10) \quad tp + v = tO + v', \quad v' = t(p - O) + v.$$

Таким образом, любой элемент из  $V'$  может быть записан в виде  $tO + v'$ ; это представление в силу (9) единственно. Положим

$$(11) \quad a(tO + v) = (at)O + av,$$

$$(12) \quad (tO + v) + (t'O + v') = (t + t')O + (v + v').$$

Возьмем любой элемент  $O' \in E$ ; положим  $w = O' - O$ . Тогда из этих равенств и из (9) и (10) следует

$$\begin{aligned} a(tO') &= a(tO + tw) = (at)O + atw = (at)O', \\ tO' + t'O' &= (tO + tw) + (t'O + t'w) = (t + t')O + (tw + t'w) = \\ &= (t + t')O + (t + t')w = (t + t')O'; \end{aligned}$$

этим показано, что операции (11) и (12) не зависят от выбора точки  $O$ .

Определим прямую сумму  $V^*$  (§ 4) и взаимно однозначное отображение пространства  $V^*$  на  $V'$ , полагая

$$(13) \quad V^* = \mathfrak{A} \oplus V, \quad \psi(t, v) = tO + v.$$

Так как  $V^*$  есть векторное пространство и рассматриваемые операции при отображении  $\psi$  сохраняются, то этим доказано, что  $V'$  есть векторное пространство.

Полагая  $\varphi(p) = 1p$ , мы включаем  $E$  в  $V'$ ; таким образом, мы вновь оказались в обстановке, описанной в приведенном выше примере.

Подмножество  $E'$  аффинного пространства  $E$  является *аффинным подпространством* пространства  $E$ , если существует такое векторное подпространство  $V'$  пространства  $V(E)$ , что операции  $p' + v'$  ( $p' \in E'$ ,  $v' \in V'$ ) делают  $E'$  аффинным пространством с  $V' = V(E')$  в качестве связанного с ним векторного пространства.

**11. Бариеентрические координаты.** Определим некоторые „линейные комбинации“ точек аффинного пространства  $E$ . Выбрав фиксированную точку  $O \in E$ , положим (для любого  $k$ )

$$(1) \quad \sum_{i=0}^k a_i p_i = O + \sum_{i=0}^k a_i (p_i - O), \quad \text{если} \quad \sum_{i=0}^k a_i = 1;$$

$$(2) \quad \sum_{i=0}^k a_i p_i = \sum_{i=0}^k a_i (p_i - O), \quad \text{если} \quad \sum_{i=0}^k a_i = 0.$$

В (1) результат есть точка из  $E$ , а в (2) — вектор из  $V = V(E)$ .

Определим  $V'$ , как в § 10. И (1) и (2) в  $V'$  имеют смысл и представляют собой правильные соотношения; поэтому если рассматривать  $E$  как пространство, вложенное в  $V'$ , то правые части (имеющие непосредственный смысл в  $E$  и  $V$ ) не зависят от выбора точки  $O$ . (Легко дать и прямое доказательство.)

Точка  $p$ , определяемая соотношением (1), есть центр тяжести множества масс, если считать, что в точке  $p_i$  имеется масса  $a_i$ .

Точки  $p_0, \dots, p_k$  пространства  $E$  *зависимы*, если они содержатся в некотором аффинном подпространстве пространства  $E$ , имеющем размерность  $< k$ ; в противном случае они *независимы*.

Если точки  $p_i$  независимы, то различные множества чисел  $a_i$  в (1) определяют различные точки  $p$ ; числа  $a_i$  называются *бариеентрическими координатами* точки  $p$  относительно точек  $p_i$ . В частности, когда  $t$  изменяется от 0 до 1, точка

$$(3) \quad (1-t)p + tq = p + t(q-p)$$

перемещается из  $p$  в  $q$ .

Другой пример. Пусть  $p_0, p_1, p_2$  — вершины некоторого треугольника. Точкой, находящейся на двух третьих пути от  $p_0$  до середины стороны  $p_1 p_2$ , будет

$$q = \frac{1}{3} p_0 + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{2} p_2 \right) = \frac{1}{3} p_0 + \frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{3} p_2.$$

Симметрия этого выражения показывает, что медианы треугольника пересекаются в  $q$ .

Любое непустое подмножество  $Q$  пространства  $E$  порождает некоторое подпространство  $E'$  пространства  $E$ , именно, наименьшее подпространство пространства  $E$ , содержащее  $Q$ . Если  $p_0, \dots, p_k$  — максимальное множество независимых точек в  $Q$ , то  $E'$  состоит из всех точек вида (1).

Очевидно, что точно так же, как и в  $V(E)$  (см. § 1), в  $E$  имеется *естественная топология*.

**12. Аффинные отображения.** Пусть  $E$  и  $E'$  — аффинные пространства,  $Q$  — подмножество пространства  $E$  и  $f$  — отображение множества  $Q$  в  $E'$ . Мы говорим, что  $f$  *аффинно*, если

$$(1) \quad f\left(\sum a_i p_i\right) = \sum a_i f(p_i) \quad \left(\sum a_i = 1\right),$$

предполагая, что каждая точка  $p_i$  и  $\sum a_i p_i$  принадлежат  $Q$ .

Допустим, что отображение  $f$  аффинно в  $Q$ . Тогда оно непрерывно. Пусть  $p_0, \dots, p_k$  — максимальное множество независимых точек множества  $Q$ . Положим

$$(2) \quad F(p_i - p_0) = f(p_i) - f(p_0).$$

Это отображение можно продолжить, определив линейное отображение  $F$  векторного пространства  $V(Q)$ , порожденного всеми векторами  $q - p_0$  и, следовательно, всеми векторами  $q - p$  ( $p, q \in Q$ ), в пространство  $V(E')$ . Покажем, что

$$(3) \quad f(q) - f(p) = F(q - p), \quad p, q \in Q.$$

В самом деле, мы можем записать  $p = \sum a_i p_i$ ,  $q = \sum b_i p_i$ ; тогда <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) &= \sum (b_i - a_i) f(p_i) = \sum (b_i - a_i) [f(p_i) - f(p_0)] = \\ &= \sum (b_i - a_i) F(p_i - p_0) = F\left[\sum (b_i - a_i)(p_i - p_0)\right] = F(q - p). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$(4) \quad f(q) - f(p) = \nabla f(p^*, q - p), \quad p, q \in Q, \quad p^* \in \text{int}(Q),$$

и производная  $\nabla f(p, v)$  ( $v$  фиксировано) *постоянна* в  $\text{int}(Q)$ .

Обратно, допустим, что существует линейное отображение  $F$  пространства  $V(Q)$  в  $V(E')$ , для которого имеет место равенство (3). Тогда  $f$  аффинно в  $Q$ . В самом деле, если  $p_0, \dots, p_k$  и  $p = \sum a_i p_i$  принадлежат  $Q$ , то

$$\begin{aligned} \sum a_i f(p_i) - f(p) &= \sum a_i [f(p_i) - f(p)] = \sum a_i F(p_i - p) = \\ &= F\left[\sum a_i (p_i - p)\right] = F\left(\sum a_i p_i - p\right) = 0. \end{aligned}$$

*Аффинная система координат*  $\chi$  в аффинном пространстве  $E = E^n$  есть некоторое аффинное отображение пространства  $\mathbb{A}^n$  на  $E$ . В обозначениях § 1 положим

$$(5) \quad O = \chi(0), \quad e_i = \nabla \chi(0, \bar{e}_i).$$

<sup>1)</sup> Напомним, что  $\sum a_i = \sum b_i = 1$ , и потому  $\sum (a_i - b_i) = 0$ . — *Прим. ред.*

Тогда для любого  $x = (x^1, \dots, x^n)$  из  $\mathbb{A}^n$  по формуле (4) мы получаем

$$(6) \quad \chi(x)O + \nabla\chi(0, \sum x^i \bar{e}_i) = O + \sum x^i e_i;$$

числа  $x^i$  называются *координатами* точки  $\chi(x)$ .

**13. Евклидовы пространства.** Пусть  $E$  — такое аффинное пространство, что векторное пространство  $V = V(E)$  евклидово (§ 9). Тогда мы говорим, что  $E$  есть *евклидово пространство*. В этом случае для точек  $p, q \in E$  определена норма  $|q - p|$ , и она является *расстоянием* от  $p$  до  $q$ .

*Ортонормальная система координат*  $\chi$  в  $E = E^n$  есть такая аффинная система координат, что соответствующее отображение  $\nabla\chi(x)$  (которое не зависит от  $x$ ) пространства  $V(\mathbb{A}^n) = \mathbb{A}^n$  в  $V(E)$  сохраняет расстояния. Элементарное рассуждение показывает, что оно сохраняет и скалярное произведение; поэтому в обозначениях (12.5)

$$(1) \quad e_i \cdot e_j = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_i^j.$$

**14. Банаховы пространства.** *Банахово пространство* есть нормированное линейное пространство  $V$  (§ 8), являющееся полным. Иными словами, если  $v_1, v_2, \dots$  — такая последовательность в  $V$ , что  $|v_j - v_i| \rightarrow 0$  при  $i, j \rightarrow \infty$ , то существует такой элемент  $v$  пространства  $V$ , что  $v_i \rightarrow v$ .

Если  $V_0$  — нормированное линейное пространство, то мы можем следующим образом пополнить его, образовав некоторое банахово пространство  $V$ . Назовем две фундаментальные последовательности  $(v_1, v_2, \dots)$  и  $(v'_1, v'_2, \dots)$  эквивалентными, если  $\lim |v'_i - v_i| = 0$ ; элементами пространства  $V$  являются классы эквивалентности фундаментальных последовательностей в  $V_0$ . Нормой класса эквивалентности, содержащего последовательность  $(v_1, v_2, \dots)$ , будем считать  $\lim |v_i|$ . Вложение пространства  $V_0$  в  $V$  мы осуществляем, полагая  $\varphi(v) =$  классу эквивалентности, содержащему последовательность  $(v, v, \dots)$ . Тогда  $V$  — полное пространство и  $V_0$  — всюду плотное подмножество пространства  $V$ .

Пространство  $\bar{V}$ , сопряженное к произвольному нормированному линейному пространству  $V$  (§ 8), является полным и, следовательно, банаховым пространством. В самом деле, пусть  $f_1, f_2, \dots$  — фундаментальная последовательность в  $\bar{V}$ . Так как для любого элемента  $v \in V$  мы имеем  $|f_j(v) - f_i(v)| \leq |f_j - f_i| \|v\| \rightarrow 0$ , то  $f_1(v), f_2(v), \dots$  есть фундаментальная последовательность; она имеет предел, который мы обозначим через  $f(v)$ . Очевидно,  $f$  есть ограниченная линейная функция в  $V$  и  $\lim |f_i - f| = 0$ .

Лемма 14а. Пусть  $V_0$  — нормированное линейное пространство с пополнением  $V$ . Тогда любую действительную ограниченную линейную функцию  $f$  в  $V_0$  можно единственным образом продолжить до ограниченной линейной функции в  $V$ . Этим определяется взаимно однозначное изометрическое линейное отображение сопряженного пространства  $\bar{V}_0$  на  $\bar{V}$ . Норму в  $\bar{V}$  можно определить, пользуясь одним лишь пространством  $V_0$ :

$$(1) \quad |f| = \sup \{f(v) : v \in V_0, |v| = 1\}, \quad f \in \bar{V}.$$

Пусть функция  $f$  ограничена и линейна в  $V_0$ . Для каждого  $v = \lim v_i \in V$  ( $v_i$  принадлежит  $V_0$ ) положим  $f(v) = \lim f(v_i)$ ; эта функция однозначно определена и, очевидно, ограничена и линейна в  $V$ . Все остальные утверждения леммы доказать легко.

Метрическое пространство *сепарабельно*, если оно содержит последовательность точек  $p_1, p_2, \dots$ , плотную в этом пространстве. Любое векторное пространство сепарабельно<sup>1)</sup>. (В аффинной системе координат множество векторов, имеющих все рациональные компоненты, счетно.)

Банахово пространство  $V$  *рефлексивно*, если отображение  $\Phi$  пространства  $V$  в  $\bar{\bar{V}}$  (см. лемму 8d) является отображением на все пространство  $V$ . Сопряженное пространство несепарабельного пространства несепарабельно; поэтому если  $V$  сепарабельно, а  $\bar{V}$  несепарабельно, то пространство  $V$  не рефлексивно. С этим мы встречаемся в (V, 18).

**15. Полусопряженные пространства.** Пусть  $V$  — линейное пространство с некоторой полунормой  $|v|$  (§ 8). Обозначим через  $V^*$  подпространство пространства  $V$ , состоящее из тех элементов  $v$ , для которых  $|v| = 0$ , и положим  $V' = V \bmod V^*$  (§ 5). Если  $v_1 - v_2 \in V^*$ , то  $|v_1| = |v_2|$ ; поэтому в  $V'$  определена норма. Мы можем, как и раньше, определить ограниченные линейные функции  $f$  в  $V$  и, пользуясь (8.7), определить  $|f|$ . Пространство, которое образуют эти функции, можно назвать *пространством  $\bar{V}$ , полусопряженным к пространству  $V$* . Для любой функции  $f \in \bar{V}$  и для всех  $v \in V^*$  мы имеем  $|f(v)| \leq 0$ , и поэтому  $f(v) = 0$ . Следовательно,  $f$  определяет на  $V'$  функцию  $f'$ , которая, очевидно, является линейной и ограниченной. Равенство  $|f'| = |f|$  однозначно определяет число  $|f'|$ . Ясно, что это определение совпадает с определением нормы в пространстве  $\bar{V}'$ , сопряженном к  $V'$ . Таким образом, мы имеем естественное линейное отображение пространства  $\bar{V}$  в  $\bar{V}'$ .

<sup>1)</sup> Напомним, что векторными пространствами автор называет конечномерные линейные пространства. — Прим. ред.

Лемма 15а. Указанное выше отображение есть изоморфизм пространства  $\bar{V}$  на  $\bar{V}'$ . Если полунорма в  $V$  является нормой, то это отображение является тождественным отображением пространства  $\bar{V}$  на  $\bar{V}$ .

Доказательство несложно.

Следующая лемма используется в параграфе (V, 8).

Лемма 15b. Пусть для каждого элемента  $h$  некоторого множества  $H$  задана полунорма  $|v|_h$ . Тогда, если верхняя грань

$$(1) \quad |v| = \sup \{ |v|_h : h \in H \}$$

конечна для всех  $v \in V$ , то  $|v|$  также есть полунорма.

Так как  $|v+w|_h \leq |v|_h + |w|_h \leq |v| + |w|$  для всех  $h \in H$ , то условие (8.1) выполняется. Подобным же образом доказывается, что  $|av| \leq |a| |v|$ ; далее, если  $a \neq 0$  и  $b = 1/a$ , то также  $|b(av)| \leq |b| |av|$ , откуда  $|av| \geq |a| |v|$ , и (8.2) доказано.

## ПРИЛОЖЕНИЕ II

### Подготовительные сведения из геометрии и топологии

Значительная часть понятий и результатов, излагаемых в этом приложении, в частности в § 1—3, 5—7 и 10—13, широко используется в книге (начиная с гл. III). Параграф 4 используется в гл. VII, § 8 и 9 — в IVC и в конце гл. VII, а § 14—16 — в IVB. Доказательства некоторых элементарных фактов только намечены или опущены; другие доказательства даны в деталях. Хотя некоторые небольшие части книги существенно предполагают знание алгебраической топологии, нескольких параграфов этого приложения, посвященных этому предмету, достаточно для получения нужных сведений. В нескольких местах доказательства проводятся с помощью результатов, изложенных в первых главах.

Элементы теории точечных множеств предполагаются известными. Применяются следующие определения и обозначения. Множества будут лежать в некотором пространстве  $S$ , вообще говоря, аффинном или евклидовом или же линейном. Мы пишем  $Q_1 \subset Q_2$ , если  $Q_1$  является подмножеством множества  $Q_2$ ;  $p \in Q$ , если  $p$  — элемент множества  $Q$ . Символы  $Q_1 \cap Q_2$ ,  $Q_1 \cup Q_2$ ,  $Q_1 \setminus Q_2$  обозначают соответственно пересечение, объединение и разность (множество точек, принадлежащих первому, но не принадлежащих второму множеству) множеств  $Q_1$  и  $Q_2$ ; символы  $\bigcup_i Q_i$  и  $\bigcap_i Q_i$  соответ-

ственно обозначают объединение и пересечение множеств  $Q_i$ . Мы обозначаем через  $\bar{Q}$  замыкание множества  $Q$ , через  $\text{fro}(Q) = \bar{Q} \cap S \setminus Q$  его *границу* и через  $\text{int}(Q) = Q \setminus \text{fro}(Q)$  его *открытое ядро*. Для клетки  $\sigma$  множество  $\text{int}(\sigma)$  определяется относительно плоскости клетки  $\sigma$  см. § 1.

*Отображение*  $f$  множества  $Q$  в  $S'$  есть функция с областью определения  $Q$ , множество значений  $f(Q)$  которой содержится в  $S'$ . Множество  $f^{-1}(Q')$  есть совокупность всех таких точек  $p$ , что  $f(p) \in Q'$ . Мы предполагаем, что читатель знаком с основными свойствами непрерывных отображений и компактных множеств. Напомним, что подмножество евклидова пространства компактно в том и только в том случае, если оно ограничено и замкнуто.

В метрическом пространстве  $\rho(p, q)$  есть расстояние от  $p$  до  $q$ ; если пространство евклидово, то это расстояние равно  $|q - p|$ . Расстояние от множества  $P$  до множества  $Q$  есть  $\rho(P, Q) = \inf \{ \rho(p, q) \}$  (обозначения см. в П. III) для  $p \in P, q \in Q$ . *Диаметр*

$\text{diam}(Q)$  множества  $Q$  есть  $\sup \{\rho(p, q)\}$  для  $p, q \in Q$ . Далее,  $\zeta$ -окрестность  $U_\zeta(Q)$  множества  $Q$  есть множество всех точек  $p$ , для которых  $\rho(p, Q) < \zeta$ ; через  $\bar{U}_\zeta(Q)$  обозначается замыкание этой окрестности. Множество вида  $U_\zeta(p)$  или  $\bar{U}_\zeta(p)$  называется соответственно *открытым шаром* или *замкнутым шаром*. Символ  $\text{int}_\zeta(Q)$  обозначает множество всех таких точек  $p$ , что  $\bar{U}_\zeta(p) \subset \text{int}(Q)$ ; таким образом,  $\text{int}_\zeta(Q) = S \setminus \bar{U}_\zeta(S \setminus Q)$ .

*Непрерывная деформация*, или *гомотопия*, отображения  $f_0$  в отображение  $f_1$  есть множество таких отображений  $f_t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), что отображение  $F(t \times p) = f_t(p)$  непрерывно в  $I \times S$  ( $I$  — единичный отрезок);  $f_0$  и  $f_1$  *гомотопны*, если такая непрерывная деформация существует.

**1. Клетки, симплексы.** *Замкнутое полупространство* в аффинном пространстве  $E$  размерности  $n$  есть множество точек, лежащих по одну сторону от  $(n-1)$ -мерного аффинного подпространства  $P$  пространства  $E$  вместе с самим  $P$ . *Выпуклая полиэдральная клетка*  $\sigma$  в пространстве  $E$ , или, короче, *клетка*, есть непустое ограниченное (замкнутое) подмножество пространства  $E$ , которое можно представить в виде пересечения конечного множества замкнутых полупространств. *Плоскость*  $P(\sigma)$  клетки  $\sigma$  есть наименьшее аффинное подпространство, содержащее  $\sigma$ ; *размерность*  $\dim(\sigma)$  клетки  $\sigma$  есть размерность плоскости  $P(\sigma)$ . Если она равна  $r$ , то  $\sigma$  мы называем  *$r$ -мерной клеткой* и обозначаем ее через  $\sigma^r$ . Заметим, что, если  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — клетки, то и пересечение  $\sigma_1 \cap \sigma_2$ , если оно не пусто, является клеткой.

Граница  $\text{fro}(\sigma)$  клетки  $\sigma$ , рассматриваемой как подмножество плоскости  $P(\sigma)$ , есть *граница*  $\partial\sigma$  клетки  $\sigma$ ; если клетка  $\sigma$  ориентирована, то  $\partial\sigma$  есть множество точек, лежащих на цепи, которая ниже, в § 7, также обозначается через  $\partial\sigma$ . *Открытое ядро*  $\text{int}(\sigma)$  есть множество  $\sigma \setminus \partial\sigma$ . Если  $\dim(\sigma_1) = \dim(\sigma_2)$ , то мы говорим, что клетки  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  *не перекрываются*, если  $\text{int}(\sigma_1) \cap \text{int}(\sigma_2) = \emptyset$ .

Множество  $\partial\sigma$  мы можем представить в виде объединения конечного множества  $(n-1)$ -мерных <sup>1)</sup> клеток,  $(n-1)$ -мерных *граней* клетки  $\sigma$ . Каждая из этих граней имеет свои грани и т. д. Каждую из всех этих граней мы называем *собственной гранью* клетки  $\sigma$ . Клетку  $\sigma$  мы рассматриваем как *несобственную грань* самой себя.

*Вершинами* клетки  $\sigma$  называются ее грани размерности нуль; они являются точками клетки  $\sigma$ , не лежащими внутри ни одного отрезка, принадлежащего  $\sigma$ . Если  $p_0, \dots, p_r$  — вершины клетки  $\sigma$ ,

<sup>1)</sup> Попарно не перекрывающихся и лежащих в различных  $(n-1)$ -мерных плоскостях. — *Прим. ред.*

то  $\sigma$  есть наименьшее выпуклое множество, содержащее эти точки; любую точку клетки  $\sigma$  можно представить в виде

$$(1) \quad p = p_0 p_0 + \dots + p_r p_r, \text{ каждое } p_i \geq 0, \quad \sum p_i = 1;$$

см. (П. I, 11). Разрешая коэффициентам  $p_i$  принимать и отрицательные значения, получаем все точки плоскости  $P(\sigma)$ . Ребрами клетки  $\sigma$  называются ее одномерные грани.

Симплекс  $\sigma$  в пространстве  $E$  есть множество точек, представимых в виде (1), где точки  $p_i$  независимы (П. I, 11). В этом случае  $\dim(\sigma) = r$  и представление (1) единственно. Числа  $p_i$  являются *барицентрическими координатами* точки  $p$  относительно точек  $p_i$ . Мы пишем  $\sigma = p_0 \dots p_r$ . Тогда симплексы  $p_{\lambda_0} \dots p_{\lambda_k}$  являются гранями симплекса  $\sigma$ , а точки  $p_i$  — его вершинами.

Если  $\sigma$  — некоторая клетка, то ее *центр* есть центр тяжести ее вершин; если  $p_0, \dots, p_k$  — вершины, то центром является точка

$$(2) \quad p_\sigma = ap_0 + \dots + ap_k, \quad a = \frac{1}{k+1}.$$

Пусть  $f$  — аффинное отображение (П. I, 12)  $r$ -мерного симплекса  $\sigma = p_0 \dots p_r$  в некоторое аффинное пространство  $E'$ ; тогда, если точки  $q_i = f(p_i)$  независимы, то  $f(\sigma)$  есть  $r$ -мерный симплекс в  $E'$ ; это будет иметь место в том и только в том случае, если множество  $P(f(\sigma))$  имеет ту же размерность  $r$ , что и  $\sigma$ , или же в том и только в том случае, если якобиан  $J_f \neq 0$  в открытом ядре  $\text{int}(\sigma)$  симплекса  $\sigma$  (П. 6). Если точки  $q_i$  зависимы, то мы говорим, что отображение  $f$  *вырождается* в  $\sigma$ , или что образ  $f(\sigma)$  *вырождается*. Для клеток  $\sigma$  более общего вида мы говорим, что  $f(\sigma)$  *вырождается*, если  $J_f = 0$  в  $\text{int}(\sigma)$ .

Если  $\sigma$  — симплекс в евклидовом пространстве, то легко видеть, что  $\text{diam}(\sigma)$  равен длине наибольшего ребра симплекса  $\sigma$ .

**2. Полиэдры, комплексы.** Полиэдр  $Q$  в аффинном пространстве  $E$  есть (замкнутое) множество точек, которое можно представить в виде объединения конечного множества клеток; его *размерность*  $\dim(Q)$  есть наибольшая из размерностей этих клеток. Если существует представление, в котором все клетки имеют ту же размерность, что и  $E$ , то мы называем  $Q$  *полиэдральной областью* в  $E$ .

Можно рассматривать полиэдры абстрактно, без ссылки на объемлющее пространство; нам это не понадобится.

Клеточное разбиение (*комплекс*)  $K$  есть конечное множество  $S$  клеток, обладающее следующими свойствами. Если  $\sigma \in S$ , то каждая

грань клетки  $\sigma$  является объединением клеток из  $S$ . Никакое открытое ядро  $\text{int}(\sigma)$  не пересекает клеток низшей размерности, принадлежащих  $S$ . Каждое пересечение  $\sigma \cap \sigma'$  является объединением клеток из  $S$ .

Мы будем рассматривать только такие комплексы, у которых каждая грань клетки  $\sigma$  из  $S$  сама является клеткой из  $S$ ; таким образом, мы не подразделяем собственные грани клетки  $\sigma$  на меньшие клетки.

Объединение клеток комплекса  $K$  образует полиэдр, который мы также обозначаем буквой  $K$ . Заметим, что каждая точка полиэдра  $K$  находится в точности в одном множестве  $\text{int}(\sigma)$ ,  $\sigma \in S$ .

Симплициальное разбиение (*симплициальный комплекс*)  $K$  есть комплекс, все клетки которого являются симплексами, причем каждая грань симплекса из  $K$  сама является симплексом из  $K$ . Если  $p_1, p_2, \dots$  — вершины комплекса  $K$ , то каждый симплекс из  $K$  имеет вид  $p_{\lambda_0} \dots p_{\lambda_r}$ . Каждая точка из  $K$  может быть единственным образом записана в виде

$$(1) \quad p = \sum \mu_i(p) p_i, \quad \text{каждое } \mu_i(p) \geq 0, \quad \sum \mu_i(p) = 1,$$

с тем условием, что если  $p \in p_{\lambda_0} \dots p_{\lambda_r}$ , то  $\mu_j(p) = 0$  для  $j \neq \lambda_0, \dots, \lambda_r$ . Величины  $\mu_j(p)$  являются непрерывными функциями точки  $p \in K$ ; они называются *барицентрическими координатами* точки  $p$  в  $K$ .

*Звезда*  $\text{St}(\sigma)$  клетки  $\sigma$  в  $K$  есть точечное множество, состоящее из открытых ядер  $\text{int}(\sigma')$  всех симплексов  $\sigma'$ , гранью которых является  $\sigma$ ;  $\text{St}(\sigma)$  является открытым множеством в пространстве, состоящем из всех точек полиэдра  $K$ . *Замкнутая звезда*  $\bar{\text{St}}(\sigma)$  есть замыкание в  $K$  звезды  $\text{St}(\sigma)$ ; *граница звезды*  $\partial \text{St}(\sigma)$  есть  $\bar{\text{St}}(\sigma) \setminus \text{St}(\sigma)$ .

Заметим, что в симплициальном комплексе  $K$  точка  $p \in \text{St}(p_{\lambda_0} \dots p_{\lambda_r})$  в том и только в том случае, если  $\mu(p_{\lambda_i}) > 0$  при каждом  $i$ .

**3. Подразделения.** Если полиэдр  $Q$  является множеством точек комплекса  $K$ , то мы говорим, что  $K$  есть *разбиение* полиэдра  $Q$ . Если  $K$  — симплициальный комплекс, то мы говорим, что  $K$  есть *симплициальное разбиение*, или *триангуляция*, полиэдра  $Q$ . При случае мы разрешаем  $K$  быть бесконечным комплексом, например, если вместо  $Q$  мы рассматриваем  $E^n$  или открытое подмножество пространства  $E^n$ . Так как  $Q$  содержится в аффинном пространстве, то в каждой клетке  $\sigma$  определены барицентрические координаты (П. I, 11). Клетки  $\sigma$  могут при гладких отображениях

перейти в „клетки“  $\sigma' = f(\sigma)$  в аффинном пространстве  $E'$ , являющиеся „кривыми“ в  $E'$ ; таким образом, мы можем найти „криволинейное“ подразделение некоторого подмножества пространства  $E'$ ; см., например, (III, 7). В этом случае барицентрические координаты в  $\sigma$  не переходят в барицентрические координаты в  $E'$ .

**Лемма 3а.** *Любой полиэдр допускает разбиение.*

Это можно показать с помощью элементарных рассуждений.

Допустим, что комплексы  $K$  и  $K'$  являются подразделениями полиэдра  $P$ , причем каждая клетка из  $K'$  содержится в некоторой клетке из  $K$ . Тогда мы говорим, что комплекс  $K'$  является *подразделением* комплекса  $K$ . В этом случае каждая клетка комплекса  $K$  является объединением клеток из  $K'$ .

*Регулярное подразделение*  $K'$  комплекса  $K$  определяется следующим образом. Для каждой клетки  $\sigma$  комплекса  $K$  ее центр  $p_\sigma$  (см. § 1) является вершиной комплекса  $K'$ ; в частности, вершиной комплекса  $K'$  является каждая вершина комплекса  $K$ . Для каждой возрастающей последовательности  $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_r$  клеток из  $K$  существует соответствующий симплекс  $\tau = p_{\sigma_0} p_{\sigma_1} \dots p_{\sigma_r}$  комплекса  $K'$ . Таким образом,  $K'$  является симплицальным комплексом.

Ясно, что каждый такой симплекс  $\tau$  содержится в  $\sigma_r$ . Если мы покажем, что каждая точка  $p$  комплекса  $K$  содержится в  $\text{int}(\tau)$  для единственного симплекса  $\tau$  из  $K'$ , то тем самым будет доказано, что  $K'$  является подразделением комплекса  $K$ . Пусть, скажем,  $p \in \text{int}(\sigma)$ . Если  $p = p_\sigma$ , то  $p \in \text{int}(p_\sigma) = p_\sigma$ . Допустим, что  $p \neq p_\sigma$ . Тогда существует единственный такой отрезок  $p_\sigma p'$ , содержащий  $p$ , что  $p' \in \partial\sigma$ . Пользуясь индукцией, легко видим, что существует единственный симплекс  $\tau' \subset \partial\sigma$ , для которого  $p' \in \text{int}(\tau')$ , и что если  $\tau' = p_{\sigma_0} \dots p_{\sigma_k}$ , то  $p \in \text{int}(\tau)$ , где  $\tau = p_{\sigma_0} \dots p_{\sigma_k} p_\sigma$ , и симплекс  $\tau$  единственный.

**Лемма 3б.** *Любые два разбиения  $K_1, K_2$  полиэдра  $P$  имеют общее симплицальное подразделение.*

Пусть  $K$  — комплекс, клетками которого являются непустые пересечения  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  ( $\sigma_1$  в  $K_1$ ,  $\sigma_2$  в  $K_2$ ). Регулярное подразделение  $K'$  комплекса  $K$  обладает требуемыми свойствами.

Если комплекс  $K$  содержится в метрическом пространстве, то для клеток  $\sigma$  комплекса  $K$  определены числа  $\text{diam}(\sigma)$ ; наибольшее из этих чисел есть *степень мелкости* комплекса  $K$ .

**Лемма 3с.** *Для любого комплекса  $K_0$  существует такая последовательность комплексов  $K_1, K_2, \dots$ , что каждый ком-*

плекс  $K_i$  является симплициальным подразделением комплекса  $K_{i-1}$  ( $i=0, 1, \dots$ ) и степень мелкости этого подразделения  $\rightarrow 0$ .

В качестве  $K_i$  мы можем взять регулярное подразделение комплекса  $K_{i-1}$ . Последнее утверждение леммы станет очевидным, если вместо этого в качестве  $K_i$  взять стандартное подразделение комплекса  $K_{i-1}$  ( $i \geq 2$ ); см. следующий параграф.

Пусть  $C$  — некоторый  $n$ -мерный куб; вместе со своими гранями он составляет комплекс  $K$ . Пусть  $v_1, \dots, v_n$  — векторы-ребра куба  $C$ . Пусть  $K'$  — регулярное подразделение комплекса  $K$ . Тогда для каждого  $n$ -мерного симплекса  $\tau$  комплекса  $K'$  его последняя вершина является центром куба  $C$ , предпоследняя вершина является центром одной из  $2n$  ( $n-1$ )-мерных граней  $C'$  куба  $C$ , следующая вершина является центром одной из  $2(n-1)$  ( $n-2$ )-мерных граней  $C''$  грани  $C'$ , и т. д. Следовательно, в  $K'$  имеется  $2^n n!$   $n$ -мерных симплексов, и у каждого из них среди векторов-ребер содержатся векторы  $\pm v_1/2, \dots, \pm v_n/2$ .

**4. Стандартные подразделения.** Если  $K_i$  — регулярное подразделение комплекса  $K_{i-1}$  ( $i=1, 2, \dots$ ), то мы, как это сразу видно в случае, когда  $K_0$  — двумерный симплекс, получаем симплексы все более и более плохой формы; числа  $\Theta(\sigma)$  (IV.14) не имеют положительной нижней грани. Мы укажем способ подразделения, исправляющий это<sup>1)</sup>, мы им пользуемся в гл. IX.

Пусть  $\sigma = p_0 \dots p_r$  — симплекс, причем его вершины даны в указанном порядке. Его *стандартное подразделение*  $\mathcal{E}\sigma$  мы построим следующим образом. Положим

$$(1) \quad p_{ij} = \frac{1}{2} p_i + \frac{1}{2} p_j, \quad i \leq j;$$

в частности  $p_{ii} = p_i$ . Это — вершины комплекса  $\mathcal{E}\sigma$ . Введем частичное упорядочение среди этих вершин, положив

$$(2) \quad p_{ij} \leq p_{kl}, \text{ если } k \leq i \text{ и } j \leq l.$$

Например,  $p_{22} < p_{23} < p_{13}$ , в то время как  $p_{13}$  и  $p_{24}$  несравнимы. Симплексами комплекса  $\mathcal{E}\sigma$  являются все симплексы, образованные из вершин  $p_{ij}$ , расположенных в возрастающем порядке. Например, если  $r=2$ , то двумерными симплексами будут

$$p_0 p_{01} p_{02}, \quad p_1 p_{01} p_{02}, \quad p_1 p_{12} p_{02}, \quad p_2 p_{12} p_{02},$$

<sup>1)</sup> Подразделение подобного же типа было построено Фрейденталем [Freudenthal H., *Ann. Math.*, 43 (1942), 580—582].

а если  $r = 3$ , то трехмерными симплексами будут

$$\begin{aligned} p_0 p_{01} p_{02} p_{03}, \quad p_1 p_{01} p_{02} p_{03}, \quad p_1 p_{12} p_{02} p_{03}, \quad p_2 p_{12} p_{02} p_{03}, \\ p_1 p_{12} p_{13} p_{03}, \quad p_2 p_{12} p_{13} p_{03}, \quad p_2 p_{23} p_{13} p_{03}, \quad p_3 p_{23} p_{13} p_{03}. \end{aligned}$$

В  $\mathcal{E}\sigma$  имеется  $2^r$   $r$ -мерных симплексов, которые удобно перечислить следующим образом. Последней вершиной будет  $p_{0r}$ . Предпоследней вершиной будет или  $p_{0, r-1}$  или  $p_{1r}$ . Вообще если выбрана вершина  $p_{ij}$ , то предыдущей вершиной будет или  $p_{i+1, j}$ , или  $p_{i, j-1}$ . Очевидно, эти симплексы не имеют общих внутренних точек; нетрудно видеть, что они действительно образуют симплициальный комплекс, являющийся разбиением симплекса  $\sigma$ .

Положим

$$(3) \quad v_i = p_i - p_{i-1} \quad (i = 1, \dots, r);$$

пользуясь (1), показываем, что

$$(4) \quad p_{i, j+1} - p_{ij} = \frac{1}{2} v_{j+1}, \quad p_{i-1, j} - p_{ij} = -\frac{1}{2} v_i.$$

Если  $K$  — симплициальный комплекс и мы возьмем его вершины в каком-нибудь определенном порядке, то, подразделяя описанным выше способом каждый из его симплексов, мы построим комплекс  $\mathcal{E}_1 K$ . Тогда у каждого симплекса комплекса  $\mathcal{E}_1 K$  вершины будут упорядочены, и мы можем построить его подразделение, образовав  $\mathcal{E}_2 K$  и т. д. Таким образом, мы получаем последовательность стандартных подразделений комплекса  $K$  относительно данного порядка его вершин.

В следующих леммах мы пользуемся обозначениями, употребляемыми в (III, 1) и (IV, 14).

**Лемма 4а.** Если  $\sigma = p_0 \dots p_r$ ,  $v_i = p_i - p_{i-1}$ , то каждый  $r$ -мерный симплекс комплекса  $\mathcal{E}_k \sigma$  имеет в качестве векторов-ребер векторы  $\pm v_1/2^k, \dots, \pm v_r/2^k$  и объем его равен  $|\sigma|/2^{kr}$ .

Это следует из (4) и (III, 1.3).

**Лемма 4б.** Для данного симплициального комплекса  $K$  с выбранным порядком вершин среди симплексов всех комплексов  $\mathcal{E}_k K$  встречаются симплексы лишь конечного числа форм. Существует такое число  $\eta > 0$ , что для всех симплексов  $\tau$  всех комплексов  $\mathcal{E}_k K$  выполняется неравенство  $\Theta(\tau) \geq \eta$ .

Первое утверждение вытекает из предыдущей леммы, а второе — из первого.

Следующая лемма требуется в (IX, 8).

**Лемма 4с.** Пусть  $\tau$  — некоторый  $(r-1)$ -мерный симплекс подразделения  $\Sigma\sigma$ ,  $\sigma = p_0 \dots p_r$ , не лежащий в  $\partial\sigma$ . Тогда плоскость  $P$  симплекса  $\tau$  содержит  $p_{0r}$ , но не содержит никакой другой точки отрезка  $p_0 p_r$ .

При  $r=1$  утверждение тривиально. Воспользуемся индукцией. Прежде всего симплекс  $\tau$  содержит  $p_{0r}$ , потому что если бы это было не так, то все его вершины лежали бы либо в  $\sigma_0 = p_1 \dots p_r$ , либо же в  $\sigma_r = p_0 \dots p_{r-1}$ , откуда следовало бы, что  $\tau \subset \partial\sigma$ . Далее, вершины симплекса  $\tau$ , отличные от  $p_{0r}$ , образуют некоторый симплекс  $\tau'$ . Тогда имеет место одно из следующих двух включений:  $\tau' \subset \sigma_0$ ,  $\tau' \subset \sigma_r$ ; допустим, что имеет место первое. Предположим, что  $\tau' \subset \partial\sigma_0$ ; пусть, скажем,  $\tau' \subset p_1 \dots \hat{p}_j \dots p_r$ . Если  $j < r$ , то  $\tau \subset p_0 \dots \hat{p}_j \dots p_r \subset \partial\sigma$ , что противоречиво. Поэтому  $\tau' \subset p_1 \dots p_{r-1}$ , и плоскость  $P'$  симплекса  $\tau'$  не содержит точки  $p_r$ . Если  $\tau'$  не содержится в  $\partial\sigma_0$ , то  $P'$  по предположению индукции не содержит точки  $p_r$ . Так как плоскость  $P$  содержит  $P'$ , а также точку  $p_{0r}$ , не лежащую в плоскости симплекса  $\sigma_0$ , то  $P \cap \sigma_0 = P' \cap \sigma_0$ , и потому  $P$  не содержит точки  $p_r$ ; отсюда следует последнее утверждение леммы.

**5. Ориентация.** Как видно из (1, 8), аффинное пространство  $E$  размерности  $n$  ( $n \geq 1$ ) имеет две ориентации; ориентация задается выбором упорядоченного множества  $(v_1, \dots, v_n)$ , состоящего из  $n$  независимых векторов. При  $n=0$  пространство  $E$  есть одна точка; ориентации мы ей не приписываем.

Клетка  $\sigma$  *ориентируется* посредством ориентации ее плоскости  $P(\sigma)$ . Если плоскость  $P(\sigma)$  уже ориентирована, то мы говорим, что  $\sigma$  ориентирована *так же, как и*  $P(\sigma)$ , или же что  $\sigma$  *положительно* расположена в  $P(\sigma)$ , если эти две ориентации плоскости  $P(\sigma)$  совпадают. Все это относится и к произвольной полиэдральной области в ориентированном аффинном пространстве.

*Ориентированным симплексом*  $\sigma = p_0 \dots p_r$  называется симплекс  $\sigma$ , ориентированный множеством векторов  $(p_1 - p_0, \dots, p_r - p_0)$ , или, что то же самое,  $(p_1 - p_0, \dots, p_r - p_{r-1})$ .

**Лемма 5а.** Для любой перестановки  $(\lambda_0, \dots, \lambda_r)$  индексов  $(0, \dots, r)$  симплекс  $p_{\lambda_0} \dots p_{\lambda_r}$  имеет ту же ориентацию, что и симплекс  $p_0 \dots p_r$  или противоположную ориентацию в соответствии с тем, является эта перестановка четной или нечетной.

Доказательство элементарно.

Рассмотрим теперь ориентацию  $(n-1)$ -мерных граней  $n$ -мерной ориентированной клетки  $\sigma$ . Если  $n=1$ , то  $\sigma$  — одномерный

симплекс  $pq$ ; мы говорим, что вершина  $q$  расположена в *дс положительно*, а вершина  $p$  — *отрицательно*. Допустим теперь, что  $n \geq 2$  и что  $\sigma'$  есть  $(n-1)$ -мерная грань. Мы можем выбрать векторы  $(v_1, \dots, v_n)$ , ориентирующие  $\sigma^n$ , так, чтобы  $v_2, \dots, v_n$  лежали в  $\sigma'$ .

Выберем точку  $p \in \text{int}(\sigma')$ ; тогда либо ни одна точка  $p + tv_1$  при  $t > 0$  не лежит в  $\sigma$ , либо же при достаточно малом  $t > 0$  все такие точки лежат в  $\sigma$ . В этих двух случаях мы говорим соответственно, что вектор  $v_1$  на грани  $\sigma'$  направлен *из*  $\sigma$  или что он направлен *в*  $\sigma$ . В первом случае мы говорим, что ориентация грани  $\sigma'$ , определяемая векторами  $(v_2, \dots, v_n)$ , *согласуется* с ориентацией клетки  $\sigma$ , или что таким образом ориентированная грань  $\sigma'$  расположена в *дс положительно*; во втором случае верно обратное.

Допустим, в частности, что  $\sigma = p_0 p_1 \dots p_r$  и  $\sigma' = p_1 \dots p_r$  — симплексы, ориентированные, как указано. Положим  $v_i = p_i - p_{i-1}$ . Тогда векторы  $(v_1, \dots, v_r)$  ориентируют симплекс  $\sigma$ , векторы  $(v_2, \dots, v_r)$  ориентируют симплекс  $\sigma'$  и  $v_1$  на  $\sigma'$  направлен из  $\sigma$ ; поэтому симплекс  $\sigma'$  расположен в *дс положительно*. Пользуясь леммой 5а, легко находим, что симплекс  $p_0 \dots p_i \dots p_r$  расположен в *дс положительно* или *отрицательно* в соответствии с тем, четно или нечетно  $i$ .

Пусть  $R$  — ориентированное открытое множество в  $E^n$  с границей  $\text{fro}(R)$ , включающей в себя часть гладкого  $(n-1)$ -мерного многообразия  $\sigma$ ; допустим, что вблизи данной точки  $p$  многообразие  $\sigma$  задается в прямоугольных координатах уравнением  $x_1 = f(x_2, \dots, x_n)$ , причем функция  $f$  непрерывно дифференцируема. Мы можем „ориентировать“ многообразие  $\sigma$  вблизи  $p$ , ориентируя касательную плоскость в этой точке; определение, в каком случае  $\sigma$  „положительно“ расположено в  $\partial R$ , ясно.

**6. Цепи и коцепи.** Пусть  $K$  — некоторый комплекс, и пусть его клетки ориентированы. (Алгебраическая)  $r$ -мерная цепь комплекса  $K$  есть выражение вида  $A = \sum a_i \sigma_i^r$ , где  $a_i$  — действительные числа. (Мы могли бы считать, что  $a_i$  — элементы некоторой абелевой группы.) Мы пишем  $\dim(A) = r$ . Можно складывать две цепи, складывая соответствующие коэффициенты, и умножать цепь на действительное число, умножая на это число каждый коэффициент. Таким образом, множество  $r$ -мерных цепей становится линейным пространством  $C_r = C_r(K)$ . Размерность этого пространства, очевидно, равна числу  $r$ -мерных клеток комплекса  $K$ .

Мы разрешаем приписывать или же отбрасывать член  $0\sigma$  с нулевым коэффициентом; мы можем также писать  $\sigma$  вместо  $1\sigma$ . Теперь  $r$ -мерные ориентированные клетки сами становятся цепями; они образуют в  $C_r$  базис.

Если через  $-\sigma$  мы будем обозначать клетку  $\sigma$  с противоположной ориентацией, то мы сможем отождествить цепь  $(-a)$   $(-\sigma)$  с  $a\sigma$ .

В случае  $r=0$ , если  $p_1, p_2, \dots$  — вершины комплекса  $K$ , то любая нульмерная цепь имеет вид  $\sum a_i p_i$ ; вопросы ориентации не возникают.

(Алгебраическая)  $r$ -мерная коцепь  $X$  комплекса  $K$  есть элемент пространства  $C^r = \bar{C}_r$ , сопряженного к  $C_r$ . Мы пишем  $X \cdot A$  вместо  $X(A)$ . Положим  $X_i = X \cdot \sigma_i^r$ . Если через  $\sigma_i^r$  мы будем обозначать не только ориентированный симплекс или цепь, но и коцепь, определяемую условием <sup>1)</sup>  $\sigma_i^r \cdot \sigma_j^r = \delta_{ij}^r$ , то коцепи  $\sigma_i^r$  будут образовывать базис также для  $r$ -мерных коцепей; очевидно, что для любой коцепи  $X$ , определенной, как выше,  $X = \sum X_i \sigma_i^r$ . Даже если мы при случае будем пользоваться этими обозначениями, мы будем помнить о различии между цепями и коцепями. Заметим, что

$$(1) \quad X \cdot A = \sum_i X_i \sigma_i^r \cdot \sum_j a_j \sigma_j^r = \sum_i X_i a_i.$$

Единичная нульмерная коцепь  $I^0$  есть  $\sum p_i$ , где суммирование производится по всем вершинам; таким образом, для любой вершины  $p_i$  имеем  $I^0 \cdot p_i = 1$ . Число

$$(2) \quad I^0 \cdot \sum a_i p_i = \sum a_i$$

часто называют „индексом Кронекера“ нульмерной цепи  $\sum a_i p_i$ .

Определение  $r$ -мерных полиэдральных цепей в аффинном пространстве  $E$  дано в (V, 1); см. также (III, 2). Ясно, что мы можем рассматривать полиэдральные цепи в полиэдре. Каждой  $r$ -мерной цепи комплекса  $K$ , очевидно, соответствует некоторая корректно определенная  $r$ -мерная полиэдральная цепь в  $K$ .

**7. Граница и кограница.** Граница  $\partial A$  некоторой  $r$ -мерной цепи  $A$  есть  $(r-1)$ -мерная цепь, определяемая следующим образом. При  $r=0$  мы полагаем  $\partial A = 0$ . Возьмем теперь любую  $r$ -мерную клетку  $\sigma$ . Если  $r=1$ , то  $\sigma = pq$ ; мы полагаем  $\partial \sigma = q - p$ . Если  $r \geq 2$ , то  $\partial \sigma$  есть сумма  $(r-1)$ -мерных граней клетки  $\sigma$ , взятых в такой ориентации, которая согласуется с ориентацией клетки  $\sigma$  (§ 5). Положим  $\partial \sum a_i \sigma_i^r = \sum a_i \partial \sigma_i^r$ . Для симплекса мы имеем (см. § 5)

$$(1) \quad \partial(p_0 \dots p_r) = \sum_{i=0}^r (-1)^i p_0 \dots \hat{p}_i \dots p_r.$$

<sup>1)</sup> Здесь  $\sigma_j^r$  — соответствующая цепь. — Прим. ред.

Операция  $\partial$  при каждом  $r \geq 1$  является линейным отображением пространства  $C_r$  в  $C_{r-1}$ .

Каждая  $(r-2)$ -мерная ориентированная грань  $\sigma'$  произвольной  $r$ -мерной клетки  $\sigma$  является гранью двух  $(r-1)$ -мерных граней  $\sigma_1, \sigma_2$  клетки  $\sigma$  (при  $r \geq 2$ ); если  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  ориентированы в согласии с ориентацией клетки  $\sigma$ , то легко видеть, что ориентация клетки  $\sigma'$  согласуется с ориентацией одной из клеток  $\sigma_1, \sigma_2$  и не согласуется с ориентацией другой. Отсюда следует, что  $\partial\partial\sigma = 0$ , и поэтому

$$(2) \quad \partial\partial A = 0 \text{ для всех цепей } A.$$

Это рассуждение сохраняет силу и в случае полиэдральных цепей.

*Кограница*  $dX$  произвольной  $r$ -мерной коцепи  $X$  в  $K$  определяется условием

$$(3) \quad dX \cdot A = X \cdot \partial A;$$

это — некоторая  $(r+1)$ -мерная коцепь комплекса  $K$ . В силу (2) мы имеем

$$(4) \quad ddX = 0 \text{ для всех коцепей } X.$$

Заметим, что в симплициальном комплексе в силу (1) и (3)

$$(5) \quad d(p_0 \dots p_r) = \sum_k^* p_k p_0 \dots p_r,$$

где суммирование производится по всем индексам  $k$ , для которых  $p_k p_0 \dots p_r$  является симплексом комплекса  $K$ .

Пусть  $Q$  — ориентированный параллелепипед, рассматриваемый в (III, 11); докажем равенство (III, 11.2). Так как ориентация параллелепипеда  $Q$  задается упорядоченным множеством  $(v_1, \dots, v_n)$ , то ориентация  $(-1)^{i-1} Q$  задается множеством  $(v_i, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$ . Поскольку множество  $(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$  ориентирует грань  $A_i^+$  и вектор  $v_i$  на  $A_i^+$  направлен из  $Q$ , грань  $A_i^+$  положительно расположена в  $\partial[(-1)^{i-1} Q]$  и клетка  $(-1)^{i-1} A_i^+$  положительно расположена в  $\partial Q$ . Очевидно, клетка  $(-1)^{i-1} A_i^-$  положительно расположена в  $\partial Q$ , и тем самым равенство (III, 11.2) доказано. [Мы могли бы также доказать это равенство с помощью индукции, воспользовавшись формулой (12.2).]

**8. Гомологии и когомологии.** Цепь  $A$  комплекса  $K$  называется *циклом*, если  $\partial A = 0$ , и *границей*, если  $A = \partial B$  для некоторой цепи  $B$ . Подобным же образом определяются коциклы и кограницы. Пусть  $Z_r, B_r, Z', B'$  — соответственно линейные пространства циклов, границ, коциклов и кограниц размерности  $r$ . Согласно (7.2)

и (7.4),  $B_r \subset Z_r$  и  $B^r \subset Z^r$ ; поэтому мы можем определить факторпространства

$$(1) \quad H_r = Z_r \bmod B_r, \quad H^r = Z^r \bmod B^r.$$

Это — соответственно пространства  $r$ -мерных гомологий и  $r$ -мерных когомологий (с действительными коэффициентами) комплекса  $K$ .

Циклы  $A$  и  $B$  комплекса  $K$  гомологичны, если  $A - B$  есть граница; мы записываем это так:  $A \sim B$ . В этом случае  $A$  и  $B$  определяют один и тот же элемент пространства  $H_r$ . Аналогично определяются когомологичные коциклы  $X \sim Y$ .

Пусть  $C$  — прямая сумма пространств  $C_0, C_1, \dots$  (П. I, 4); это — линейное пространство, образованное всеми цепями всех размерностей комплекса  $K$ . Пусть  $C^*$  — прямая сумма пространств  $C^i$ , т. е. линейное пространство, образованное всеми коцепями; очевидно, оно может рассматриваться как пространство, сопряженное к  $C$ . Мы имеем подпространства  $Z$  и  $B$  пространства  $C$  и подпространства  $Z^*$  и  $B^*$  пространства  $C^*$ ; если определить факторпространства  $H$  и  $H^*$ , как в (П. I, 7.5), то ясно, что они будут прямыми суммами:

$$(2) \quad H = H_0 \oplus H_1 \oplus \dots, \quad H^* = H^0 \oplus H^1 \oplus \dots$$

Билинейное умножение (спаривание) между  $H$  и  $H^*$ , определяемое формулой (П. I, 7.6), определяет спаривание пространств  $H_r$  и  $H^r$  при каждом  $r$ , и в силу (П. I, 7.7) мы имеем

$$(3) \quad H^r \approx \bar{H}_r, \quad H_r \approx \bar{H}^r.$$

Поэтому также пространства  $H_r$  и  $H^r$  имеют одну и ту же размерность и, следовательно, изоморфны; но, вообще говоря, не существует естественного способа установления этого изоморфизма.

В курсах алгебраической топологии доказывается, что пространства  $H_r$  и  $H^r$  зависят только от самого полиэдра  $K$ , а не от выбранного его разбиения. [Одно из доказательств приведено в (VII, 12).] Размерность пространства  $H_r$  есть  $r$ -е „число Бетти“ полиэдра  $K$ .

**9. Произведения в комплексе.** Мы кратко рассмотрим спаривания пространств когомологий и гомологий комплекса  $K$ .

Существует билинейная операция  $X^r \cup Y^s = Z^{r+s}$ , называемая  $\cup$ -произведением коцепей  $X^r$  и  $Y^s$ , которая обладает следующими свойствами:

(а) Если  $\sigma^{r+s}$  входит в  $\sigma^r \cup \sigma^s$  с отличным от нуля коэффициентом, то  $\sigma^r$  и  $\sigma^s$  являются гранями симплекса  $\sigma^{r+s}$ .

$$(b) \quad d(X^r \cup Y^s) = dX^r \cup Y^s + (-1)^r X^r \cup dY^s.$$

$$(c) \quad I^0 \cup X^r = X^r \cup I^0 = X^r.$$

В силу (b) этим определяется билинейная операция между  $H^r$  и  $H^s$  со значениями в  $H^{r+s}$ ; она также называется  $\cup$ -произведением. Можно показать <sup>1)</sup>, что эта операция определена однозначно, независимо от выбора произведения в пространствах  $C^k$ . Таким образом,  $H^*$  становится кольцом с классом когомологий, содержащим  $I^0$  в качестве единичного элемента.

Если дано  $\cup$ -произведение, то мы определим  $\cap$ -произведение  $X^r \cap A^{r+s} = B^s$  коцепи и цепи, результатом которого будет цепь, полагая

$$(1) \quad Y^s \cdot (X^r \cap A^{r+s}) = (Y^s \cup X^r) \cdot A^{r+s}$$

для всех  $s$ -мерных коцепей  $Y^s$ . Этим определяется билинейная операция между  $H^r$  и  $H_{r+s}$  со значениями в  $H_s$ , также однозначно определенная. Теперь  $H^*$  является кольцом операторов на  $H$ .

**10. Соединения.** Соединение  $J(P, Q)$  двух точечных множеств  $P, Q$  в аффинном пространстве  $E$  есть множество всех точек всех отрезков  $pq$ ,  $p \in P, q \in Q$ . Особо мы будем пользоваться соответствующей алгебраической операцией.

Пусть  $\sigma = p_0 \dots p_r$  — ориентированный  $r$ -мерный симплекс в  $E$ , и  $p$  — точка, не лежащая в плоскости  $P(\sigma)$ . Соединением точки  $p$  с симплексом  $\sigma$  будет

$$(1) \quad J(p, \sigma) = p\sigma = pp_0 \dots p_r;$$

это — ориентированный  $(r+1)$ -мерный симплекс в  $E$ . Подобным же образом мы могли бы определить  $J(\sigma^r, \sigma^s) = \sigma^{r+s+1}$  в случае, когда соответствующее множество является симплексом. Если  $p \in P(\sigma)$ , то мы полагаем  $J(p, \sigma) = 0$ . По определению

$$(2) \quad J(p, \sum a_i \sigma_i) = \sum a_i J(p, \sigma_i);$$

это — полиэдральная цепь в  $E$ . Докажем соотношения

$$(3) \quad \partial J(p, A) = A - J(p, \partial A), \quad \text{если } \dim(A) \geq 1,$$

$$(4) \quad \partial J(p, A) = A - (I^0 \cdot A)p, \quad \text{если } \dim(A) = 0.$$

<sup>1)</sup> См., например, Whitney H., On products in a complex, *Ann. Math.*, 39 (1938), 397—432; Лефшец С., Алгебраическая топология, М., 1949, гл. V.

Мы можем считать, что  $A$  есть симплекс  $\sigma = p_0 \dots p_r$ . Допустим сначала, что клетка  $p\sigma$  не вырождается. Тогда при  $r \geq 1$  равенство (3) сразу следует из (1) и (7.1), в то время как при  $r = 0$

$$\partial J(p, p_0) = \partial(pp_0) = p_0 - p = p_0 - (I^0 \cdot p_0)p.$$

Если  $p \in P(\sigma)$ , то мы должны доказать, что правая часть равенства (3), которую мы обозначим через  $B$ , равна нулю. [Для (4) это ясно.] Так как  $B$  есть  $r$ -мерная полиэдральная цепь в  $r$ -мерном пространстве  $P(\sigma)$ , то, пользуясь индукцией, мы видим, что  $\partial B = 0$ . Из определения границы  $\partial B$  (V, 1) ясно, что  $B = 0$ .

**Лемма 10а.** Пусть  $A$  — некоторый полиэдральный цикл в выпуклом множестве  $Q$  аффинного пространства  $E$ ; если  $\dim(A) = 0$ , то мы предполагаем дополнительно, что  $I^0 \cdot A = 0$ . Тогда  $A = \partial B$ , где  $B$  — полиэдральная цепь в  $Q$ .

Выберем точку  $p \in Q$  и положим  $B = J(p, A)$ . Тогда из (3) или (4) сразу следует, что  $\partial B = A$ .

**11. Подразделения цепей.** Пусть  $K$  — некоторый комплекс и  $K'$  — его подразделение. Для каждой  $r$ -мерной ориентированной клетки  $\sigma$  комплекса  $K$  пусть  $\mathfrak{E}\sigma$  есть цепь в  $K'$ , состоящая из всех  $r$ -мерных клеток комплекса  $K'$ , лежащих в  $\sigma$  и ориентированных так же, как  $\sigma$ . Положим  $\mathfrak{E} \sum a_i \sigma_i = \sum a_i \mathfrak{E}\sigma_i$ . Докажем, что

$$(1) \quad \partial \mathfrak{E}A = \mathfrak{E}\partial A.$$

Достаточно доказать это в случае  $A = \sigma$ . Пусть, скажем,  $\partial\sigma = \sum \sigma_i$ ,  $\mathfrak{E}\sigma = \sum \sigma'_j$ ,  $\mathfrak{E}\sigma_i = \sum \sigma'_{ij}$ . Нужно доказать, что  $\sum_i \partial\sigma'_i = \sum_{i,j} \sigma'_{ij}$ . Каждая  $(r-1)$ -мерная клетка, внутренняя для  $\sigma$ , входит в некоторую цепь  $\partial\sigma'_k$  и в некоторую цепь  $\partial\sigma'_l$  с противоположными знаками; следовательно, она выпадает из  $\sum_i \partial\sigma'_i$ . Остающиеся клетки в точности составляют  $\sum_{i,j} \sigma'_{ij}$ .

Пусть  $K'$  — регулярное подразделение комплекса  $K$ . Если  $p$  и  $\tau$  находятся в одной и той же клетке  $\sigma$  комплекса  $K$ , то мы можем определить клетку  $J(p, \tau)$ . Легко видеть, что

$$(2) \quad \mathfrak{E}\sigma = J(p_\sigma, \mathfrak{E}\partial\sigma),$$

где  $p_\sigma$  — центр клетки  $\sigma$ ; этим можно воспользоваться для доказательства равенства (1) в этом случае.

**Замечание.** Если мы рассмотрим цепь  $A$  комплекса  $K$  как полиэдральную цепь в  $K$ , то  $\mathfrak{E}A$  будет той же самой полиэдральной цепью в  $K$ ; см. (V, 1).

**12. Декартово произведение клеток.** Пусть  $\sigma^r$  и  $\sigma^s$  — некоторые клетки в аффинных пространствах  $P_1, P_2$ . Декартово произведение  $P = P_1 \times P_2$  (П. I, 4), очевидно, является аффинным пространством, и его подмножество  $\sigma^r \times \sigma^s$  является клеткой в  $P$ .

Допустим, что клетки  $\sigma^r$  и  $\sigma^s$  ориентированы последовательностями векторов  $(v_1, \dots, v_r)$  и  $(w_1, \dots, w_s)$  соответственно. Тогда мы ориентируем клетку  $\sigma^r \times \sigma^s$  системой векторов  $(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s)$ . Если  $\sum a_i \sigma_i^r$  и  $\sum b_j \sigma_j^s$  — полиэдральные цепи в  $P_1$  и в  $P_2$  соответственно, то их *декартово произведение* есть полиэдральная цепь  $\sum a_i b_j (\sigma_i^r \times \sigma_j^s)$  в  $P$ .

Ниже мы докажем формулу (1) для границы; случай  $r = 2$  используется в (V, 9), во всех же остальных местах мы пользуемся только случаем  $r = 1$ .

Пусть  $\partial \sigma^r = \sum \sigma_i^{r-1}$ ,  $\partial \sigma^s = \sum \sigma_j^{s-1}$  рассматриваются как полиэдральные цепи. Легко видеть, что  $(r + s - 1)$ -мерными гранями клетки  $\sigma^r \times \sigma^s$  являются клетки  $\sigma_i^{r-1} \times \sigma^s$  и  $\sigma^r \times \sigma_j^{s-1}$ . Поэтому, чтобы доказать формулу

$$(1) \quad \partial(\sigma^r \times \sigma^s) = \partial \sigma^r \times \sigma^s + (-1)^r \sigma^r \times \partial \sigma^s,$$

нам нужно только показать, что каждая  $(r + s - 1)$ -мерная грань имеет правильный коэффициент. Рассмотрим, например, грань  $\sigma^r \times \sigma_j^{s-1}$ . Мы можем считать, что система векторов  $(w_2, \dots, w_s)$  ориентирует клетку  $\sigma_j^{s-1}$ , а вектор  $w_1$  на  $\sigma_j^{s-1}$  направлен из клетки  $\sigma^s$ . Тогда последовательность векторов  $(v_1, \dots, v_r, w_2, \dots, w_s)$  ориентирует клетку  $\sigma^r \times \sigma_j^{s-1}$  и вектор  $w_1$  на  $\sigma^r \times \sigma_j^{s-1}$  направлен из клетки  $\sigma^r \times \sigma^s$ ; так как система векторов  $(w_1, v_1, \dots, v_r, w_2, \dots, w_s)$  ориентирует клетку  $(-1)^r \sigma^r \times \sigma^s$ , то клетка  $\sigma^r \times \sigma_j^{s-1}$ , как и требуется, положительно расположена в границе клетки  $(-1)^r \sigma^r \times \sigma^s$ .

Пусть  $I$  — единичный отрезок  $0 \leq t \leq 1$  в  $\mathfrak{A}$ ; он является ориентированной одномерной клеткой. По формуле (1) находим

$$(2) \quad \partial(I \times A) = 1 \times A - 0 \times A - I \times \partial A.$$

Пусть  $\sigma = p_0 \dots p_r$ ; вершины взяты в указанном порядке. Построим соответствующее симплициальное разбиение клетки  $I \times \sigma$ . Положим  $q_i = 0 \times p_i$ ,  $q'_i = 1 \times p_i$  и

$$(3) \quad \mathfrak{S}_0(I \times \sigma) = \sum_{i=0}^r (-1)^i \tau_i; \quad \tau_i = q_0 \dots q_i q'_i \dots q'_r.$$

Очень просто показать, что клетки  $\tau_i$  не перекрываются и заполняют произведение  $I \times \sigma$ . Покажем, что их ориентации выбраны правильно. Положим

$$v_i = p_i - p_{i-1} = q_i - q_{i-1} = q'_i - q'_{i-1}.$$

Пусть  $e$  — единичный вектор в  $\mathfrak{M}$ . Тогда клетка  $\tau_i$  ориентирована последовательностью векторов  $(v_1, \dots, v_i, e, v_{i+1}, \dots, v_r)$ , и поэтому клетка  $(-1)^i \tau_i$  ориентирована последовательностью векторов  $(e, v_1, \dots, v_r)$ , которая ориентирует также и клетку  $I \times \sigma$ .

Если пользоваться тем же определением подразделения клеток произведения  $I \times \partial\sigma$ , то, как показывают простые вычисления,

$$(4) \quad \partial \mathfrak{E}_0(I \times \sigma) = 1 \times \sigma - 0 \times \sigma - \mathfrak{E}_0(I \times \partial\sigma).$$

**13. Отображения комплексов.** Пусть  $f$  — отображение комплекса  $K$  (т. е. соответствующего полиэдра) в аффинное пространство  $E$ . Мы говорим, что  $f$  *клеточно-аффинно*, если  $f$ , рассматриваемое отдельно на каждой клетке, аффинно. Если  $f$  отображает  $K$  в другой комплекс  $K'$ , то при условии, что каждая клетка комплекса  $K$  отображается в некоторую клетку комплекса  $K'$ , мы можем пользоваться этим же определением. Если  $K$  — симплициальный комплекс, то мы говорим о *симплексно-аффинном* отображении. Если и  $K$  и  $K'$  симплициальны, а  $f$  симплексно-аффинно и отображает каждую вершину комплекса  $K$  в некоторую вершину комплекса  $K'$ , то  $f$  есть *симплициальное* отображение. В этом случае  $f$  определяется своими значениями в вершинах  $p_i$  комплекса  $K$ , и в силу (2.1)

$$(1) \quad f\left(\sum \mu_i(p) p_i\right) = \sum \mu_i(p) f(p_i) \quad (\mu_i(p) \geq 0, \quad \sum \mu_i(p) = 1).$$

Если при этом отображение  $f$  переводит вершины некоторого симплекса  $\sigma$  комплекса  $K$  в различные вершины комплекса  $K'$ , то  $f(\sigma)$  есть симплекс из  $K'$ ; в противном же случае отображение  $f$  на  $\sigma$  вырождается.

Пусть  $f$  — клеточно-аффинное отображение комплекса  $K$  в  $E$  (или в некоторый полиэдр  $P$ ). Для каждой клетки  $\sigma$  комплекса  $K$ , ориентированной последовательностью векторов  $(v_1, \dots, v_r)$ ,  $f(\sigma)$  есть клетка, которую мы ориентируем последовательностью векторов

$$(2) \quad (\nabla f(p, v_1), \dots, \nabla f(p, v_r)),$$

где  $p$  — произвольная точка из  $\sigma$ ; если  $J_f \neq 0$  в  $\sigma$ , то эти векторы независимы. В этом случае через  $f\sigma$  мы обозначим указанным образом ориентированную клетку; в противном случае мы

полагаем  $f\sigma = 0$ . В частности, если  $\sigma = p_0 \dots p_r$  и  $f(p_i) = q_i$ , то  $f(\sigma) = q_0 \dots q_r$ . Если положить  $f \sum a_i \sigma_i = \sum a_i f \sigma_i$ , то  $f$  становится отображением <sup>1)</sup> пространства полиэдральных цепей полиэдра  $K$  в пространство полиэдральных цепей в  $E$  (или в  $P$ ). В частности, если  $f$  — симплициальное отображение комплекса  $K$  в  $K'$  и  $A$  — цепь комплекса  $K$ , то  $fA$  можно рассматривать как цепь комплекса  $K'$ .

Для любого клеточно-аффинного отображения  $f$  и цепи  $A$  мы имеем

$$(3) \quad \partial fA = f\partial A.$$

Достаточно доказать это равенство в случае, когда  $A$  есть ориентированная клетка  $\sigma$ . Если  $J_f \neq 0$  в  $\text{int}(\sigma)$ , то оно очевидно; в противном же случае  $f\sigma = 0$ , а доказательство того, что  $f\partial\sigma = 0$ , проводится так же, как соответствующее доказательство для формулы (10.3).

Пусть  $f$  — клеточно-аффинное отображение комплекса  $K$  в аффинное пространство  $E$ , и пусть  $v$  — вектор пространства  $E$ . Полагая

$$(4) \quad f_v(p) = f(p) + v, \quad \mathcal{D}_v(t + v) = f(p) + tv,$$

мы определяем отображение  $f_v$  комплекса  $K$  в  $E$  и отображение  $\mathcal{D}_v$  произведения  $I \times K$  в  $E$ . Последнее, когда  $t$  пробегает значения от 0 до 1, определяет деформацию, или гомотопию, отображения  $f$  в  $f_v$ . Тем самым определяются отображения  $f_v$  и  $\mathcal{D}_v$  цепей  $A$  и  $I \times A$  соответственно в пространство полиэдральных цепей в  $E$ . Так как  $\mathcal{D}_v(0 \times A) = fA$  и  $\mathcal{D}_v(1 \times A) = f_vA$ , то по формулам (3) и (12.2) мы получаем

$$(5) \quad \partial \mathcal{D}_v(I \times A) = f_vA - fA - \mathcal{D}_v(I \times \partial A).$$

Пусть вообще  $\mathfrak{S}(I \times K)$  — некоторое подразделение произведения  $I \times K$ , и пусть  $F$  — клеточно-аффинное отображение полученного комплекса в  $E$  (или некоторый полиэдр  $P$ ). Если  $f_i(p) = F(i \times p)$  ( $i = 0, 1$ ), то

$$(6) \quad \partial F(I \times A) = f_1A - f_0A - F(I \times \partial A),$$

где цепи снова полиэдральные.

<sup>1)</sup> Это утверждение верно, но следует рассматривать всевозможные клетки  $\sigma$ , лежащие целиком в одной клетке комплекса  $K$ , а не только клетки самого комплекса  $K$ . — *Прим. ред.*

**14. Некоторые свойства плоскостей.** Докажем две леммы, которыми мы пользуемся в (IV, В); здесь  $E^m$  обозначает  $m$ -мерное евклидово пространство.

Пусть  $P$  и  $P'$  — плоскости произвольных размерностей в  $E^m$  и  $\pi_P v$  — ортогональная проекция вектора  $v$  в плоскость  $P$ . Показатель независимости плоскостей  $P$  и  $P'$  по определению есть

$$(1) \quad \text{ind}(P, P') = \inf \{ |v - \pi_{P'} v| : v \in P', |v| = 1 \}.$$

Он зависит только от направлений плоскостей (I, 12), а не от их положения. Очевидно, показатель независимости равен нулю в том и только в том случае, если плоскости имеют общий ненулевой вектор, и равен единице в том и только в том случае, если плоскости ортогональны.

Так как множество единичных векторов компактно, то мы можем в  $P'$  выбрать такой единичный вектор  $v$ , что  $|\pi_P v - v| = \text{ind}(P, P')$ . Предполагая, что  $\pi_P v \neq 0$ , положим  $u = \pi_P v / |\pi_P v|$ . Пусть  $L$  — прямая, содержащая вектор  $v$ ; тогда  $|\pi_L u - u| = |\pi_P v - v|$ , и поэтому

$$|\pi_{P'} u - u| \leq |\pi_L u - u| = \text{ind}(P, P'),$$

чем доказано, что  $\text{ind}(P', P) \leq \text{ind}(P, P')$ , если  $P$  и  $P'$  не ортогональны. Верно и обратное утверждение; поэтому

$$(2) \quad \text{ind}(P', P) = \text{ind}(P, P').$$

Напомним, что  $P(\sigma)$  есть плоскость клетки  $\sigma$ .

**Лемма 14а.** Пусть  $\sigma$  — некоторая  $s$ -мерная клетка и  $P$  — такая  $n$ -мерная плоскость в  $E^m$ , что

$$(3) \quad s + n \geq m, \quad \rho(P, \sigma) < \rho(P, \partial\sigma).$$

Тогда  $s + n = m$ , плоскость  $P$  пересекает  $\sigma$  в одной точке и

$$(4) \quad \text{ind}(P, P(\sigma)) > \frac{\rho(P, \partial\sigma)}{\text{diam}(\sigma)}.$$

Пусть  $d, d'$  — расстояния, указанные в (3). Выберем точки  $p$  и  $q$  так, чтобы было

$$p \in \sigma, \quad q \in P, \quad |q - p| = d.$$

(В действительности  $p = q$ .) Допустим, что существует вектор  $v \neq 0$ , общий для  $\sigma$  и  $P$ . Тогда  $p + av \in \partial\sigma$  при некотором  $a$  и  $q + av \in P$  в противоречии с тем, что  $d' > d$ . Поэтому такого вектора  $v$  не существует, и потому  $s + n = m$ . Следовательно,

векторы из  $P$  вместе с векторами из  $\sigma$  порождают векторы из  $E^m$ , и мы можем написать

$$q - p = u_1 + u_2, \quad u_1 \in \sigma, \quad u_2 \in P.$$

Положим  $p^* = p + u_1 = q - u_2$ ; тогда  $p^* \in P(\sigma) \cap P$ . Если  $p^*$  не лежит в  $\sigma$ , то

$$p' = p^* - au_1 \in \partial\sigma \text{ для некоторого } a, \quad 0 < a \leq 1;$$

полагая  $q' = p^* + au_2$ , получаем  $d' \leq |q' - p'| \leq d$ , т. е. снова приходим к противоречию. Следовательно,  $p^* \in \sigma$ . Так как  $\sigma$  и  $P$  не имеют общих ненулевых векторов, то пересечение  $P \cap \sigma$  не содержит других точек, кроме  $p^*$ .

Возьмем теперь любой единичный вектор  $v$  в  $P(\sigma)$ . Выберем такое число  $a > 0$ , что  $p' = p^* + av \in \partial\sigma$ , и положим  $q' = p^* + a\pi_P v$ . Тогда

$$d' \leq |q' - p'| = a |\pi_P v - v| < \text{diam}(\sigma) |\pi_P v - v|,$$

и неравенство (4) доказано.

**Лемма 14б.** Пусть  $P^*$  — произвольная плоскость в  $E$ ,  $P$  — плоскость в  $P^*$ ,  $Q$  — замкнутое множество в  $P^*$  и  $p^*$  — точка пространства  $E$ , не лежащая в  $Q$ . Обозначим через  $Q^*$  соединение  $J(p^*, Q)$ . Тогда

$$(5) \quad \rho(Q^*, P) \geq \frac{\rho(Q, P) \cdot \rho(p^*, P^*)}{\text{diam}(Q^*)}.$$

Допустим, что это неравенство, которое мы запишем в виде  $c \geq ab/d$ , неверно. Пусть  $Q^{**}$  — множество всех точек, лежащих на лучах, начинающихся в точках множества  $Q$  и проходящих через  $p^*$ . Тогда мы можем выбрать такие точки  $p' \in Q^{**}$  и  $q' \in P$ , что

$$|q' - p'| = \rho(Q^{**}, P) \leq c < \frac{ab}{d}.$$

Пусть, скажем,  $p'$  лежит на луче, идущем от точки  $p'' \in Q$  через  $p^*$ . Так как  $Q \subset P^*$ , то  $b \leq d$ ; поэтому  $c < ab/d \leq a$  и  $p' \neq p''$ . Следовательно, отрезок  $p'q'$  перпендикулярен отрезку  $p''p'$ . Пусть  $L$  — прямая, проходящая через  $p''$  и  $q'$ , и пусть  $q^*$  — ближайшая к  $p^*$  точка прямой  $L$ ; тогда отрезок  $q^*p^*$  перпендикулярен к  $L$ . Поскольку точка  $q'$  ближе к  $p'$ , чем к  $p''$ , точки  $q^*$  и  $q'$  находятся на  $L$  по одну и ту же сторону от точки  $p''$ . Теперь треугольники  $p''p'q'$  и  $p''q^*p^*$  подобны, и поэтому

$$|p' - q'| = \frac{|q' - p''| |q^* - p^*|}{|p^* - p''|} \geq \frac{ab}{d};$$

это противоречие доказывает лемму.

**15. Отображения  $n$ -мерных псевдомногообразий в  $n$ -мерное пространство.** Результаты этого параграфа мы используем в (IV, В). Мы будем говорить, что симплициальный комплекс  $K$  есть  *$n$ -мерное ориентированное псевдомногообразие*, если  $K$  есть комплекс размерности  $n$ , каждый его симплекс является гранью некоторого  $n$ -мерного симплекса, каждый  $(n-1)$ -мерный симплекс является гранью либо одного, либо же двух  $n$ -мерных симплексов, каждый  $n$ -мерный симплекс  $\sigma_i^n$  ориентирован и  $\partial \sum \sigma_i^n$  содержит только те  $(n-1)$ -мерные симплексы, которые являются гранью только одного  $n$ -мерного симплекса. (Обычно комплекс  $K$  предполагается связным в некотором смысле.) Символом  $\partial K$  мы обозначим множество только что упомянутых  $(n-1)$ -мерных симплексов или же множество точек всех этих симплексов.

Назовем отображение  $f$  некоторого  $n$ -мерного ориентированного псевдомногообразия  $K$  в ориентированное пространство  $E^n$  *симплексно-положительным*, если на каждом симплексе  $\sigma_i^n$  отображение  $f$  является гладким и взаимно однозначным (частные производные предполагаются непрерывными на границе) и  $\bar{J}_f > 0$  в  $\sigma_i^n$  (II, 6). Для любого комплекса  $L$  пусть  $L^k$  или  $(L)^k$  обозначает подкомплекс, состоящий из всех клеток комплекса  $L$ , имеющих размерность  $\leq k$ . Если  $f$  удовлетворяет на  $K$  указанным выше условиям и некоторая точка  $q$  множества  $E^n \setminus f(K^{n-1})$  содержится в образе некоторого числа  $h$   $n$ -мерных симплексов псевдомногообразия  $K$ , то мы будем говорить, что точка  $q$  *покрывается  $h$  раз*. (Если бы какие-нибудь якобианы были отрицательны, то мы рассматривали бы алгебраическое число симплексов, покрывающих  $q$ .)

Доказательство нижеследующей леммы можно было бы несколько сократить, если бы мы воспользовались некоторыми теоремами алгебраической топологии.

**Лемма 15а.** Пусть отображение  $f$  симплексно-положительно в  $K$ . Тогда для любого связного открытого подмножества  $R$  множества  $E^n \setminus f(\partial K)$  любые две точки из  $R$ , не принадлежащие  $f(K^{n-1})$ , покрываются одно и то же число раз. Если это число равно 1, то отображение  $f$ , рассматриваемое только в открытом подмножестве  $R' = f^{-1}(R)$  псевдомногообразия  $K$ , является взаимно однозначным отображением на  $R$ .

По теореме об обратной функции (II, теорема 7А) для каждого симплекса  $\sigma_i^n$  образ  $f(\text{int}(\sigma_i^n))$  является открытым множеством. Сначала мы покажем, что для любого симплекса  $\sigma^{n-1}$ , не входящего в  $\partial K$ , множество  $f(\text{St}(\sigma^{n-1}))$  (см. § 2) открыто. Пусть

$\sigma_1^n$  и  $\sigma_2^n$  — те  $n$ -мерные симплексы псевдомногообразия  $K$ , которые имеют симплекс  $\sigma^{n-1}$  своей гранью. Возьмем любую точку  $p \in \text{int}(\sigma^{n-1})$ ; нам нужно только доказать, что множество  $f(\text{St}(\sigma^{n-1}))$  покрывает некоторую окрестность точки  $f(p)$ . Так как в каждом симплексе  $\sigma_i^n$  отображение  $f$  взаимно однозначно, то существует окрестность  $U$  точки  $f(p)$ , не имеющая общих точек с  $f(\partial \text{St}(\sigma^{n-1}))$ . Так как отображение  $f$  гладко в  $\sigma^{n-1}$ , причем  $(n-1)$ -вектор-якобиан  $\neq 0$ , то мы можем выбрать окрестность  $U$  так, чтобы множество  $f(\sigma^{n-1})$  разбивало ее на две связные части  $U_1$  и  $U_2$ . (Доказательство элементарно.) Пусть  $pp_i$  — некоторый отрезок в  $\sigma_i^n$ , где  $p_i \in \text{int}(\sigma_i^n)$ , образом которого является дуга  $A_i$  в  $U$  ( $i=1, 2$ ). Если мы как-либо ориентируем симплекс  $\sigma^{n-1}$ , то он будет входить в  $\partial \sigma_1^n$  и в  $\partial \sigma_2^n$  с противоположными знаками. Так как  $\bar{J}_f > 0$  на каждом симплексе  $\sigma_i^n$ , то касательные векторы к  $A_1$  и к  $A_2$  в точке  $f(p)$  направлены в противоположные стороны от  $f(\sigma^{n-1})$  [см. (13.2)]; поэтому мы можем считать, что  $f(p_1) \in U_1$ ,  $f(p_2) \in U_2$ . Допустим теперь, что существует точка  $q \in U \setminus f(\sigma^{n-1})$ , не принадлежащая множеству  $f(\text{St}(\sigma^{n-1}))$ . Тогда в  $U \setminus f(\sigma^{n-1})$  найдется дуга  $A$ , соединяющая точку  $q$  либо с  $f(p_1)$ , либо же с  $f(p_2)$ . Существует первая точка  $q^*$  дуги  $A$ , лежащая в  $f(\text{St}(\sigma^{n-1}))$ ; в силу выбора окрестности  $U$  и дуги  $A$  имеем  $q^* \in U'_j = f(\text{int}(\sigma_j^n))$  при  $j=1$  или  $2$ . Но множество  $U'_j$  открыто в противоречии с определением точки  $q^*$ , и, таким образом, утверждение доказано.

Допустим, что первое заключение леммы неверно. Тогда множество  $R \setminus f(K^{n-1})$  мы можем представить как объединение таких двух непересекающихся множеств  $R_1$  и  $R_2$ , что для некоторого  $h$  каждая точка из  $R_1$  покрывается  $h$  раз, а каждая точка из  $R_2$  покрывается иное число раз. Мы можем выбрать дугу  $A$ , соединяющую некоторую точку множества  $R_1$  с точкой множества  $R_2$  и лежащую в  $R \setminus f(K^{n-1})$ ; пусть она переходит из множества  $R_1$  в  $R_2$  в некоторой точке  $q$ . Тогда  $q \in f(\sigma^{n-1})$  для некоторого симплекса  $\sigma^{n-1}$ . Пусть  $\sigma_1^{n-1}, \dots, \sigma_k^{n-1}$  — все  $(n-1)$ -мерные симплексы псевдомногообразия  $K$ , образы которых содержат точку  $q$ ; пусть, скажем, симплекс  $\sigma_i^{n-1}$  является гранью  $n$ -мерных симплексов  $\sigma_i, \sigma'_i$ . Так как отображение  $f$  на  $n$ -мерных симплексах взаимно однозначно, то мы сразу видим, что эти  $n$ -мерные симплексы различны. В силу доказанного выше существует такая окрестность  $U$  точки  $q$ , что для каждого  $i$  каждая точка множества  $U \setminus f(K^{n-1})$  содержится в точности в одном из образов  $f(\sigma_i), f(\sigma'_i)$ . Мы можем допустить, что окрестность  $U$  не пересекается

ни с одним из образов  $f(\sigma_j^{n-1})$  для других  $j$ . Тогда любой другой образ  $f(\sigma_l^n)$ , содержащий точку  $q$ , содержит и  $U$ . Следовательно, все точки множества  $U \setminus f(K^{n-1})$  покрываются одно и то же число раз в противоречии с выбором точки  $q$ .

Покажем, далее, что для любого симплекса  $\sigma^k$  псевдомногообразия  $K$  множество  $f(\text{St}(\sigma^k))$  открыто. Пусть дана точка  $p \in \text{int}(\sigma^k)$ ; мы должны показать, что множество  $f(\text{St}(\sigma^k))$  покрывает некоторую окрестность  $U$  точки  $q = f(p)$ . Выберем окрестность  $U$  связной и не пересекающейся с  $f(\partial \text{St}(\sigma^k))$ . Тогда  $L = \text{St}(\sigma^k)$  есть  $n$ -мерное ориентированное псевдомногообразие, и из доказанного выше следует, что все точки из  $U$ , не лежащие в  $f(L^{n-1})$ , покрываются  $n$ -мерными симплексами из  $L$  одно и то же число раз, скажем  $N$ . Так как некоторые точки вблизи  $q$  покрываются, то  $N \geq 1$ ; поэтому все точки окрестности  $U$  входят в  $f(L)$ .

Докажем теперь последнюю часть леммы. Так как точки покрываются 1 раз, то  $f$  отображает  $R'$  на  $R$ . Допустим теперь, что  $f(p_1) = f(p_2) = q$ ,  $p_1 \neq p_2$ . Пусть, скажем,  $p_i \in \text{int}(\sigma_i)$  (размерности симплексов мы не указываем). Поскольку отображение  $f$  взаимно однозначно на всех симплексах,  $\text{St}(\sigma_1) \cap \text{St}(\sigma_2) = \emptyset$ . По доказанному выше множество  $f(\text{St}(\sigma_i))$  покрывает все точки некоторой окрестности  $U_i$  точки  $q$ , не лежащие в  $f(K^{n-1})$ ,  $N_i > 0$  раз при  $i = 1, 2$ . Но это показывает, что отображение  $f$ , рассматриваемое на  $K$ , покрывает точки окрестности  $U = U_1 \cap U_2$  по крайней мере дважды; полученное противоречие завершает доказательство леммы.

**16. Смещение триангуляции пространства  $E^m$ .** Мы покажем, что если некоторую триангуляцию пространства  $E^m$  слегка сместить, то она останется триангуляцией.

**Лемма 16а.** Для данного целого числа  $m$  существует число  $\rho^* > 0$ , обладающее следующим свойством. Пусть  $K_0$  — разбиение пространства  $E^m$  на кубы с ребром длины  $h$ , и пусть  $K$  — регулярное подразделение разбиения  $K_0$  с вершинами  $p_0, p_1, \dots$ . Для каждого  $i$  пусть  $p'_i$  — такая точка, что

$$(1) \quad |p'_i - p_i| \leq \rho^* h.$$

Пусть, наконец,  $f$  — симплексно-аффинное отображение комплекса  $K$  в  $E^m$ , определяемое условиями  $f(p_i) = p'_i$ . Тогда  $f$  является взаимно однозначным отображением пространства  $E^m$  на себя, и симплексы  $f(\sigma)$  образуют симплициальное разбиение пространства  $E^m$ .

Очевидно, мы можем считать, что  $h = 1$ . Пусть  $\sigma = p_0 \dots p_m$  — некоторый  $m$ -мерный симплекс разбиения  $K_0$  с центром  $p_\sigma$ ; положим  $c = \rho(p_\sigma, \partial\sigma)$ . Мы можем выбрать число  $\rho^* < c/2$  таким образом, что если выполняются неравенства (1), то  $p'_0 \dots p'_m$  будет невырождающимся симплексом, ориентированным так же, как и  $\sigma$  [см. (IV, лемма 14с)].

Пусть теперь даны  $p'_i$  и  $f$ . Ориентируем пространство  $E^m$  и ориентируем  $m$ -мерные симплексы так же, как и  $E^m$ . Очевидно, точка  $f(p_\sigma)$  покрывается только симплексом  $f(\sigma)$ . Несмотря на то, что комплекс  $K$  бесконечен ( $\partial K$  пусто), доказательство леммы 15а проходит; оно показывает, что  $f$  есть взаимно однозначное отображение на все пространство  $E^m$ . Отсюда следует и последнее утверждение леммы.

## Подготовительные сведения из анализа

Мы излагаем здесь некоторые результаты из анализа, которые могут не быть хорошо известными читателю и которые играют важную роль в различных частях книги. Функции специального вида, построенные в § 1, применяются в § 2; разложения единицы, описанные в § 2, встречаются, например, в § 8, 10, 15 и 18 гл. III, а также в (IV, 27), (VII, 3) и (VIII, 2). Очень полезным методом является аппроксимация непрерывной или измеримой функции гладкими функциями; она рассматривается в § 3 и 4. В § 5 и 6 разбираются некоторые вопросы из лебеговской теории.

Функция  $\varphi$  называется *k-гладкой* в открытом множестве  $R$ , если она непрерывна и имеет в  $R$  непрерывные частные производные до порядка  $k$  включительно (если пользоваться некоторой аффинной системой координат). Таким образом, термины „0-гладкая“ и „непрерывная“ означают одно и то же. Мы говорим, что  $\varphi$  — *гладкая* функция, если она является 1-гладкой. Мы говорим, что функция  $\varphi$  *клеточно-непрерывна* в  $E^n$ , если для некоторого клеточного разбиения пространства  $E^n$  (П. II, 3) функция  $\varphi$  определена и равномерно непрерывна в открытом ядре каждой  $n$ -мерной клетки; в случае когда функция  $\varphi$  определена на некотором полиэдре, определение аналогично. Подобным же образом определяется *клеточно-постоянная* функция. Две клеточно-непрерывные функции рассматриваются как одна и та же функция, если они отличаются только на полиэдральном множестве размерности  $< n$ . Мы говорим, что функция  $\varphi$  (предполагаемая непрерывной или клеточно-непрерывной или же измеримой) *суммируема* в  $R$ , если интеграл  $\int_R |\varphi(p)| dp$  конечен. Мы говорим, что функция  $\varphi$

*локально суммируема* в  $R$ , если каждая точка  $p \in R$  имеет такую окрестность  $U$ , что функция  $\varphi$  суммируема в  $U$ . Через  $\text{car}(\varphi)$  обозначается множество точек, в которых  $\varphi \neq 0$ ; *носитель*  $\text{spt}(\varphi)$  функции  $\varphi$  есть замыкание множества  $\text{car}(\varphi)$ .

Мы обозначаем через  $\sup \{a, b\}$  большее из двух чисел  $a, b$  и через

$$\sup \{\varphi(p) : C(p)\} = \sup_{C(p)} \{\varphi(p)\}$$

верхнюю грань значений  $\varphi(p)$  функции  $\varphi$  на множестве тех точек  $p$ , для которых выполняется условие  $C(p)$ . Для нижней грани мы пользуемся символом  $\inf \{ \}$ .

Если функция  $\varphi$  принимает действительные значения или значения в банаховом пространстве, то  $\langle \varphi \rangle$  есть функция, значение которой в точке  $p$  равно  $|\varphi(p)|$ ; таким образом,  $\langle \varphi \rangle(p) = |\varphi(p)|$ . Мы полагаем

$$|\varphi|_R = \sup \{ |\varphi(p)| : p \in R \}, \quad |\varphi| = \sup \{ |\varphi(p)| \}.$$

Если для обозначения нормы в банаховом пространстве применяется, как в (I, 13), символ  $|\cdot|_0$ , то мы пользуемся символами  $\langle \varphi \rangle_0, |\varphi|_0$ .

Символ  $|Q|$  обозначает объем или в более общем случае лебеговскую меру множества  $Q \subset E^n$ . См. также § 5.

**1. Существование некоторых функций.** Мы докажем существование действительных функций, обладающих определенными свойствами, например равных единице на данном замкнутом множестве и нулю на другом множестве. Функция называется *двезной*, если она ограничена и удовлетворяет условию Липшица (II, 4).

**Лемма 1а.** Пусть  $Q$  и  $Q'$  — замкнутые множества в  $E^n$ , расстояние  $\zeta$  между которыми положительно. Тогда в  $E^n$  существует действительная двезная функция  $\varphi$ , равная единице на  $Q$  и нулю на  $Q'$ .

Функция  $\varphi$  задается формулой (V, 12.3), в которой  $\sigma$  надо заменить на  $Q$ .

Определим теперь некоторые действительные функции, являющиеся бесконечно гладкими (т. е. функциями, у которых существуют и непрерывны все частные производные). Положим

$$(1) \quad \Psi_0(t) = \frac{1}{t(1-t)}, \quad \Phi_0(t) = e^{-\Psi_0(t)} \quad \text{при } 0 < t < 1$$

и  $\Phi_0(t) = 0$  для других значений  $t$ . Тогда каждая производная функции  $\Phi_0$  стремится к нулю, когда  $t \rightarrow 0$  или  $t \rightarrow 1$ ; поэтому  $\Phi_0$  является бесконечно гладкой при всех  $t$ . Далее, положим

$$(2) \quad a = \int_0^1 \Phi_0(t) dt, \quad \Phi_1(t) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^t \Phi_0(s) ds.$$

Тогда функция  $\Phi_1$  является бесконечно гладкой и

$$\Phi_1(t) = 0 \quad (t \leq 0), \quad \Phi_1(t) = 1 \quad (t \geq 1),$$

$$(3) \quad 0 < \Phi_1(t) < 1 \quad (0 < t < 1).$$

Пусть  $0 < t_0 < t_1$ . С помощью функции  $\Phi_1$  мы, очевидно, можем построить такую бесконечно гладкую функцию  $\Phi^*(t)$ , что  $\Phi^*(t) = 1$  при  $|t| \leq t_0$ ,  $\Phi^*(t) = 0$  при  $|t| \geq t_1$  и  $0 < \Phi^*(t) < 1$  при всех остальных значениях  $t$ .

Лемма 1b. Пусть  $Q \subset Q'$  — концентрические кубы или шары в  $E^n$ . Тогда существует такая бесконечно гладкая действительная функция  $\Phi(p)$  в  $E^n$ , что

$$(4) \quad \begin{aligned} \Phi(p) &= 1 \text{ в } Q, & \Phi(p) &= 0 \text{ в } E^n \setminus Q', \\ 0 &< \Phi(p) < 1 \text{ в } \text{int}(Q') \setminus Q. \end{aligned}$$

Если  $Q$  и  $Q'$  — шары радиусов  $t_0$  и  $t_1$  соответственно с центром в точке  $p_0$ , то мы можем положить  $\Phi(p) = \Phi^*(|p - p_0|)$ . Если  $Q$  и  $Q'$  — кубы, определенные, скажем, условиями  $|x^i| \leq t_k$  ( $i = 1, \dots, n$ ) для  $k = 0, 1$ , то мы можем положить  $\Phi(p) = \Phi^*(x^1) \dots \Phi^*(x^n)$ .

Лемма 1с. Пусть  $Q_1$  и  $Q_2$  — непересекающиеся замкнутые множества в  $E^n$ . Тогда существует такая бесконечно гладкая действительная функция  $\Phi$  в  $E^n$ , что

$$(5) \quad \begin{aligned} \Phi(p) &= 1 \text{ в } Q_1, & \Phi(p) &= 0 \text{ в } Q_2, \\ 0 &\leq \Phi(p) \leq 1 \text{ в } E^n. \end{aligned}$$

Пусть  $P_1, P_2, \dots$  — такая последовательность замкнутых шаров, не пересекающих  $Q_2$ , что их открытые ядра покрывают множество  $Q_1$  и каждая точка пространства  $E^n$  имеет окрестность, пересекающуюся не более чем с конечным числом шаров  $P_i$ . (Если множество  $Q_1$  ограничено, то нам понадобится только конечное число шаров  $P_i$ .) Пусть  $\Phi'_i$  — бесконечно гладкая функция в  $E^n$ , которая  $> 0$  в  $\text{int}(P_i)$  и  $= 0$  в  $E^n \setminus P_i$  (лемма 1b). Положим  $\Phi'(p) = \sum \Phi'_i(p)$ . Пусть  $U$  — такая окрестность множества  $Q_1$ , что  $\Phi'(p) > 0$  в  $U$ . Определим функцию  $\Phi''(p)$  таким же образом, как была определена функция  $\Phi'(p)$ , но заменив множество  $Q_1$  на  $E^n \setminus U$  и множество  $Q_2$  на  $Q_1$ . Положим

$$\Phi(p) = \frac{\Phi'(p)}{\Phi'(p) + \Phi''(p)};$$

эта функция, очевидно, обладает требуемыми свойствами.

**2. Разложения единицы.** Мы говорим, что некоторое множество действительных функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , определенных в  $E^n$ , образует в  $E^n$  разложение единицы, если

$$(1) \quad 0 \leq \varphi_i(p) \leq 1 \quad (\text{для всех } p, i), \quad \sum \varphi_i(p) = 1 \text{ в } E^n.$$

Обычно требуется, чтобы функция  $\varphi_i$  обращалась в нуль вне данного открытого множества  $U_i$ . Построение разложения единицы проведено в (III, 8). Соответствующее построение в случае гладкого многообразия см. в (III, 10).

Мы проведем здесь построение для одного частного случая.

**Лемма 2а.** Пусть  $Q \subset E^n$  — компактное множество,  $U_1, \dots, U_m$  — открытые множества и  $Q \subset \bigcup U_i$ . Тогда существуют такие бесконечно гладкие функции  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ , что

- (а)  $0 \leq \varphi_i(p) \leq 1 \quad (i=0, 1, \dots, m)$ ,
- (б)  $\varphi_0(p) = 0$  в некоторой окрестности множества  $Q$ ,
- (с)  $\varphi_i(p) = 0$  в  $E^n \setminus U_i \quad (i=1, \dots, m)$ ,
- (д)  $\varphi_0(p) + \varphi_1(p) + \dots + \varphi_m(p) = 1$  в  $E^n$ .

Для некоторого  $\zeta > 0$  мы можем положить

$$U'_i = \text{int}_{\zeta}(U_i), \quad i=1, \dots, m$$

(обозначения см. в П. II), причем мы будем иметь  $\bar{U}'_i \subset U_i$ ,  $Q \subset \bigcup U'_i$ . (Если последнее условие не выполняется для  $\zeta = 1/k$  ни при каком  $k$ , то возьмем некоторую точку  $q_k \in Q \setminus \bigcup U'_i$ , где  $U'_i$  построены для  $\zeta = 1/k$ . В множестве  $Q$  найдется предельная точка  $q$  последовательности  $q_1, q_2, \dots$ , и мы быстро приходим к противоречию.) Пусть  $\Phi_i$  — бесконечно гладкая функция в  $E^n$ , которая  $> 0$  в  $U'_i$  и  $= 0$  в  $E^n \setminus U_i$ , где  $i=1, \dots, m$  (лемма 1с). Тогда  $\bar{U}_\varepsilon(Q) \subset \bigcup U'_i$  при некотором  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $\Phi_0$  — бесконечно гладкая функция, которая  $> 0$  в  $E^n \setminus \bigcup U'_i$  и  $= 0$  в  $\bar{U}_\varepsilon(Q)$ . Тогда  $\sum_{j \geq 0} \Phi_j(p) > 0$  в  $E^n$ , и условиям леммы удовлетворяют функции

$$\varphi_i(p) = \frac{\Phi_i(p)}{\Phi_0(p) + \dots + \Phi_m(p)}, \quad i=0, 1, \dots, m.$$

**3. Сглаживание функций посредством усреднения.** Простейший способ, позволяющий сгладить функцию  $\varphi$ , определенную в  $E^n$ , состоит в том, чтобы воспользоваться функцией  $\bar{\varphi}_p(p)$ , равной среднему значению функции  $\varphi$  в шаре  $U_p(p)$  с центром  $p$ . Если  $|U_p(p)| = a_n p^n$ , то

$$(1) \quad \bar{\varphi}_p(p) = \frac{1}{a_n p^n} \int_{U_p(p)} \varphi(p+v) dv = \frac{1}{a_n p^n} \int_{U_p(p)} \varphi(q) dq$$

[первый интеграл рассматривается в пространстве  $V = V(E^n)$ ]. Если функция  $\varphi$  непрерывна, то  $\bar{\varphi}_\rho$  — гладкая функция. Мы хотим определить функцию  $\varphi_\rho$ , которая была бы бесконечно гладкой. Будем предполагать, что функция  $\varphi$  непрерывна или клеточно-непрерывна или, в наиболее общем случае, измерима по Лебегу и локально суммируема. Она может принимать действительные значения или же значения в банаховом пространстве. Определена она может быть в  $E^n$  или в некотором открытом множестве  $R \subset E^n$ ; в последнем случае функция  $\varphi_\rho$  определяется в  $\text{int}_\rho(R)$ .

Пусть  $\bar{x}_\rho(t)$  — бесконечно гладкая действительная функция, определенная при  $t \geq 0$ , постоянная на некотором отрезке  $[0, t_0]$ , равная нулю при  $t \geq \rho$  и монотонно убывающая на отрезке  $t_0 \leq t \leq \rho$  (ее можно определить так же, как в § 1). Положим  $x_\rho(v) = \bar{x}_\rho(|v|)$  в  $V = V(E^n)$ . Тогда функция  $x_\rho$  является бесконечно гладкой и

$$(2) \quad x_\rho(v) = 0 \quad (|v| \geq \rho), \quad \int_V x_\rho(v) dv = 1$$

(если потребуется, следует умножить функцию  $\bar{x}_\rho$  на некоторую константу  $c_\rho$ ).

Определим  $\rho$ -среднее  $\varphi_\rho$  функции  $\varphi$ , полагая

$$(3) \quad \varphi_\rho(p) = \int_{U_\rho(0)} x_\rho(v) \varphi(p+v) dv = \int_R x_\rho(q-p) \varphi(q) dq, \quad p \in \text{int}_\rho(R).$$

Мы будем иметь случай воспользоваться и другими обозначениями:

$$(4) \quad x'_i(v) = x_{1/i}(v), \quad A_i \varphi(p) = \varphi_{1/i}(p) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Лемма 3а. Пусть функция  $\varphi$  непрерывна в  $R$ . Тогда

$$(5) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \varphi_\rho(p) = \varphi(p), \quad p \in R,$$

и это имеет место равномерно на любом компактном множестве  $Q \subset R$ .

В силу (2)

$$(6) \quad \varphi_\rho(p) - \varphi(p) = \int_{U_\rho(0)} x_\rho(v) [\varphi(p+v) - \varphi(p)] dv, \quad p \in \text{int}_\rho(R).$$

Возьмем такое число  $\rho_0$ , что  $U_{\rho_0}(Q) \subset R$  и  $|\varphi(p+v) - \varphi(p)| < \varepsilon$ , если  $p \in Q$  и  $|v| < \rho_0$ ; тогда в силу (6)  $|\varphi_\rho(p) - \varphi(p)| < \varepsilon$  при  $\rho \leq \rho_0$ ,  $p \in Q$ .

Лемма 3b. Если функция  $\varphi$  измерима и локально суммируема, то

$$(7) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \varphi_\rho(p) = \varphi(p) \quad \text{п. в. в } R.$$

Чтобы это показать, заметим прежде всего, что так как значение  $x_\rho(v)$  зависит только от  $|v|$ ,  $\varphi_\rho(p)$  выражается через  $\bar{\varphi}_\eta(p)$ ,  $0 \leq \eta \leq \rho$ . Чтобы найти такое выражение, положим

$$(8) \quad v_\rho(h) = \inf \{t: \bar{x}_\rho(t) \leq h\};$$

эта функция определена при  $0 \leq h \leq b = \bar{x}_\rho(0)$ ;  $v_\rho$  является обратной функцией для  $\bar{x}_\rho$  на любом отрезке, на котором  $\bar{x}_\rho$  убывает. Возьмем график функции  $x_\rho$ ; при пересечении с плоскостью, проведенной на высоте  $h$  ( $0 < h < b$ ), этот график вырезает открытый шар радиуса  $t = v_\rho(h)$ , имеющий  $n$ -мерный объем  $a_n t^n$ . Поэтому, очевидно,

$$(9) \quad \varphi_\rho(p) = \int_0^b a_n [v_\rho(h)]^n \bar{\varphi}_{v_\rho(h)}(p) dh = \int_0^\rho a_n t^n \left[ -\frac{d}{dt} \bar{x}_\rho(t) \right] \bar{\varphi}_t(p) dt.$$

Это можно аналитически проверить следующим образом. Положим

$$(10) \quad \bar{x}_{\rho h}(t) = \sup \{x_\rho(t) - h, 0\},$$

$$(11) \quad \varphi_{\rho h}(p) = \int_V \bar{x}_{\rho h}(|v|) \varphi(p+v) dv.$$

Тогда  $\partial \bar{x}_{\rho h}(t) / \partial h = -1$ , если  $t < v_\rho(h)$ , и  $= 0$ , если  $t > v_\rho(h)$ , в предположении, что  $v_\rho(h)$  — точка убывания функции  $\bar{x}_\rho$ , и

$$\frac{\partial \varphi_{\rho h}(p)}{\partial h} = \int_V \frac{\partial \bar{x}_{\rho h}(|v|)}{\partial h} \varphi(p+v) dv = - \int_{U_{v_\rho(h)}(0)} \varphi(p+v) dv$$

для такого  $h$ . Так как  $\varphi_{\rho 0}(p) = \varphi_\rho(p)$ ,  $\varphi_{\rho b}(p) = 0$ , то

$$\varphi_\rho(p) = - \int_0^b \frac{\partial \varphi_{\rho h}(p)}{\partial h} dh = \int_0^b \int_{U_{v_\rho(h)}(0)} \varphi(p+v) dv dh,$$

и мы получаем (9). Заметим, что если в (9) взять  $\varphi(p) = 1$  (для всех  $p$ ), то мы найдем

$$(12) \quad \int_0^b a_n [v_\rho(h)]^n dh = \int_0^\rho a_n t^n \left[ -\frac{d\bar{x}_\rho}{dt} \right] dt = 1.$$

Хорошо известно (см. § 5), что  $\lim_{p \rightarrow 0} \bar{\varphi}_p(p) = \varphi(p)$  п. в. в  $R$ . Пользуясь этим, покажем, что имеет место (7). Для заданного  $\varepsilon > 0$  выберем  $\rho_0$  так, чтобы было  $|\bar{\varphi}_t(p) - \varphi(p)| < \varepsilon$  при  $t \leq \rho_0$ . Тогда из (9) и (12) следует, что

$$|\varphi_p(p) - \varphi(p)| = \left| \int_0^p a_n t^n \left[ -\frac{d\bar{x}_p}{dt} \right] [\bar{\varphi}_t(p) - \varphi(p)] dt \right| < \varepsilon, \quad p \leq \rho_0.$$

Лемма 3с. *Функция  $\varphi_p(p)$  бесконечно гладка в  $\text{int}_p(R)$ .*

Сначала покажем, что если  $e_1, \dots, e_n$  — некоторый базис в  $V$ , то

$$(13) \quad \nabla_{e_i} \varphi_p(p) = - \int_R \nabla_{e_i} x_p(q-p) \varphi(q) dq$$

[см. также (4.1)]. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi_p(p + te_i) - \varphi_p(p)}{t} + \int_R \nabla_{e_i} x_p(q-p) \varphi(q) dq \right| \leq \\ & \leq \int_{U_p(p)} \left| \frac{x_p(q-p-te_i) - x_p(q-p)}{t} + \nabla_{e_i} x_p(q-p) \right| |\varphi(q)| dq, \end{aligned}$$

и (13) следует из того факта, что первый множитель в последнем подинтегральном выражении равномерно стремится к нулю [мы можем воспользоваться леммой (II, 2с)].

Так как функция  $x_p$  является бесконечно гладкой, то мы можем повторять этот процесс; лемма доказана.

**4. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации.** Докажем следующую лемму:

Лемма 4а. Пусть  $\varphi$  — некоторая  $t$ -гладкая функция ( $t \geq 0$ ) в открытом множестве  $R \subset E^n$ . Тогда для любого компактного множества  $Q \subset R$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такая бесконечно гладкая в  $E^n$  функция  $\varphi'$ , что функция  $\psi(p) = \varphi'(p) - \varphi(p)$  и все ее производные порядка  $\leq t$  (в некоторой фиксированной системе координат) в  $Q$  будут по абсолютной величине  $< \varepsilon$ .

Замечания. Мы предполагаем, что  $\varphi$  принимает действительные значения. Если  $\varphi$  принимает значения в евклидовом пространстве  $E'$ , то мы можем ввести в  $E'$  ортонормальную систему координат и применить лемму отдельно в каждой координате; тем самым лемма будет доказана для  $\varphi$ . При  $t = 0$  функция  $\varphi$  предполагается только непрерывной. Мы можем также сформули-

ровать заключение следующим образом: „ $\varphi'$  аппроксимирует в  $Q$  функцию  $\varphi$  вместе с частными производными порядка  $\leq m$  с погрешностью  $< \varepsilon$ “, или же „ $\varphi'$  аппроксимирует  $(\varphi, Q, m, \varepsilon)$ “.

Выберем  $\rho_0 > 0$  так, чтобы было  $U_{3\rho_0}(Q) \subset R$ . Возьмем кубическое подразделение пространства  $E^n$  с кубами диаметра  $\rho_0$ . Пусть  $P$  — множество всех точек, лежащих в кубах, которые имеют общие точки с  $U_{\rho_0}(Q)$ ; тогда  $P \subset R$ . Положим  $\varphi^*(p) = \varphi(p)$  в  $P$  и  $\varphi^*(p) = 0$  в  $E^n \setminus P$ ; тогда  $\varphi^* = \varphi$  в  $U_{\rho_0}(Q)$ . Для любого  $\rho \leq \rho_0$  функция  $\varphi_\rho^*$  определяется так же, как в § 3, и является бесконечно гладкой в  $E^n$ . При  $m = 0$  мы можем, как непосредственно следует из леммы 3а, взять функцию  $\varphi' = \varphi_\rho^*$  для достаточно малого  $\rho$ . При  $m = 1$ , воспользовавшись в (3.13) интегрированием по частям, получим

$$(1) \quad \nabla_{e_i} \varphi_\rho(p) = \int_R x_p(q - p) \nabla_{e_i} \varphi(q) dq \quad (\text{функция } \varphi \text{ гладкая}),$$

т. е.  $(\nabla_{e_i} \varphi)_\rho(p) = \nabla_{e_i} \varphi_\rho(p)$ . Применяя лемму 3а к каждой из функций  $\varphi, \partial\varphi/\partial x^1, \partial\varphi/\partial x^2, \dots$ , видим, что мы снова можем взять функцию  $\varphi' = \varphi_\rho^*$ . Повторяя этот процесс, доказываем нашу лемму для произвольного  $m$ .

**5. Лебеговская теория.** В последних главах книги мы предполагаем знакомство с интегралом Лебега. Мы опишем здесь несколько терминов и фактов, имеющих особо важное значение.

Мы пишем „п. в.“ вместо „почти всюду“ (всюду, за исключением некоторого множества меры нуль). В гл. IX и X термин „измеримая“ означает „измеримая по Лебегу“; символом  $|Q|$  мы обозначаем меру множества  $Q$ . Однако мы часто рассматриваем  $s$ -мерную плоскость  $P^s$  в пространстве  $E^n$ ; если мы говорим „функция  $\varphi$  измерима в  $P^s$ “, то мы подразумеваем, что функция  $\varphi$ , если ее рассматривать только в  $P^s$ , в этой плоскости измерима. Точно так же, если  $Q \subset P^s$ , то символом  $|Q|_s$  мы обозначаем меру Лебега множества  $Q$  в плоскости  $P^s$ . Если  $\varphi$  — действительная измеримая функция, определенная на измеримом множестве  $Q$ , то символом  $|\varphi|$  мы обозначаем ее существенную верхнюю грань

$$(1) \quad |\varphi| = \text{ess sup } \{\varphi\} = \inf \{ \sup \{ |\varphi(p)| : p \in Q' \} : |Q - Q'| = 0 \}.$$

В случае когда функция  $\varphi$  непрерывна или клеточно-непрерывна, это согласуется с данным выше определением символа  $|\varphi|$ . Это определение остается в силе и в том случае, если  $\varphi$  принимает значения в некотором нормированном линейном пространстве.

Если функция  $\varphi$  принимает значения в  $V_{[r]}$  или в  $V^{[r]}$  и в качестве нормы мы пользуемся массой или комассой (I, 13), то вместо  $|\varphi|$  мы пишем  $|\varphi|_0$ .

Важную роль играет теорема о почленном интегрировании: пусть функция  $\psi$  измерима и суммируема на измеримом множестве  $R$ , функции  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) и  $\varphi$  измеримы в  $R$ ,  $0 \leq \varphi_i(p) \leq \psi(p)$  в  $R$  и  $\lim \varphi_i(p) = \varphi(p)$  п. в. в  $R$ ; тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_R \varphi_i = \int_R \varphi.$$

Напомним некоторые факты из теории производной (см. Сакс, гл. IV). Для ограниченного измеримого множества  $Q \subset E^n$  положим

$$(2) \quad \Theta(Q) = \frac{|Q|}{[\text{diam}(Q)]^n}$$

[см. (IV, 14), (IX, 2)]. Пусть  $\Phi$  — такая счетно-аддитивная действительная функция множества на измеримом множестве  $R \subset E^n$ , что при некотором  $N$

$$(3) \quad |\Phi(Q)| \leq N|Q| \text{ для всех измеримых множеств } Q \subset R;$$

или, более общо, предположим, что функция  $\Phi$  абсолютно непрерывна. Для любой точки  $p \in R$  возьмем произвольную последовательность  $Q_1, Q_2, \dots$  измеримых множеств в  $R$ , содержащих точку  $p$ , для которых  $\Theta(Q_i) \geq \eta$  при некотором  $\eta > 0$  (для всех  $i$ ) и  $\text{diam}(Q_i) \rightarrow 0$ . Положим

$$(4) \quad D_\Phi(p) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Phi(Q_i)}{|Q_i|},$$

если этот предел существует и не зависит от выбора последовательности. Тогда функция  $D_\Phi$  существует п. в. в  $R$  и измерима, и при этом

$$(5) \quad \Phi(Q) = \int_Q D_\Phi \text{ для измеримых множеств } Q \subset R.$$

Мы могли бы здесь брать последовательности  $Q_1, Q_2, \dots$  множеств, не содержащих  $p$ , при условии, что при некотором  $\eta > 0$  мы имели бы  $\Theta(Q'_i) \geq \eta$  для всех  $i$ , где через  $Q'_i$  мы обозначаем множество  $Q_i$  вместе с точкой  $p$ ; в самом деле,  $|Q'_i| = |Q_i|$ . Мы могли бы в качестве  $Q_i$  брать множества какого-либо определенного вида; можно было бы, как в (IX, 4.1), потребовать, чтобы  $Q_i$  были симплексами. В этом случае функция  $D_\Phi$  была бы, возможно, определена в большем множестве точек, чем определенная ранее функция  $D_\Phi$ .

Приведем одну из возможных формулировок теоремы Фубини. Пусть  $\varphi$  — действительная измеримая и суммируемая функция на измеримом множестве  $R \subset E^n$ . Пусть  $P^s$  и  $P^{n-s}$  — некоторые плоскости в  $E^n$ , имеющие в точности одну общую точку (таким образом, они порождают все пространство  $E^n$ ). Для каждой точки  $q \in P^{n-s}$  пусть  $P^s(q)$  — плоскость, проходящая через  $q$  и параллельная плоскости  $P^s$ . Тогда для почти всех  $q \in P^{n-s}$  функция  $\varphi$  измерима и суммируема на пересечении  $P^s(q) \cap R$  и

$$\int_R \varphi(p) dp = \int_{P^{n-s}} \int_{P^s(q) \cap R} \varphi(p) dp dq.$$

Кроме того, если множество  $Q \subset R$  таково, что  $|R \setminus Q| = 0$ , то  $|P^s(q) \cap R \setminus Q|_s = 0$  для почти всех  $q \in P^{n-s}$ .

Имеет место также следующее обобщение теоремы Фубини. Пусть  $P^{n-s}$  и  $P^{s-1}$  — плоскости без общей точки, порождающие пространство  $E^n$ . Для каждой точки  $q \in P^{n-s}$  пусть  $P^s(q)$  — плоскость, порожденная плоскостью  $P^{s-1}$  и точкой  $q$ . (Плоскости  $P^s(q)$  покрывают почти все пространство  $E^n$ .) Пусть  $\varphi$  и  $Q$  такие же, как и раньше. Тогда для почти всех точек  $q \in P^{n-s}$  функция  $\varphi$  измерима на пересечении  $P^s(q) \cap R$  и  $|P^s(q) \cap R \setminus Q|_s = 0$ . (Формула для  $\int_R \varphi$ , если ее соответствующим образом видоизме-

нить, останется справедливой.) Это можно показать следующим образом. Любая точка  $p_0$ , не принадлежащая  $P^{s-1}$ , но лежащая в некоторой плоскости  $P^s(q_0)$ , имеет окрестность  $U$ , покрываемую плоскостями  $P^s(q)$ . Существует такой гладкий гомеоморфизм окрестности  $U$  на некоторое открытое множество  $U'$ , что пересечения  $P^s(q) \cap U$  переходят в части параллельных плоскостей, секущих  $U'$ . Множества  $R \cap U$  и  $Q \cap U$  переходят соответственно в некоторые множества  $R'$  и  $Q'$  в  $U'$ , а функция  $\varphi$  — в функцию  $\varphi'$  на множестве  $R'$ . По теореме Фубини для почти всех из этих параллельных плоскостей  $P'$  функция  $\varphi'$  измерима на  $P' \cap R'$  и  $|P' \cap R' \setminus Q'|_s = 0$ . Поэтому для некоторого множества  $H_U$  в  $P^{n-s}$ , имеющего  $(n-s)$ -мерную меру нуль, функция  $\varphi$  измерима на  $P^s(q) \cap U \cap R$  и  $|P^s(q) \cap U \cap R \setminus Q|_s = 0$  при  $q \in P^{n-s} \setminus H_U$ . Объединение множеств  $P^s(q) \setminus P^{s-1}$  покрывается счетным множеством таких окрестностей  $U_i$ ; пусть  $H$  — объединение множеств  $H_{U_i}$ . Тогда  $|H|_{n-s} = 0$  и каждая плоскость  $P^s(q)$  ( $q \in P^{n-s} \setminus H$ ) обладает требуемыми свойствами.

**6. Пространство  $L^1$ .** Рассмотрим действительные измеримые суммируемые функции  $\varphi$  в  $E^n$ ; две такие функции эквивалентны,

если они равны п. в. Точками пространства  $L^1$  являются классы эквивалентности  $\Phi$  таких функций; норма класса  $\Phi$  равна  $\int_{E^n} \langle \varphi \rangle$

для любой функции  $\varphi \in \Phi$ . Так как пространство  $L^1$  полно (см. Халмош, стр. 172, или McShane E. J., *Integration*, Princeton, 1951, pp. 182—184), то оно является банаховым пространством.

Пусть  $S$  — подпространство пространства  $L^1$ , образованное непрерывными суммируемыми функциями. Тогда  $S$  плотно в  $L^1$ . Это можно показать следующим образом. Возьмем любую функцию  $\varphi \in \Phi \in L^1$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  мы можем выбрать такую ограниченную функцию  $\psi$ , равную нулю вне некоторого ограниченного множества  $R$ , что  $\int \langle \varphi - \psi \rangle < \varepsilon/2$ . Образует средние  $A_i \psi$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), как в § 3. Так как  $A_i \psi \rightarrow \psi$  п. в. (лемма 3b), то  $\langle A_i \psi - \psi \rangle \rightarrow 0$  п. в. Кроме того, для некоторой фиксированной суммируемой функции  $\psi'$  имеет место неравенство  $\langle A_i \psi - \psi \rangle < \psi'$  в  $E^n$  для всех  $i$ . Поэтому  $\lim \langle A_i \psi - \psi \rangle = 0$ , и мы можем выбрать такой номер  $i_0$ , что  $\int \langle A_{i_0} \psi - \psi \rangle < \varepsilon/2$ . Теперь функция  $A_{i_0} \psi$  непрерывна и  $\int \langle A_{i_0} \psi - \varphi \rangle < \varepsilon$ . В связи с этим см. также лемму (XI, 3a).

Заметим, что операция в  $L^1$ , определенная с помощью сдвига в  $E^n$  ( $T_v \varphi(p) = \varphi(p - v)$ ), непрерывна. Более общая теорема следует из теорем (IX, 15B) и (X, 7B).

# УКАЗАТЕЛЬ СИМВОЛОВ

Вначале мы перечисляем символы,  
определенные в приложениях

## ПРИЛОЖЕНИЕ I

|  |          |                |          |
|--|----------|----------------|----------|
| $\sum_{(\lambda)}, \varepsilon_{\lambda}, \partial_{\lambda}^{\mu}, \hat{i}, \approx, \dim(V)$ | 466      | $ v $          | 472, 474 |
| $e_i, \mathfrak{A}^n, \bar{e}^i$   | 467      | $\rho(v, w)$   | 473, 474 |
| $L(V, W), \mathfrak{A}, e^i$   | 468      | $u \cdot v$    | 474      |
| $\bar{V}$  | 468, 473 | $ \varphi $    | 475      |
| $\varphi^*$  | 469      | $V(E), p + v$  | 476      |
| $X \times Y, x \times y, V \oplus W,$  | 470      | $\sum a_i p_i$ | 479      |
| $V_{\text{mod}} W, \text{ann}(V_1)$  | 471      | $E^n$          | 481      |

## ПРИЛОЖЕНИЕ II

|  |   |                    |
|--|---|--------------------|
| $\subset, \in, \cap, \cup, \mathbf{U}, \mathbf{N},$                      | $\mathbf{C}^r, l^0$                       | 493                |
| $Q_2 \setminus Q_1 \bar{Q}, \text{int}(Q), f^{-1}(Q),$                   | $\partial A$                              | 216, 218, 493      |
| $\rho(p, q), \rho(P, Q), \text{diam}(Q)$                                 | $dX$                                      | 221, 494           |
| $U_{\zeta}(Q), \bar{U}_{\zeta}(Q), \text{int}_{\zeta}(Q),$               | $H_r, H^r, H, H^*$                        | 495                |
| $P(\sigma), \dim(\sigma), \text{int}(\sigma)$                            | $X \cup Y, X \cap A$                      | 384, 389, 495, 497 |
| $\partial \sigma$  | $J(P, Q), J(p, A), J(\sigma^r, \sigma^s)$ | 496,               |
| $p_0 \dots p_r$  | $\sigma^r \times \sigma^s, I$             | 498                |
| $\dim(Q)$  | $\mathcal{D}_{\sigma}(t \times p)$        | 500                |
| $\text{St}(\sigma), \bar{\text{St}}(\sigma), \partial \text{St}(\sigma)$ | $\text{ind}(P, P')$                       | 501                |
| $\sum a_i \sigma_i^r, \dim(A), \mathbf{C}_r$                             |   |                    |

## ПРИЛОЖЕНИЕ III

|  |                                |               |
|--|--------------------------------|---------------|
| $\text{car}(\varphi), \text{spt}(\varphi), \sup \{ \}, \inf \{ \}$ | $x'_i, x_p, A_i \varphi$       | 511           |
|  | п. в., $ Q _s, \text{ess sup}$ | 514           |
| $\langle \varphi \rangle,  \varphi _R, \langle \varphi \rangle_0$  | $\Theta(Q)$                    | 177, 355, 515 |
| $ \varphi ,  \varphi _0$   | $L^1$                          | 517           |
| $ Q $  |                                |               |

## ВВЕДЕНИЕ

|   |              |  |              |
|---|--------------|--|--------------|
| $-\sigma$   | 13           | $V^{[r]}$                                  | 24, 55       |
| $X \cdot \sigma$  | 13           | $f \vee g, f^1 \vee \dots \vee f^r$        | 25, 56       |
| $X \cdot A, \partial \sigma$  | 12, 220      | $\alpha_0, \omega_0$                       | 27, 95, 96   |
| $\partial A$  | 14, 216, 218 | $u \times v$                               | 27           |
| $ \sigma $  | 15, 114      | $\nabla f, \nabla_v f(p) = \nabla f(p, v)$ | 29, 85       |
| $ v $   | 16           | $f^* \omega$                               | 30, 89       |
| $\{\sigma\}$  | 19, 114      | $J_f(p), \bar{J}_f(p)$                     | 30, 95, 96   |
| $D_X(p)$  | 19, 238, 363 | $\tilde{J}_f(p)$                           | 31           |
| $v_1 \vee v_2, v_1 \vee \dots \vee v_r$                             | 22, 54       | $\partial M$                               | 36, 153      |
| $e_i, v^i$  | 23, 467      | $dX$                                       | 37, 46, 221  |
| $e_{\lambda_1 \dots \lambda_r}, \alpha^{\lambda_1 \dots \lambda_r}$ | 23, 57, 60   | $d\omega$                                  | 37, 101, 148 |
| $V_{[r]}$   | 24, 54       | $\vec{\nabla}$                             | 39           |
| $\bar{V}$   | 24, 468, 473 | $ X ,  X ^b,  A ,  A ^b$                   | 45, 217, 220 |
| $e^i, f_i$  | 24, 468      | $ X ^\#,  A ^\#$                           | 46, 224, 225 |
| $e^{\lambda_1 \dots \lambda_r}, \xi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}$    | 25, 57, 60   |  |              |

## ГЛАВА I

|  |        |  |        |
|--|--------|--|--------|
| $u \vee v, v_1 \vee \dots \vee v_r, V_{[r]}$                           | 54     | $\rho(R, R'), \rho(\tilde{R}, \tilde{R}')$ | 66, 67 |
| $f \vee g, f^1 \vee \dots \vee f^r,$<br>$V^{[r]}, \omega \cdot \alpha$ | 55, 56 | $\varphi^*$                                | 68     |
| $e_\lambda, e^\lambda, \alpha^\lambda, \omega_\lambda$                 | 57, 60 | $\mathcal{D}\alpha, \mathcal{D}'\omega$    | 70     |
| $L'_{\text{alt}}(V)$   | 58     | $\alpha \cdot \beta, \omega \cdot \xi$     | 71, 72 |
| $\alpha \vee \beta, \omega \vee \xi$                                   | 61, 62 | $ \varphi $                                | 75     |
| $\omega \wedge \alpha$   | 63     | $ \alpha _0,  \omega _0$                   | 76, 77 |
|  |        | $\cos \theta,  W_2 - W_1 $                 | 82     |

## ГЛАВА II

|   |        |  |                         |
|---|--------|--|-------------------------|
| $\nabla_v f(p) = \nabla f(p, v)$  | 85     | $\mathfrak{L}_f = \mathfrak{L}(f), \mathfrak{L}_{f Q}$ | 90, 91                  |
| $\nabla f(p)$   | 85     | $e_i(p), e_\lambda(p)$                                 | 91                      |
| $ \nabla f(p) ,  \nabla f _Q,  \nabla f $   | 87     | $e^i(p) = dx^i, \omega_\lambda(p)$                     | 92                      |
| $gf = g \circ f$  | 87     | $\alpha_0, J_f(p)$                                     | 95                      |
| $\omega_0, \bar{\omega}(p),  \omega ,  \omega _0, \nabla f(p, \alpha),$<br>$f_p^*, f^* \omega, \omega \vee \xi$ | 89, 90 | $\bar{J}_f(p), \omega_0$                               | 96                      |
|   |        | $d\omega$  | 101, 110, 148, 151, 378 |

## ГЛАВА III

|  |          |   |                         |
|--|----------|---|-------------------------|
| $\{\sigma\}$                           | 19, 114  | $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \rightarrow R$ | 121                     |
| $ \sigma ,  \sigma _r$                 | 114      | $ R $   | 122                     |
| $\sum a_i \sigma_i^f$                  | 115, 215 | $\text{spt}(\omega)$                          | 126                     |
| $\{A\}$                                | 116, 308 | $f\sigma, \int_{f\sigma} \omega$              | 131, 152                |
| $\omega \circ A, \int_{\sigma} \omega$ | 117      | $\int_M \omega$                               | 131                     |
| $\int_A \omega$                        | 118      | $d\omega$                                     | 101, 110, 148, 151, 378 |
| $ A , \int_{\sigma} \bar{\omega}$      | 119      | р. к. м.                                      | 149                     |
| $\int_R \omega$                        | 121      | $\partial M, \partial_0 M$                    | 153                     |

## ГЛАВА IV

|                  |          |                               |     |
|------------------|----------|-------------------------------|-----|
| $L_f$            | 160      | $H_\mu^r, H_\mu^*, h \cup h'$ | 201 |
| $\Theta(\sigma)$ | 177, 355 | $X \cup Y$                    | 202 |
| $I^0, 1$         | 197      | $\gamma_f$                    | 203 |

## ГЛАВА V

|   |                         |  |          |
|---|-------------------------|--|----------|
| $\sum a_i \sigma_i, A(p), C_r^{\text{pol}}$ | 215                     | $ X ^{\#}, C^{\#r}, \mathfrak{L}_X = \mathfrak{L}(X)$                        | 226      |
| $\text{spt}(A)$                             | 216                     | $\mathfrak{L}_0(\omega),  \omega ^{\#}$                                      | 235      |
| $\partial A$                                | 216, 218                | $D_X(p, \alpha)$   | 236, 358 |
| $ A $                                       | 216, 252, 325, 337, 338 | $D_X(p)$   | 238, 363 |
| $ A ^b, C_r^b$                              | 217                     | $\varphi_\sigma, \zeta(p)$   | 244      |
| $T_v A, \mathcal{D}_v A$                    | 218                     | $\lim^b, \lim^{\#}, \underline{b} \succ, \underline{\#} \succ, \text{wkl}^b$ | 245      |
| $X \cdot A, C^{br},  X ^b$                  | 220                     | $X_\eta$   | 247      |
| $ X $                                       | 220, 326                | $ A _\rho^b,  A _\rho^{\#},  X _\rho^b,  X _\rho^{\#},$                      |          |
| $dX$  | 221                     | $ A _\rho^\circ,  X _\rho^\circ, C_{\rho, r}^b, C_{\rho, r}^{\#},$           |          |
| $ A ^{\#}$                                  | 224                     | $C_{\rho}^{br}, C_{\rho}^{\#r}$  | 250, 251 |
| $C_r^{\#}$                                  | 225                     |  |          |

## ГЛАВА VI

|                           |          |                     |               |
|---------------------------|----------|---------------------|---------------|
| $\dot{t}$                 | 261, 269 | $A_T$               | 273           |
| $\varphi$                 | 262, 279 | $\gamma_A, I^0$     | 276           |
| $ \gamma $                | 268      | $M,  \gamma ^\#, C$ | 278           |
| $\overline{\gamma}(a, b)$ | 269      | $\tilde{\alpha}$    | 279, 387, 388 |
| $\gamma^\circ$            | 270      | $d^*\alpha$         | 287           |
| $\text{spt}(\psi)$        | 272      |                     |               |

## ГЛАВА VII

|                   |          |                    |     |
|-------------------|----------|--------------------|-----|
| $  ^\circ$        | 292      | $\gamma_\eta(t)$   | 300 |
| $N_\varphi^{(r)}$ | 293      | $\{A\}$            | 308 |
| $\varphi A$       | 293, 449 | $P(\sigma)$        | 314 |
| $\varphi X$       | 297      | $X(\sigma)$        | 315 |
| $\text{spt}(A)$   | 298      | $\alpha/\beta$     | 317 |
| $\text{spt}(X)$   | 299      | $H^b, H^{b'}, H^*$ | 320 |

## ГЛАВА VIII

|  |     |                                |          |
|--|-----|--------------------------------|----------|
| $\mathcal{D}_v(Q)$   | 324 | $N_{\varphi, R}^{(r)}$         | 330      |
| $ A _R^b, C_r^b(R), \lim_R^b$  | 325 | $\text{spt}(A), \text{spt}(X)$ | 331, 298 |
| $C^{br}(R),  X _R^b$   | 326 | $ A _{R, p}^b,  A _{R, p}^\#$  | 333      |
| $ A _{R, p}^\#, C^{\#r}(R)$  | 327 | $ X _{R, p}^b,  X _{R, p}^\#$  | 334      |
| $\mathfrak{L}_{X, R}, \mathfrak{L}_{\varphi, R}, \mathfrak{L}_0(\omega, R),  \omega _R^\#$ | 328 | $ A _{R, p}^T$                 | 346      |
| $\text{wkl}_R^\circ$   | 329 |                                |          |

## ГЛАВА IX

|   |     |                                      |          |
|---|-----|--------------------------------------|----------|
| $\Theta(\sigma)$                                      | 355 | $\tilde{d}_\mu \omega$               | 372      |
| $\Theta_p(\sigma)$                                    | 356 | $\Psi\omega, \Phi X = D_X, d\omega$  | 378      |
| $P(\sigma), \alpha(\sigma), \alpha(P), P(p, \alpha),$ |     | $X \cup Y$                           | 384, 495 |
| $D_X(p, \alpha)$                                      | 358 | $I^0$                                | 385, 496 |
| $ H _s$   | 360 | $\overline{\varphi}, \tilde{\alpha}$ | 387      |
| $D_X(p)$  | 363 | $X \cap A$                           | 389, 496 |
| $\overline{d}\omega$                                  | 369 |                                      |          |

## ГЛАВА X

|   |          |             |     |
|---|----------|-------------|-----|
| $\delta_{f,g}$                          | 405      | $a^{[r]}$   | 410 |
| $fA$                                    | 407, 411 | $f^*X$      | 414 |
| $\rho_R(p, q), \mathfrak{L}_{f,R}, f Q$ | 409      | $f^*\omega$ | 415 |

## ГЛАВА XI

|                                       |     |  |          |
|---------------------------------------|-----|--|----------|
| $\overline{\gamma}$                   | 428 | $ \gamma ^\#, \text{spt}(\gamma)$        | 445      |
| $[\gamma],  \gamma $                  | 430 | $\gamma_{p,\alpha}$                      | 446      |
| $\int_R \xi \cdot d\gamma$            | 431 | $\mathfrak{M}_r, \mathbf{M}_r, \gamma_A$ | 447      |
| $\xi \cdot \gamma$                    | 432 | $\varphi A$                              | 449, 293 |
| $\xi _\gamma$                         | 433 | $A_Q$                                    | 451      |
| $\chi_Q$                              | 434 | $\Gamma_A(p), \xi_A(p)$                  | 452      |
| $\lim \gamma_i, \uparrow, \downarrow$ | 435 | $\tilde{\alpha}$                         | 453      |
| $L^+, L^*$                            | 439 | $T_v \gamma$                             | 454      |
| р. к. м.                              | 441 | $\text{diam}(\gamma)$                    | 455      |

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебра грассмановская 63, 24

Аннулятор 471

Аппроксимация аффинная 398

— коцепи 375

— отображения 398

—  $(\psi, Q, \mu, \eta)$  163

Базис 466

— взаимный 24, 468

— естественный в  $\mathcal{U}^n$  467

Бивектор 54, см. Вектор

Вариация ограниченная 268

— функции 268

— — множества 428

— — — полная 430

Вектор 466

— координатный 91

— на многообразии 33, 108, 167

— секущий 168

Векторы ортогональные 475

— перпендикулярные 475

Векторы-ребра симплекса 114

— — — определяющее множество 114

Вершина 485

Взрыв 457

Вложение 160

Высота симплекса 178

Гомологии 494

— абстрактные 471

Гомоморфизм 465

Гомотопия 485, 500

Градиент 29, 86

Граница звезды 487

— клетки 485, 493

— множества 484

— цепи алгебраической 493

— — бемольной или дизной 218, 225

— — гладкой 266, 286

— — полиэдральной 216

Грань клетки 485

— существенная верхняя 514

Детерминант линейного отображения 69

Деформация отображения 500

Диаметр 484

Дивергенция 40

Дифференциал 29, 85

— внешний формы 37, 101, 109

— — — бемольной или дизной 378, 379

Дифференцируемость 88, 94, 107, 109, 377, 507

Звезда 487

Значение полное функции множества 430

Изоморфизм 465

Инвариант Хопфа 203

Индекс Кронекера 493

Интеграл 26, 117, 119, 121

— зависящий от параметра 156

— Лебега 514

— на многообразии 131, 133

— несобственный 121

— повторный 156

— Римана 120

— со значениями в векторном пространстве 430

Клетка 485

— вырождающаяся 486

— вершины 485

— грани 485

— граница 485

— ориентированная 491

— открытое ядро 485

— плоскость 485

— размерность 485

- Клетка, ребра 486  
 — центр 486  
 Клетки неперекрывающиеся 485  
 Ковектор 24, 468  
 — на многообразии 108  
 — относительно плоскости 361  
 Когомологии 494  
 — абстрактные 471  
 — бемольные 320  
 — дифференциальные 42, 201  
 Кограница коцепи алгебраической 494  
 — — бемольной или дизной 37, 46, 221  
 Кольцо бемольных когомологий 320  
 Комасса коцепи 220, 326  
 — поликовектора 77  
 — формы 89  
 Комплекс 486  
 — криволинейный 196  
 — симплициальный 487  
 Компоненты вектора 23, 466  
 — ковектора 24, 468  
 — поливектора 23, 59  
 — поликовектора 25, 60  
 — формы 92  
 Константа липшицевская 90, 226, 327  
 — — комассовая 235, 328  
 — —  $R$ -липшицевская 409  
 Координаты барицентрические 479, 486, 487  
 — точки 91  
 Коцепь 14  
 — алгебраическая 493  
 — ассоциированная с формой 365  
 — бемольная 16, 220  
 — — в комплексе 315  
 — — — открытом множестве 326  
 — гладкая 240, 284  
 — дизная 17, 226, 327  
 — единичная нульмерная 493  
 — компактная 284  
 — полудизная 214  
 Коцикл 494  
  
 Лапласиан 40  
  
 Масса поливектора 76  
 — цепи, бемольной или дизной 251, 337  
 — клеточной 118  
 — — полиэдральной 216  
  
 Многообразие Грассмана 75  
 — дифференцируемое, или гладкое 33, 107, 167  
 — ориентируемое, ориентированное 107  
 — кублируемое 402  
 — стандартное 153  
 Множество векторов ортонормальное 475  
 — векторов-ребер определяющее 114  
 — звездообразное 192  
 — компактное 484  
 — нулевой  $s$ -протяженности 138  
 — отображения предельное 160  
 Модуль линейного отображения 75  
 — формы 89  
  
 Направление ориентированного подпространства 75  
 Неравенство Шварца 72, 474  
 Норма 472, 474  
 — бемольная коцепи 45, 220  
 — — цепи 45, 220  
 — — — липшицевской 422  
 — — — полиэдральной 45, 220  
 — —  $p$ -норма 250  
 — —  $R$ -норма 325, 326  
 — —  $R$ - $p$ -норма 333, 334  
 — дизная коцепи 46, 226, 327  
 — — формы 235, 328  
 — — функции множества 445, 456  
 — — цепи 46, 224, 327  
 — — — полиэдральной 46, 224, 327  
 — — —  $p$ -норма 250  
 — — —  $R$ -норма 327  
 — — —  $R$ - $p$ -норма 333  
 — — сдвиговая 346  
 Нормы сопряженные 474  
 Носитель коцепи 298, 331  
 — формы 126  
 — функции 507  
 — — множества 445  
 — цепи 298, 331  
 — — полиэдральной 216, 298  
  
 Область полиэдральная 486  
 — стандартная 141  
 — — частичная 153  
 Объем ориентированный 66  
 — — открытого множества 122  
 Окрестность 485

- Отношение объемов 66  
   —  $r$ -векторов 317  
 Отображение 484  
   — аффинное 480  
   — взаимно однозначное 465  
   — вырождающееся 486  
   — гладкое,  $s$ -гладкое 85, 94, 107  
   — изометричное 465  
   — клеточно-аффинное 499  
   — линейное 467  
   — липшицевское 91  
   — на 465  
   — регулярное 91, 160  
   — симплициальное 499  
   — симплициальное 499  
   — собственное 160  
   — сопряженное, или дуальное, или  
   присоединенное 469  
   —  $R$ -липшицевское 409
- Параллелепипед координатный 372  
   —  $Q$ -отличный 372  
   —  $Q$ -хороший 372  
 П. в. (почти всюду) 514  
 Период формы 203  
   — — основной 43
- Плоскость, касательная к много-  
 образу 33, 167  
   — клетки 485  
   —  $Q$ -хорошая 363
- Подпространство аффинное 478  
   — дополнительное 470  
   — порождаемое множеством 466,  
   479
- Подразделение 488  
   — криволинейное 124, 488  
   — регулярное 488  
   — стандартное 489
- Показатель независимости плоско-  
 стей 501
- Поливектор 54, 109  
   — единичный 75  
   — ориентированной клетки или  
   симплекса 19, 114  
   — простой, или разложимый 24, 65  
   — цепи, бемольной или дизной  
   308  
   — — клеточной или полиэдральной  
   116
- Поликовектор 55, 56  
   — единичный 75  
   — простой 65
- Полиэдр 486
- Полнота,  $p$ -полнота 177, 355
- Полуорма 472
- Последовательность полная,  $p$ -пол-  
 ная 356, 407  
   — расширяющаяся 340
- Поток 17, 36
- Предел, слабый предел 245, 329,  
 435
- Преобразование координат 93
- Проекция вдоль плоскости 174, 470  
   — ортогональная 82
- Произведение векторное 27, 75  
   — внешнее 22, 24, 61, 90  
   — внутреннее 63  
   — декартово 470, 498  
   — скалярное 56, 71, 474  
   — функций и коцепей 297, 331  
   — — — цепей 271, 292, 330, 449  
   — — — функций множества 434  
   —  $\cup$ -произведение 201, 384, 386,  
   495  
   —  $\cap$ -произведение 389, 390, 391,  
   496
- Производная 85
- Пространство арифметическое 467  
   — аффинное 476  
   — банахово 481  
   — векторное 466  
   — гомологий 495  
   — евклидово 481  
   — — линейное 474  
   — касательное многообразия 108  
   — когомологий 495  
   — линейное 466  
   — ориентированное 65  
   — полусопряженное 482  
   — рефлексивное 482  
   — сепарабельное 482  
   — сопряженное 24, 468, 473
- Псевдомногообразие 503
- $p$ -кривая 105, 108
- $p$ -функция 106, 108
- $p$ - $\alpha$ -последовательность 358
- $p$ - $\alpha$ -симплекс 358
- Разбиение борелевское 428, 459  
   — липшицевское 460  
   — полиэдра 487  
   — симплициальное (триангуляция)  
   487  
   — чистое 455
- Разложение единицы 127, 132, 509
- Размерность векторного простран-  
 ства 466  
   — клетки 485  
   — полиэдра 486  
   — цепи или коцепи 492

- Расстояние между множествами 484  
 — — направлениями подпространств 82  
 — — точками или векторами 473, 474, 486  
 Ребро клетки 486  
 Р. к. м. (равномерно на компактных множествах) 149  
 $r$ -вектор 54, см. Поливектор  
 $r$ -вектор-функция 279  
 $r$ -ковектор 56, см. Поликовектор  
 $r$ -форма 88  
 $R$ -расстояние 409
- Свойство, выполняющееся вблизи множества 192  
 Сглаживание коцепи 247  
 — функции 510  
 Сдвиг в аффинном пространстве 476  
 — функции множества 454  
 — цепи 218, 16  
 Симплекс 486  
 — вырождающийся 486  
 — гладкий 152  
 — ориентированный 491  
 —  $Q$ -отличный,  $Q$ -хороший 363, 364, 368  
 Система координат 33, 91, 107  
 — — аффинная 480  
 — — гладкая 91  
 — — допустимая 165  
 — — криволинейная 91  
 — — ортонормальная 92, 481  
 Соединение 496  
 Соответствие между цепями и функциями 262, 269, 279, 387  
 — — — множества 447  
 Спаривание линейных пространств 471  
 Степень мелкости комплекса 488  
 — отображения 210  
 — поливектора 54  
 — поликовектора 56  
 — формы 88  
 Сходимость последовательностей множеств 121  
 — слабая 245, 246, 329  
 — функций 435  
 Сумма прямая 470
- Теорема о неявной функции 100  
 — об обратной функции 97  
 — Стокса 36, 134, 141, 153, 378  
 — Уолфа 351, 367  
 Тожество Лагранжа 26, 60  
 Топология естественная 467, 479  
 Точки зависимые, независимые 479  
 Триангуляция 487  
 —  $\mu$ -гладкая 175
- Угол между подпространствами 82  
 Усреднение 510
- Фактор-пространство, или пространство-разность, или пространство-частное 470  
 Форма, ассоциированная с коцепью 365  
 — бемольная 364  
 — — слабая 368  
 — в комплексе 316  
 — гладкая 88, 109, 134  
 — дизная 235, 328  
 — дифференциальная 26, 88  
 — замкнутая 42, 192  
 — измеримая 361  
 — — относительно плоскости 361  
 — компактная 284  
 — на многообразии 109  
 — нечетного рода 290  
 — производная 42, 148, 192  
 — регулярная 148, 151  
 — суммируемая 121  
 — элементарная 197, 316  
 —  $\mu$ -производная 192  
 —  $\mu$ -регулярная 191  
 Формы эквивалентные 367  
 Функционал ограниченный линейный 441  
 Функция альтернирующая  $r$ -линейная 58  
 — борелевская 427  
 — ступенчатая 431  
 — гладкая,  $k$ -гладкая 85, 94, 107, 507  
 — дизная 222, 328, 508  
 — измеримая 514  
 — клеточно-непрерывная 507  
 — клеточно-постоянная 507  
 — локально суммируемая 507  
 — множества аддитивная 428  
 — — в точке атомная 446
- Тензор альтернирующий 53  
 Теорема де Рама 42, 201, 292

Функция множества в точке, молекулярная 446

- — компактная 445
- ограниченная линейная 473
- ограниченной вариации 268
- суммируемая 507
- характеристическая 434
- $g$ -направления 369

Центр клетки 486

Цепь алгебраическая 492

- бемольная 46, 217, 325
- в точке, атомная 309
- гладкая 286
- дизная 46, 225, 327
- клеточная 115
- компактная 298, 331
- лебеговская 387
- липшицевская 406
- молекулярная 309

Цепь непрерывная 48, 262, 279

- — на многообразии 288
  - открытого множества 325
  - полиэдральная 14, 215
  - сдвиговая 346
- Циркуляция 17, 35

Часть цепи в множестве 451

- — меньше  $T$  273

Шар 485

Якобиан 30, 95

- алгебраический 30, 96
- Ядро гомоморфизма 465
- клетки 485
  - открытое 484

# Оглавление

|  |           |
|--|-----------|
| Предисловие . . . . .  | 5         |
| Введение . . . . .   | 11        |
| <i>А. Общая задача интегрирования . . . . .</i>  | <i>12</i> |
| 1. Интеграл как функция области . . . . .  | 12        |
| 2. Полиэдральные цепи . . . . .  | 14        |
| 3. Две гипотезы непрерывности . . . . .  | 15        |
| 4. Еще одна гипотеза непрерывности . . . . .   | 16        |
| 5. Несколько примеров . . . . .  | 17        |
| 6. Случай $r = n$ . . . . .  | 18        |
| 7. $r$ -вектор $r$ -мерной ориентированной клетки . . . . .                                  | 19        |
| 8. О $r$ -векторах и границах $(r + 1)$ -мерных клеток . . . . .                             | 20        |
| 9. Грассмановская алгебра . . . . .  | 22        |
| 10. Дуальная алгебра . . . . .   | 24        |
| 11. Интегрирование дифференциальных форм . . . . .   | 26        |
| <i>В. Некоторые классические вопросы . . . . .</i>   | <i>26</i> |
| 12. Грассмановская алгебра в метрическом $n$ -мерном ориентированном пространстве . . . . .  | 26        |
| 13. То же самое, $n = 3$ . . . . .   | 27        |
| 14. Дифференциал отображения . . . . .   | 29        |
| 15. Якобианы . . . . .   | 30        |
| 16. Преобразование интеграла . . . . .   | 31        |
| 17. Гладкие многообразия . . . . .   | 33        |
| 18. Частные виды интегралов в трехмерном пространстве . . . . .                              | 34        |
| 19. Теорема Стокса . . . . .   | 36        |
| 20. Внешний дифференциал . . . . .   | 37        |
| 21. Некоторые специальные формулы в метрическом ориентированном пространстве $E^3$ . . . . . | 39        |
| 22. Теорема существования . . . . .  | 40        |
| 23. Теорема де Рама . . . . .  | 42        |
| <i>С. набросок общей теории . . . . .</i>  | <i>45</i> |
| 24. Нормированные пространства цепей и коцепей . . . . .                                     | 45        |
| 25. Непрерывные цепи . . . . .   | 46        |
| 26. О нульмерном интегрировании . . . . .  | 48        |

Часть первая  
КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

|  |                |
|--|----------------|
| <b>I. Грассмановская алгебра . . . . .</b>                       | <b>53</b>      |
| 1. Поливекторы . . . . .   | 54             |
| 2. Поликовекторы . . . . .                                       | 55             |
| 3. Свойства пространств $V[r]$ и $V[r']$ . . . . .               | 57             |
| 4. Альтернирующие $r$ -линейные функции . . . . .                | 58             |
| 5. Применение систем координат . . . . .                         | 59             |
| 6. Внешние произведения . . . . .                                | 61             |
| 7. Внутренние произведения . . . . .                             | 63             |
| 8. $n$ -векторы в $n$ -мерном пространстве . . . . .             | 65             |
| 9. Простые поливекторы . . . . .                                 | 65             |
| 10. Линейные отображения векторных пространств . . . . .         | 68             |
| 11. Двойственность . . . . .                                     | 69             |
| 12. Евклидовы векторные пространства . . . . .                   | 71             |
| 13. Масса и комасса . . . . .                                    | 76             |
| 14. Масса и комасса произведений . . . . .                       | 80             |
| 15. О проекциях . . . . .  | 81             |
| <br><b>II. Дифференциальные формы . . . . .</b>                  | <br><b>84</b>  |
| 1. Дифференциал гладкого отображения . . . . .                   | 85             |
| 2. Некоторые свойства дифференциалов . . . . .                   | 86             |
| 3. Дифференциальные формы . . . . .                              | 88             |
| 4. Гладкие отображения . . . . .                                 | 89             |
| 5. Применение систем координат . . . . .                         | 91             |
| 6. Якобианы . . . . .  | 95             |
| 7. Теоремы об обратной и о неявной функциях . . . . .            | 97             |
| 8. Внешний дифференциал . . . . .                                | 101            |
| 9. Представление векторов и ковекторов . . . . .                 | 105            |
| 10. Гладкие многообразия . . . . .                               | 106            |
| 11. Касательное пространство гладкого многообразия . . . . .     | 108            |
| 12. Дифференциальные формы на гладких многообразиях . . . . .    | 109            |
| 13. Характеризация внешнего дифференциала . . . . .              | 111            |
| <br><b>III. Риманова теория интегрирования . . . . .</b>         | <br><b>112</b> |
| 1. $r$ -вектор ориентированного $r$ -мерного симплекса . . . . . | 113            |
| 2. $r$ -вектор $r$ -мерной цепи . . . . .                        | 115            |
| 3. Интегрирование по клеточным цепям . . . . .                   | 117            |
| 4. Некоторые свойства интегралов . . . . .                       | 118            |
| 5. Связь с интегралом Римана . . . . .                           | 119            |
| 6. Интегрирование по открытым множествам . . . . .               | 120            |
| 7. Формула преобразования . . . . .                              | 124            |
| 8. Доказательство формулы преобразования . . . . .               | 126            |
| 9. Преобразование интеграла Римана . . . . .                     | 130            |
| 10. Интегрирование на многообразиях . . . . .                    | 131            |
| 11. Теорема Стокса для параллелепипеда . . . . .                 | 134            |
| 12. Частный случай теоремы Стокса . . . . .                      | 136            |

|  |     |
|--|-----|
| 13. Множества нулевой $s$ -протяженности . . . . .         | 138 |
| 14. Теорема Стокса для стандартных областей . . . . .      | 141 |
| 15. Доказательство теоремы . . . . .                       | 144 |
| 16. Регулярные формы в евклидовом пространстве . . . . .   | 147 |
| 17. Регулярные формы на гладких многообразиях . . . . .    | 151 |
| 18. Теорема Стокса для стандартных многообразий . . . . .  | 153 |
| 19. Повторный интеграл в евклидовом пространстве . . . . . | 156 |

#### IV. Гладкие многообразия . . . . . 159

##### *А. Многообразия в евклидовом пространстве . . . . . 160*

|   |     |
|---|-----|
| 1. Теорема о вложении . . . . .                                       | 160 |
| 2. Компактный случай . . . . .  | 161 |
| 3. Разделение подмножеств пространства $E^m$ . . . . .                | 162 |
| 4. Регулярная аппроксимация . . . . .                                 | 163 |
| 5. Доказательство теоремы 1 А, $M$ компактно . . . . .                | 164 |
| 6. Допустимые системы координат в $M$ . . . . .                       | 165 |
| 7. Доказательство теоремы 1 А, $M$ не компактно . . . . .             | 166 |
| 8. Локальные свойства многообразия $M$ в пространстве $E^m$ . . . . . | 166 |
| 9. О $n$ -направлениях в $E^m$ . . . . .                              | 169 |
| 10. Окрестность многообразия $M$ в пространстве $E^m$ . . . . .       | 171 |
| 11. Проекция вдоль плоскости . . . . .                                | 174 |

##### *В. Триангуляция многообразий . . . . . 175*

|   |     |
|---|-----|
| 12. Теорема о триангуляции . . . . .                        | 175 |
| 13. Набросок доказательства . . . . .                       | 176 |
| 14. Полнота . . . . .                                       | 177 |
| 15. Линейные комбинации векторов-ребер симплексов . . . . . | 179 |
| 16. Величины, используемые в доказательстве . . . . .       | 181 |
| 17. Комплекс $L$ . . . . .                                  | 181 |
| 18. Комплекс $L^*$ . . . . .                                | 183 |
| 19. Пересечения многообразия $M$ с $L^*$ . . . . .          | 184 |
| 20. Комплекс $K$ . . . . .                                  | 185 |
| 21. Вложение симплексов в $M$ . . . . .                     | 186 |
| 22. Комплексы $K_p$ . . . . .                               | 188 |
| 23. Доказательство теоремы . . . . .                        | 189 |

##### *С. Когомологии в многообразиях . . . . . 191*

|   |     |
|---|-----|
| 24. $\mu$ -регулярные формы . . . . .                         | 191 |
| 25. Замкнутые формы в звездообразных множествах . . . . .     | 192 |
| 26. Продолжение форм . . . . .                                | 194 |
| 27. Элементарные формы . . . . .                              | 196 |
| 28. Некоторые замкнутые формы являются производными . . . . . | 199 |
| 29. Изоморфизм колец когомологий . . . . .                    | 201 |
| 30. Периоды форм . . . . .                                    | 203 |
| 31. Инвариант Хопфа . . . . .                                 | 203 |
| 32. О гладких отображениях многообразий . . . . .             | 206 |
| 33. Другие выражения для инварианта Хопфа . . . . .           | 208 |

Часть вторая  
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

|  |                |
|--|----------------|
| <b>V. Абстрактная теория интегрирования . . . . .</b>                                | <b>213</b>     |
| 1. Полиэдральные цепи . . . . .  | 215            |
| 2. Масса полиэдральных цепей . . . . .   | 216            |
| 3. Бемольная норма . . . . .   | 217            |
| 4. Бемольные коцепи . . . . .  | 220            |
| 5. Примеры . . . . .   | 223            |
| 6. Дизная норма . . . . .  | 224            |
| 7. Дизные коцепи . . . . .   | 226            |
| 8. Характеризация норм . . . . .   | 229            |
| 9. Алгебраический критерий для поликовекторов . . . . .                              | 233            |
| 10. Дизные $r$ -формы . . . . .  | 235            |
| 11. Примеры . . . . .  | 241            |
| 12. Полуноормы $ A ^b$ , $ A ^\#$ являются нормами . . . . .                         | 243            |
| 13. Слабая сходимость . . . . .  | 245            |
| 14. Некоторые связи между пространствами цепей и коцепей . . . . .                   | 249            |
| 15. $p$ -нормы . . . . .   | 250            |
| 16. Масса цепей . . . . .  | 251            |
| 17. Сепарабельность пространств цепей . . . . .                                      | 255            |
| 18. Несепарабельность пространств коцепей . . . . .                                  | 255            |
| <br><b>VI. Некоторые связи между цепями и функциями . . . . .</b>                    | <br><b>261</b> |
| 1. Непрерывные цепи на действительной прямой . . . . .                               | 262            |
| 2. Нульмерные цепи в $E^1$ , определяемые функциями ограниченной вариации . . . . .  | 268            |
| 3. Умножение нульмерных цепей на дизные функции . . . . .                            | 271            |
| 4. Часть цепи конечной массы . . . . .   | 273            |
| 5. Функции ограниченной вариации в $E^1$ , определяемые нульмерными цепями . . . . . | 276            |
| 6. Некоторые теоремы анализа . . . . .   | 278            |
| 7. Непрерывные $r$ -мерные цепи в $E^n$ . . . . .                                    | 279            |
| 8. О компактных коцепях . . . . .  | 284            |
| 9. Граница гладкой цепи . . . . .  | 286            |
| 10. Непрерывные цепи на гладких многообразиях . . . . .                              | 288            |
| <br><b>VII. Общие свойства цепей и коцепей . . . . .</b>                             | <br><b>291</b> |
| 1. Умножение цепей на дизные функции . . . . .                                       | 292            |
| 2. Умножение коцепей на дизные функции . . . . .                                     | 297            |
| 3. Носители цепей и коцепей . . . . .  | 298            |
| 4. О некомпактных цепях . . . . .  | 303            |
| 5. О полиэдральной аппроксимации . . . . .   | 306            |
| 6. $r$ -вектор $r$ -мерной цепи . . . . .  | 308            |
| 7. Дизные цепи в точке . . . . .   | 309            |
| 8. Множество молекулярных цепей всюду плотно . . . . .                               | 312            |
| 9. Бемольные $r$ -мерные цепи в $E^{r-k}$ равны нулю . . . . .                       | 313            |
| 10. Бемольные коцепи в комплексах . . . . .  | 314            |
| 11. Элементарные бемольные коцепи в комплексе . . . . .                              | 316            |
| 12. Теорема об изоморфизме . . . . .   | 320            |

|   |            |
|---|------------|
| <b>VIII. Цепи и коцепи в открытых множествах . . . . .</b>              | <b>323</b> |
| 1. Цепи и коцепи в открытых множествах; элементарные свойства . . . . . | 324        |
| 2. Цепи и коцепи в открытых множествах; дальнейшие свойства . . . . .   | 330        |
| 3. Свойства массы . . . . .   | 336        |
| 4. Об открытых множествах, которым принадлежит цепь . . . . .           | 340        |
| 5. Одно представление для бемольных цепей . . . . .                     | 344        |
| 6. Одно представление для дизельных цепей . . . . .                     | 346        |

### Часть третья

#### ЛЕБЕГОВСКАЯ ТЕОРИЯ

|   |                |
|---|----------------|
| <b>X. Бемольные коцепи и дифференциальные формы . . . . .</b>                       | <b>351</b>     |
| 1. $n$ -мерные коцепи в $E^n$ . . . . .   | 354            |
| 2. Некоторые свойства полноты . . . . .   | 355            |
| 3. Свойства проекций . . . . .  | 356            |
| 4. Элементарные свойства функции $D_X(p, \alpha)$ . . . . .                         | 358            |
| 5. $r$ -форма, определяемая $r$ -мерной бемольной коцепью . . . . .                 | 361            |
| 6. Бемольные $r$ -формы . . . . .   | 363            |
| 7. Бемольные $r$ -формы и бемольные $r$ -мерные коцепи . . . . .                    | 365            |
| 8. Бемольные функции $r$ -направления . . . . .                                     | 369            |
| 9. Бемольные формы, определяемые компонентами . . . . .                             | 372            |
| 10. Аппроксимация коектора $D^X(p)$ с помощью $X \cdot \sigma /  \sigma $ . . . . . | 374            |
| 11. Дифференцируемость липшицевских функций . . . . .                               | 377            |
| 12. О внешнем дифференциале $r$ -форм . . . . .                                     | 378            |
| 13. О средних $r$ -форм . . . . .   | 381            |
| 14. Произведения коцепей . . . . .  | 383            |
| 15. Лебеговские цепи . . . . .  | 387            |
| 16. Произведения коцепей и цепей . . . . .  | 389            |
| 17. Произведения и слабые пределы . . . . .   | 392            |
| 18. Характеризация произведений . . . . .   | 394            |
| <br><b>X. Липшицевские отображения . . . . .</b>                                    | <br><b>396</b> |
| 1. Аффинная аппроксимация липшицевских отображений . . . . .                        | 398            |
| 2. Аппроксимация на ребрах симплекса . . . . .                                      | 399            |
| 3. Аппроксимация якобиана . . . . .   | 402            |
| 4. Объем и аффинная аппроксимация . . . . .   | 402            |
| 5. Лемма о непрерывности . . . . .  | 405            |
| 6. Липшицевские цепи . . . . .  | 406            |
| 7. Липшицевские отображения открытых множеств . . . . .                             | 409            |
| 8. Липшицевские отображения и бемольные коцепи . . . . .                            | 414            |
| 9. Липшицевские отображения и бемольные формы . . . . .                             | 415            |
| 10. Липшицевские отображения и дизельные функции . . . . .                          | 419            |
| 11. Липшицевские отображения и произведения . . . . .                               | 420            |
| 12. О бемольной норме липшицевских цепей . . . . .                                  | 422            |
| 13. Деформации цепей . . . . .  | 423            |

|  |            |
|--|------------|
| <b>XI. Цепи и аддитивные функции множества . . . . .</b>                         | <b>425</b> |
| 1. О конечномерных банаховых пространствах . . . . .                             | 426        |
| 2. Аддитивные функции множества со значениями в векторном пространстве . . . . . | 428        |
| 3. Интегралы со значениями в векторном пространстве . . . . .                    | 430        |
| 4. Умножение функций множества на функции точки . . . . .                        | 434        |
| 5. Связь между функцией множества и ее вариацией . . . . .                       | 436        |
| 6. О положительных линейных функционалах . . . . .                               | 439        |
| 7. Об ограниченных линейных функционалах . . . . .                               | 441        |
| 8. Линейные функции дизъюнктной $\mathcal{I}$ -формы . . . . .                   | 443        |
| 9. Дизъюнктная норма $\mathcal{I}$ -вектор-функций множества . . . . .           | 445        |
| 10. Молекулярные функции множества . . . . .                                     | 446        |
| 11. Дизъюнктные цепи и функции множества . . . . .                               | 447        |
| 12. Умножение цепей на ограниченные борелевские функции . . . . .                | 449        |
| 13. Часть цепи в борелевском множестве . . . . .                                 | 451        |
| 14. Цепи и функции точки . . . . .   | 452        |
| 15. Характеризация дизъюнктной нормы . . . . .                                   | 454        |
| 16. Представление дизъюнктной нормы . . . . .                                    | 456        |
| 17. Другие представления дизъюнктной нормы . . . . .                             | 459        |

## ПРИЛОЖЕНИЯ

|  |            |
|--|------------|
| <b>Приложение I. Векторные и линейные пространства . . . . .</b> | <b>465</b> |
|--|------------|

|  |     |
|--|-----|
| 1. Векторные пространства . . . . .              | 466 |
| 2. Линейные отображения . . . . .                | 467 |
| 3. Сопряженные пространства . . . . .            | 468 |
| 4. Прямые суммы, дополнения . . . . .            | 470 |
| 5. Фактор-пространства . . . . .                 | 470 |
| 6. Спаривание линейных пространств . . . . .     | 471 |
| 7. Абстрактные гомологии . . . . .               | 471 |
| 8. Нормированные линейные пространства . . . . . | 472 |
| 9. Евклидовы линейные пространства . . . . .     | 474 |
| 10. Аффинные пространства . . . . .              | 476 |
| 11. Бариецентрические координаты . . . . .       | 479 |
| 12. Аффинные отображения . . . . .               | 480 |
| 13. Евклидовы пространства . . . . .             | 481 |
| 14. Банаховы пространства . . . . .              | 481 |
| 15. Полусопряженные пространства . . . . .       | 482 |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Приложение II. Подготовительные сведения из геометрии и топологии . . . . .</b> | <b>484</b> |
|--|------------|

|  |     |
|--|-----|
| 1. Клетки, симплексы . . . . .         | 485 |
| 2. Полиэдры, комплексы . . . . .       | 486 |
| 3. Подразделения . . . . .             | 487 |
| 4. Стандартные подразделения . . . . . | 489 |
| 5. Ориентация . . . . .                | 491 |
| 6. Цепи и коцепи . . . . .             | 492 |
| 7. Граница и кограница . . . . .       | 493 |
| 8. Гомологии и когомологии . . . . .   | 494 |
| 9. Произведения в комплексе . . . . .  | 495 |
| 10. Соединения . . . . .               | 496 |

|   |     |
|---|-----|
| 11. Подразделения цепей . . . . .   | 497 |
| 12. Декартово произведение клеток . . . . .   | 498 |
| 13. Отображения комплексов . . . . .  | 499 |
| 14. Некоторые свойства плоскостей . . . . .   | 501 |
| 15. Отображения $n$ -мерных псевдомногообразий в $n$ -мерное пространство . . . . . | 503 |
| 16. Смещение триангуляции пространства $E^n$ . . . . .                              | 505 |

### Приложение III. Подготовительные сведения из анализа . . . . 507

|   |     |
|---|-----|
| 1. Существование некоторых функций . . . . .            | 508 |
| 2. Разложения единицы . . . . .                         | 509 |
| 3. Сглаживание функций посредством усреднения . . . . . | 510 |
| 4. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации . . . . .      | 513 |
| 5. Лебеговская теория . . . . .                         | 514 |
| 6. Пространство $L^1$ . . . . .                         | 517 |
| Указатель символов . . . . .                            | 518 |
| Предметный указатель . . . . .                          | 523 |

*Хасслер Уитни*

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ  
ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Редактор *И. В. Глатёнок*

Художественный редактор

*Е. Н. Подмарькова*

Технический редактор *В. А. Доценко*.

Сдано в производство 21/XII 1959 г.

Подписано к печати 30/IX 1960 г.

Бумага  $60 \times 92^{1/16} = 16,3$ , бум. л.

32,5 печ. л. Уч.-изд. л. 28,7. Изд. № 1/4674.

Цена 22 р. 10 к., с 1/I 1961 г. 2 р. 21 к.

Зак. 1097.

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

---

Типография № 2 им. Евг. Соколовой  
УПП Ленсовнархоза.  
Ленинград, Измайловский пр., 29.











ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ  
ТЕОРИЯ  
ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ХАССЛЕР  
УИТНИ